Math

21世纪数学教育信息化精品教材

大学数学立体化教材

简明版

# 线性代数

## （经管类·第四版）

◎吴赣昌 主编

中国人民大学出版社

**图书在版编目（CIP）数据**

线性代数（经管类·简明版）/吴赣昌主编. —4版. —北京：中国人民大学出版社，2011.7

21世纪数学教育信息化精品教材. 大学数学立体化教材

ISBN 978-7-300-13972-2

Ⅰ.①线… Ⅱ.①吴… Ⅲ.①线性代数-高等学校-教材 Ⅳ.①O151.2

中国版本图书馆CIP数据核字（2011）第124567号

21世纪数学教育信息化精品教材

大学数学立体化教材

**线性代数（经管类·简明版）**

第四版

吴赣昌　主编

Xianxing Daishu

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 出版发行 | 中国人民大学出版社 | | | |
| 社　　址 | 北京中关村大街31号 | 邮政编码 | | 100080 |
| 电　　话 | 010－62511242（总编室） | 010－62511398（质管部） | | |
| | 010－82501766（邮购部） | 010－62514148（门市部） | | |
| | 010－62515195（发行公司） | 010－62515275（盗版举报） | | |
| 网　　址 | http://www.crup.com.cn | | | |
| | http://www.ttrnet.com（人大教研网） | | | |
| 经　　销 | 新华书店 | | | |
| 印　　刷 | 北京昌联印刷有限公司 | 版 | 次 | 2006年10月第1版 |
| 规　　格 | 170 mm×228 mm　16开本 | | | 2011年8月第4版 |
| 印　　张 | 11插页1 | 印 | 次 | 2011年8月第1次印刷 |
| 字　　数 | 223 000 | 定 | 价 | 26.00元(配网络学习空间) |

# 前　言

大学数学是自然科学的基本语言，是应用模式探索现实世界物质运动机理的主要手段. 对于大学非数学专业的学生而言，大学数学的教育，其意义不仅仅是学习一种专业的工具而已. 中外大量的教育实践事实充分显示了：优秀的数学教育，是一种人的理性的思维品格和思辨能力的培育，是聪明智慧的启迪，是潜在的能动性与创造力的开发，其价值是远非一般的专业技术教育所能相提并论的.

随着我国高等教育自 1999 年开始迅速扩大招生规模，至 2009 年的短短十年间，我国高等教育实现了从精英教育到大众化教育的过渡，走完了其它国家需要三五十年甚至更长时间才能走完的道路. 教育规模的迅速扩张，给我国的高等教育带来了一系列的变化、问题与挑战，如大众化教育阶段入学群体的多样化问题、学生规模扩张带来的大班和多班教学问题、由于院校合并导致的“一校多区”及由此产生的教学管理不科学以及师生间交流缺乏等问题，这些都是在过去“精英教育”阶段没有遇到的.

进入大众化教育阶段，大学数学的教育问题首当其冲受到影响. 过去大学数学教育是面向少数精英的教育，由于学科的特点，数学教育呈现几十年、甚至上百年一贯制，仍处于经典状态. 当前大学数学课程的教学效果不尽如人意，概括起来主要表现在以下两方面：一是教材建设仍然停留在传统模式上，未能适应新的社会需求. 传统的大学数学教材过分追求逻辑的严密性和理论体系的完整性，重理论而轻实践，剥离了概念、原理和范例的几何背景与现实意义，导致教学内容过于抽象，也不利于与其它课程及学生自身专业的衔接，进而造成了学生“学不会，用不了”的尴尬局面；二是计算机技术迅猛发展的今天，信息化技术本应给数学教育提供空前广阔的天地，但遗憾的是，在数学教育领域，信息化技术的使用远没有在其它领域活跃. 正如我国著名数学家张景中院士所指出的，计算机进入数学教育在国内还只是刚刚起步，究其原因有两方面：一是没有充分考虑把信息化技术和数学教学的学科特点结合起来；二是在强调教育技术的同时没有充分发挥教师的作用，这样就难以把信息化技术和数学教学完美结合起来.

关于大学数学教育改革的出路问题，在此，我们引用教育部数学基础课程教学指导分委员会前主任、清华大学数学系冯克勤教授专门撰文所指出的一句话：“数学教育的关键是彻底转变观念.”当前大学数学教学所面临的问题，实际上已经指出了大学数学教育改革的目标：一是深化教学内容和教材体系的改革；二是积极推进大学数学教育信息化建设.

自 2000 年初起，我们成立了一个由专家、教师与软件技术人员组成的研发团队，围绕上述改革目标进行攻关，2002 年推出了第一个“高等数学多媒体教学系统”；2005 年由中国人民大学出版社出版了 12 套面向普通本科院校理工类与经管类专业使用的“大学数学立体化教材”及其配套的多媒体教学系统；2007 年对其修订后出版了第二版，并同时出版了面向高职高专院校和文科类专业的立体化教材及其配套的多媒体教学系统，初步完成了大学数学试题库系统与大学数学精品课程网站等信息化配套建设工作；2009 年对上述教材完成了进一步的升级改版工作，并同时出版了农林类与医药类的教材，鉴于教材的立体化与信息化配套建设显著加强，为更加突出教材的特色和内涵，我们将上述系列教材统一冠名为“21 世纪数学教育信息化精品教材”. 令人感到欣慰的是，上述教材及其信息化建设成果已被国内数百所高等院校广泛采用，并对当前大学数学的教育改革起到了积极的推动作用.

2009 年以来，作者团队彻底突破了制约当前教育信息化建设的技术瓶颈——基于 Web 的公式与图形的在线编辑、复制、粘贴、修改、搜索与识别问题. 这一核心技术的突破使我们的各项信息化建设有了质变的跨越，集成了网页公式编辑系统（WebFormulaEdit）与网页图形编辑系统（WebGraphEdit）的在线答疑平台

函数在某点的“线性化”定义，从定积分的微元法出发，进一步引入有限单元化的思想，而有限单元化和线性化是用数学解决复杂应用问题的基本思想方法. 不同课程教材的内容建设前后呼应，比如，在《线性代数（理工类·第四版）》第 3 章的引言中就进一步介绍了如何利用有限单元化和线性化方法来解决复杂应用问题，等等.

2. 对部分章节引言做了改进. 例如，对数列极限的概念，先从其描述性定义引入，然后以定量分析的观点进一步给出数列极限的严格定义，这样的安排既符合数学发展的本源，又利于学生更好地理解极限的概念. 更多参考包括数学建模——函数关系建立、函数连续性、数学建模——最优化、矩阵、线性方程组等章节的引言，这些引言对于学生理解即将学习的数学内容的实质能起到重要的作用.

3. 紧密联系实际，服务专业课程，精选了不少只涉及基本数学知识、能体现数学建模精神、能吸引学生且学生以后又可能接触到的应用范例和数学建模问题，如函数模型的建立及其应用，作为变化率的导数在几何学、物理学、经济学和医药学中的应用，最优化方法及其在工程、经济、农业、医药领域中的应用，逻辑斯蒂模型及其在人口预测、新产品的推广模型与经济增长预测方面的应用，网络流模型及其应用，人口迁移模型及其应用，常用概率模型及其应用，等等，并为所有应用范例配备了相应的应用习题. 这些实际应用范例既为学生理解数学的抽象概念提供了认识基础，也有助于加强与后续专业课程的联系.

4. 习题调整方面，除前面提到的补充了不少应用习题外，还在难度梯度上对习题进行了调整，尤其是增补了部分计算比较简单又利于加强概念理解的习题，并重新校订了全部习题及其答案.

中，我们以多媒体动画的形式给出了习题的求解过程和相关方法，利于读者课后学习；在综合训练模块中，我们总结了每章的教学知识点，并通过精选的总习题进一步揭示解题的一般规律和技巧，利于读者综合提高；在系统的交互与集成方面，我们利用多媒体开发软件的网页特性，为系统中的每个文件提供了丰富的知识点交互与导航，利于读者高效率地学习.

四、为所有教师用户提供配套的集成性、交互式与信息资源立体化的多媒体教学系统，该系统同时兼容了 Flash 和 PPT 两类课件，兼顾了共享动画演示和个性化修改功能. 内容模块中包括了多媒体教案、备课系统、习题解答、综合训练、实验教学与实验案例库等；系统功能中包括了长期开发积累的满足专业教学需求的多媒体教学动画演示功能、供教师在教学过程中进行手写板书的手写笔功能、供教师在教学过程中进行知识点交互和数学家介绍的系统导航功能等. 如能配合遥控鼠标与手写板等外接小型设备，则既可以充分发挥信息化集成与交互教学的优势，也能够很好地融入板书教学等个性化特色.

题，目的是帮助你检查对基本算法的理解，在做习题时，你应先尝试独立完成习题，尽量不看答案，便于发现哪些知识自己还没有真正理解. 在今后的工作中，你当然可以使用计算机来完成这些计算，但你必须学会选择算法，理解计算结果的意义并且向他人解释清楚.

从某种意义上说，大学数学就是一门语言——科学的语言. 你必须像对待外语一样，每天都学习它. 为了真正理解教材中某一部分的内容，你往往需要完全掌握前面章节的内容和习题. 跟上课程的进度可以节省很多时间并且避免很多麻烦.

经常登录作者团队倾力为你配套建设的网络学习空间，你将会获得意想不到的收获. 在那里，你可以进一步拓展自己的学习空间，寻找到更多教材之外的学习资源，并与全国的良师益友建立联系.

**致教师**

我们开发的“21 世纪数学教育信息化精品教材”是名副其实的信息化精品系列教材，因为在纸质教材之外，我们从教、学、考三方面为它定制了一系列配套的信息化建设，包括教学课件、备课系统、网络学习空间、网络学习平台、试题库系统、在线考试平台与在线答疑平台等. 如果您和您的学生正在使用或准备使用本系

出的，“一套教材不能构成一门课；教师和学生在一起才能构成一门课”，教材只是支持这门课程的信息资源．教材是死的，课程是活的．课程是教师和学生共同组成的一个相互作用的整体，只有真正做到以学生为中心，处处为学生着想，并充分发挥教师的核心指导作用，才能使之成为富有成效的课程．而本系列教材及其配套的信息化建设将为教学双方提供支持其课程的充分的信息资源，帮助教师在教学过程中发挥其才华，并利于学生富有成效地学习．

与传统的教材不同的是，有一支实力雄厚、专业专职的作者团队——数苑团队在为本系列教材的使用者提供长期的、日常的教学服务与技术支持．如果在使用本系列教材及其配套的信息化建设过程中遇到任何问题，你可以通过下面的邮箱随时与我们联系：math168@vip.188.com.

**编者**

2011 年 6 月 28 日

# 目　录

## 习题答案

# 第1章 行列式

行列式实质上是由一些数值排列成的数表按一定的法则计算得到的一个数. 早在1683年与1693年,日本数学家关孝和与德国数学家莱布尼茨就分别独立地提出了行列式的概念. 以后很长一段时间内,行列式主要应用于对线性方程组的研究. 大约一个半世纪后,行列式逐步发展成为线性代数的一个独立的理论分支. 1750年,瑞士数学家克莱姆在他的论文中提出了利用行列式求解线性方程组的著名法则——克莱姆法则. 随后,1812年,法国数学家柯西发现了行列式在解析几何中的应用,这一发现激起人们对行列式的应用进行探索的浓厚兴趣,这种兴趣前后持续了近100年.

在柯西所处的时代,人们讨论的行列式的阶数通常很小,行列式在解析几何以及数学的其它分支中都扮演着很重要的角色. 如今,由于计算机和计算软件的发展,在常见的高阶行列式计算中,行列式的数值意义已经不大. 但是,行列式公式依然可以给出构成行列式的数表的重要信息. 在线性代数的某些应用中,行列式的知识依然很有用. 特别是在本课程中,它是研究后面的线性方程组、矩阵及向量组的线性相关性的一种重要工具.

## §1.1 二阶与三阶行列式

二阶行列式与三阶行列式的内容在中学课程中已经涉及,本节主要对这些知识进行复习与总结,它们是我们学习和讨论更高阶行列式计算的基础.

### 一、二阶行列式

**定义1** 记号 $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$ 表示代数和 $a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}$,称为**二阶行列式**,即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}.$$

其中数 $a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22}$ 叫做行列式的**元素**,横排叫做**行**,竖排叫做**列**. 元素 $a_{ij}$ 的第一个下标 $i$ 叫做**行标**,表明该元素位于第 $i$ 行,第二个下标 $j$ 叫做**列标**,表明该元素位于第 $j$ 列. 由上述定义可知,二阶行列式是由 4 个数按一定的规律运算所得的

代数和．这个规律性表现在行列式的记号中就是**"对角线法则"**．如图 1−1−1 所示，把 $a_{11}$ 到 $a_{22}$ 的实连线称为**主对角线**，把 $a_{12}$ 到 $a_{21}$ 的虚连线称为**副对角线**，于是，二阶行列式便等于主对角线上两元素之积减去副对角线上两元素之积．

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

**图 1−1−1**

## 二、二元线性方程组

用消元法解二元线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1 & (1.1) \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2 & (1.2) \end{cases}.$$

式 (1.1) $\times a_{22}$ − 式 (1.2) $\times a_{12}$，得

$$(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})x_1 = b_1a_{22} - b_2a_{12}. \tag{1.3}$$

式 (1.2) $\times a_{11}$ − 式(1.1) $\times a_{21}$，得

$$(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})x_2 = b_2a_{11} - b_1a_{21}. \tag{1.4}$$

利用二阶行列式的定义，记

$$D = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix},$$

$$D_1 = b_1a_{22} - b_2a_{12} = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}, \qquad D_2 = b_2a_{11} - b_1a_{21} = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix},$$

则式 (1.3)、式 (1.4) 可改写为

$$\begin{cases} Dx_1 = D_1 \\ Dx_2 = D_2 \end{cases}.$$

于是，在行列式 $D \neq 0$ 的条件下，式 (1.1)、式 (1.2) 有唯一解：

$$x_1 = \frac{D_1}{D}, \qquad x_2 = \frac{D_2}{D}.$$

**注**：从形式上看，这里分母 $D$ 是由式 (1.1)、式 (1.2) 构成的方程组的系数所确定的二阶行列式 (称为**系数行列式**)，$x_1$ 的分子 $D_1$ 是用常数项 $b_1, b_2$ 替换 $D$ 中 $x_1$ 的系数 $a_{11}, a_{21}$ 所得的二阶行列式，$x_2$ 的分子 $D_2$ 是用常数项 $b_1, b_2$ 替换 $D$ 中 $x_2$ 的系数 $a_{12}, a_{22}$ 所得的二阶行列式．本节后面讨论的三元线性方程组亦有类似的规律性．请读者学习时注意比较．

**例 1**　解方程组 $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 = 8 \\ x_1 - 2x_2 = -3 \end{cases}$.

**解**

$$D = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = 2\times(-2) - 3\times 1 = -7,$$

$$D_1=\begin{vmatrix} 8 & 3 \\ -3 & -2 \end{vmatrix}=8\times(-2)-3\times(-3)=-7,\quad D_2=\begin{vmatrix} 2 & 8 \\ 1 & -3 \end{vmatrix}=2\times(-3)-8\times1=-14,$$

因 $D\neq 0$，故题设方程组有唯一解：

$$x_1=\frac{D_1}{D}=\frac{-7}{-7}=1,\qquad x_2=\frac{D_2}{D}=\frac{-14}{-7}=2.$$

■

## 三、三阶行列式

**定义 2** 记号 $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$ 表示代数和

$$a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{13}a_{22}a_{31}-a_{11}a_{23}a_{32}-a_{12}a_{21}a_{33},$$

称为**三阶行列式**，即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}\\ -a_{13}a_{22}a_{31}-a_{11}a_{23}a_{32}-a_{12}a_{21}a_{33}.$$

由上述定义可见，三阶行列式有 6 项，每一项均为不同行不同列的三个元素之积再冠以正负号，其运算的规律性可用“对角线法则”(见图1–1–2) 或“沙路法则”(见图1–1–3) 来表述.

(1) 对角线法则.

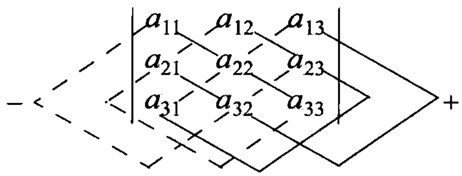


**图 1–1–2**

(2) 沙路法则.

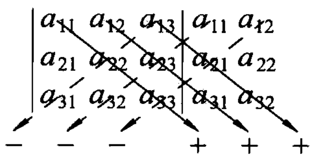


**图 1–1–3**

**例 2** 计算三阶行列式 $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 0 & 5 \\ -1 & 0 & 6 \end{vmatrix}$.

**解** $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 0 & 5 \\ -1 & 0 & 6 \end{vmatrix}=1\times0\times6+2\times5\times(-1)+3\times4\times0$

$$-3\times0\times(-1)-1\times5\times0-2\times4\times6$$

$$=-10-48=-58.$$ ■

**例3** 求解方程 $D=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & x \\ 4 & 9 & x^2 \end{vmatrix}=0.$

**解** 方程左端

$$D=3x^2+4x+18-12-9x-2x^2=x^2-5x+6,$$

由 $x^2-5x+6=0$，解得 $x=2$ 或 $x=3$. ■

## 四、三元线性方程组

类似于二元线性方程组的讨论，对三元线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3=b_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+a_{23}x_3=b_2 \\ a_{31}x_1+a_{32}x_2+a_{33}x_3=b_3 \end{cases},$$

记
$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \qquad D_1=\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix},$$

$$D_2=\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix}, \qquad D_3=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix},$$

若系数行列式 $D\neq 0$，则该方程组有唯一解：

$$x_1=\frac{D_1}{D}, \quad x_2=\frac{D_2}{D}, \quad x_3=\frac{D_3}{D}.$$

**例4** 解三元线性方程组 $\begin{cases} x_1-2x_2+x_3=-2 \\ 2x_1+x_2-3x_3=1 \\ -x_1+x_2-x_3=0 \end{cases}.$

**解** 系数行列式

$$\begin{aligned} D=&\begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & -3 \\ -1 & 1 & -1 \end{vmatrix} \\ =&1\times1\times(-1)+(-2)\times(-3)\times(-1)+1\times2\times1 \\ &-1\times1\times(-1)-1\times(-3)\times1-(-2)\times2\times(-1) \\ =&-5\neq 0, \end{aligned}$$

$$D_1=\begin{vmatrix} -2 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix}=-5, \quad D_2=\begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & -3 \\ -1 & 0 & -1 \end{vmatrix}=-10, \quad D_3=\begin{vmatrix} 1 & -2 & -2 \\ 2 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{vmatrix}=-5,$$

故所求方程组的解为

$$x_1=\frac{D_1}{D}=1,\qquad x_2=\frac{D_2}{D}=2,\qquad x_3=\frac{D_3}{D}=1. \qquad \blacksquare$$

## 习题 1-1

1. 计算下列二阶行列式:

(1) $\begin{vmatrix}1&3\\1&4\end{vmatrix}$; (2) $\begin{vmatrix}2&1\\-1&2\end{vmatrix}$; (3) $\begin{vmatrix}a&b\\a^2&b^2\end{vmatrix}$;

(4) $\begin{vmatrix}x-1&1\\x^2&x^2+x+1\end{vmatrix}$; (5) $\begin{vmatrix}1&\log_b a\\\log_a b&1\end{vmatrix}$.

2. 计算下列三阶行列式:

(1) $\begin{vmatrix}1&2&3\\3&1&2\\2&3&1\end{vmatrix}$; (2) $\begin{vmatrix}1&1&1\\3&1&4\\8&9&5\end{vmatrix}$; (3) $\begin{vmatrix}1&0&-1\\3&5&0\\0&4&1\end{vmatrix}$;

(4) $\begin{vmatrix}a&b&c\\b&c&a\\c&a&b\end{vmatrix}$; (5) $\begin{vmatrix}1&1&1\\a&b&c\\a^2&b^2&c^2\end{vmatrix}$; (6) $\begin{vmatrix}x&y&x+y\\y&x+y&x\\x+y&x&y\end{vmatrix}$.

3. 当 $x$ 取何值时, $\begin{vmatrix}3&1&x\\4&x&0\\1&0&x\end{vmatrix}\neq 0$?

# §1.2 $n$ 阶行列式

从三阶行列式的定义, 我们看到:(1) 三阶行列式共有 $3!=6$ 项; (2) 行列式中的每一项都是取自不同行不同列的三个元素的乘积;(3)行列式中的每一项的符号均与该项元素下标的排列顺序有关. 受此启示, 我们可以引入 $n$ 阶行列式的定义. 此外, 在本节中, 我们还要了解几个今后常用的特殊的 $n$ 阶行列式 (对角行列式与三角形行列式等) 的计算方法.

## 一、排列与逆序

**定义 1** 由自然数 1, 2, $\cdots$, $n$ 组成的不重复的每一种有确定次序的排列, 称为一个 ***n* 级排列** (简称为**排列**).

例如, 1234 和 4312 都是 4 级排列, 而 24315 是一个 5 级排列.

**定义 2** 在一个 $n$ 级排列 $(i_1 i_2\cdots i_t\cdots i_s\cdots i_n)$ 中, 若数 $i_t>i_s$, 则称数 $i_t$ 与 $i_s$ 构成一个**逆序**. 一个 $n$ 级排列中逆序的总数称为该排列的**逆序数**, 记为 $N(i_1 i_2\cdots i_n)$.

根据上述定义，可按如下方法计算排列的逆序数：

设在一个 $n$ 级排列 $i_1 i_2 \cdots i_n$ 中，比 $i_k(k=1,2,\cdots,n)$ 大的且排在 $i_k$ 前面的数共有 $t_k$ 个，则 $i_k$ 的逆序的个数为 $t_k$，而该排列中所有自然数的逆序的个数之和就是这个排列的逆序数. 即

$$N(i_1 i_2 \cdots i_n)=t_1+t_2+\cdots+t_n=\sum_{k=1}^{n} t_k .$$

**例1** 计算排列 32514 的逆序数.

**解** 因为 3 排在首位，故其逆序数为 0；

在 2 前面且比 2 大的数有 1 个，故其逆序的个数为 1；

在 5 前面且比 5 大的数有 0 个，故其逆序的个数为 0；

在 1 前面且比 1 大的数有 3 个，故其逆序的个数为 3；

在 4 前面且比 4 大的数有 1 个，故其逆序的个数为 1.

将上述结果排成如下形式：

$$\begin{array}{cccccc} \text{排列} & 3 & 2 & 5 & 1 & 4 \\ & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ t_k & 0 & 1 & 0 & 3 & 1 \end{array}$$

易见所求排列的逆序数为

$$N(32514)=0+1+0+3+1=5.$$

■

**定义3** 逆序数为奇数的排列称为**奇排列**；逆序数为偶数的排列称为**偶排列**.

**例2** 求排列 $n(n-1)\cdots 321$ 的逆序数，并讨论其奇偶性.

**解** 类似例 1 的讨论，可排出如下形式：

$$\begin{array}{cccccccc} \text{排列} & n & (n-1) & (n-2) & \cdots & 3 & 2 & 1 \\ & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ t_k & 0 & 1 & 2 & \cdots & n-3 & n-2 & n-1 \end{array}$$

则所求逆序数为：

$$N(n(n-1)\cdots 321)=0+1+2+\cdots+(n-1)=\frac{n(n-1)}{2}.$$

易见：当 $n=4k,4k+1$ 时，该排列是偶排列；当 $n=4k+2,4k+3$ 时，该排列是奇排列.

■

## 二、$n$ 阶行列式的定义

观察三阶行列式：

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32} - a_{11}a_{23}a_{32}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{13}a_{22}a_{31}.$$

易见：

(1) 三阶行列式共有 6(=3!) 项；

(2) 每项都是取自不同行不同列的三个元素的乘积;

(3) 每项的符号是：当该项元素的行标按自然数顺序排列后，若对应的列标构成的排列是偶排列则取正号，是奇排列则取负号.

故三阶行列式可定义为:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \sum_{j_1 j_2 j_3} (-1)^{N(j_1 j_2 j_3)} a_{1j_1} a_{2j_2} a_{3j_3}.$$

其中 $\sum\limits_{j_1 j_2 j_3}$ 为对所有三级排列 $j_1 j_2 j_3$ 求和.

**定义 4**　由 $n^2$ 个元素 $a_{ij}\ (i, j = 1, 2, \cdots, n)$ 组成的记号

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

称为 **$n$ 阶行列式**，其中横排称为**行**，竖排称为**列**，它表示所有取自不同行、不同列的 $n$ 个元素乘积 $a_{1j_1} a_{2j_2} \cdots a_{nj_n}$ 的代数和，各项的符号是：当该项各元素的行标按自然数顺序排列后，若对应的列标构成的排列是偶排列则取正号；是奇排列则取负号. 即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{j_1 j_2 \cdots j_n} (-1)^{N(j_1 j_2 \cdots j_n)} a_{1j_1} a_{2j_2} \cdots a_{nj_n}.$$

其中 $\sum\limits_{j_1 j_2 \cdots j_n}$ 表示对所有 $n$ 级排列 $j_1 j_2 \cdots j_n$ 求和. 行列式有时也简记为 $\det(a_{ij})$ 或 $|a_{ij}|$，这里数 $a_{ij}$ 称为行列式的**元素**，称

$$(-1)^{N(j_1 j_2 \cdots j_n)} a_{1j_1} a_{2j_2} \cdots a_{nj_n}$$

为行列式的**一般项**.

**注**：(1) $n$ 阶行列式是 $n!$ 项的代数和，且冠以正号的项和冠以负号的项（不包括元素本身所带的符号）各占一半，因此，行列式实质上是一种特殊定义的数;

(2) $a_{1j_1} a_{2j_2} \cdots a_{nj_n}$ 的符号为 $(-1)^{N(j_1 j_2 \cdots j_n)}$（不包括元素本身所带的符号）;

(3) 一阶行列式 $|a| = a$，不要与绝对值记号相混淆.

**例 3**　计算行列式 $D = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$.

**解**　一般项为 $(-1)^{N(j_1 j_2 j_3 j_4)} a_{1j_1} a_{2j_2} a_{3j_3} a_{4j_4}$，现考察不为零的项. $a_{1j_1}$ 取自第一