



“十二五”应用型本科系列规划教材

微积分 (经济类)

Calculus for Economics and Management



侯亚君 总主编

王宏栋 丁志强 王凯 主 编



机械工业出版社
CHINA MACHINE PRESS



“十二五”应用型本科系列规划教材

微积分（经济类）

总主编 侯亚君

主 编 王宏栋 丁志强 王 凯

参 编 刘立士 马建军 张玉春

机 械 工 业 出 版 社

本书是经济类微积分课程教材, 主要特点是包含了 MATLAB 实验、相关数学历史文化知识介绍和常用经济知识. 全书共分 9 章, 主要内容包括函数的极限与连续、导数与微分、中值定理与导数的应用、不定积分、定积分及其应用、多元函数微分学、二重积分、无穷级数、微分方程和差分方程. 教材注意与中学数学的衔接, 增加了中学数学教材中删去而学习微积分必备的知识点, 如幂函数、和差化积与积化和差公式、反三角函数等. 另外, 除了包含教学基本要求的微积分在经济中的应用问题, 还增加了连续复利、现在值与将来值、供需模型、消费模型等经济管理类专业中的常用知识.

本书适合应用型本科经济类专业使用, 也可作为相关领域的参考书.

图书在版编目 (CIP) 数据

微积分: 经济类/侯亚君主编; 王宏栋, 丁志强, 王凯分册主编. —北京: 机械工业出版社, 2011. 8

“十二五”应用型本科系列规划教材

ISBN 978-7-111-34583-1

I. ①微… II. ①侯…②王…③丁…④王… III. ①微积分 - 高等学校 - 教材 IV. ①O172

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2011) 第 143204 号

机械工业出版社 (北京市百万庄大街 22 号 邮政编码 100037)

策划编辑: 韩效杰 责任编辑: 韩效杰 昔玉花

版式设计: 霍永明 责任校对: 张 媛 李秋荣

封面设计: 路恩中 责任印制: 李 研

北京振兴源印务有限公司印刷

2011 年 9 月第 1 版第 1 次印刷

184mm × 240mm · 26.5 印张 · 517 千字

标准书号: ISBN 978-7-111-34583-1

定价: 39.80 元

凡购本书, 如有缺页、倒页、脱页, 由本社发行部调换

电话服务

网络服务

社服务中心: (010) 88361066

门户网: <http://www.cmpbook.com>

销 售 一 部: (010) 68326294

教材网: <http://www.cmpedu.com>

销 售 二 部: (010) 88379649

读者购书热线: (010) 88379203 封面无防伪标均为盗版

前 言

本套数学基础课教学改革教材包括《线性代数》、《概率论与数理统计》、《微积分（经济类）》三种，改革思路一致，体例统一，风格相似。

目前在数学基础课教学中采用的教材里，纯粹的数学问题多，应用问题少；抽象、经典的内容多，直观、现代的内容少，造成了教材和教学目标有偏差。为了改善这种状况，我们组织编写了这套教学改革教材。

本套教材试图尝试针对专业需求、注重直观和学生亲身实践的思路，强调教材的针对性、实用性和趣味性。内容安排上，遵循“量力”和“循序渐近”的原则。概念的引入力求朴实、简明和自然，尽可能从简单问题引入。定理的证明尽可能做到严谨，但强调理论证明与直观说明并重，突出数学的思想和方法。数学应用方面，强调与专业知识相结合，与计算机手段相结合。本套教材的主要特色是：

一、把数学软件 MATLAB 引入教材。在实践中，数学问题的解决往往要借助计算机，为了使學生既能通过计算机编程来亲身体验数学知识，又不至于被繁琐的程序编写羁绊，我们选择了数学编程简单而高效的 MATLAB 作为计算机手段引入课堂教学。为了使学生对 MATLAB 的使用有个初步的了解，同时加强对相关知识的理解和运用，教材在每章后面都加入了数学实验的内容，要求学生以 MATLAB 为工具完成数学实验。这部分内容可根据学时决定是安排在正常课堂教学内，还是另外安排时间或者课后练习。

二、引入知识纵横，加强数学教材的趣味性。每章后我们加入“知识纵横”，内容丰富而灵活，既有数学简史，又有相关内容的延伸，还有数学家小传等。这些内容为學生课外阅读提供一种引导，旨在调动学生对数学知识背后的历史和文化的兴趣，促使學生主动阅读其他的相关文献。

本书是《微积分（经济类）》，全书共分 9 章，主要内容包括函数的极限与连续、导数与微分、中值定理与导数的应用、不定积分、定积分及其应用、多元函数微分学、二重积分、无穷级数、微分方程和差分方程。教材注意与中学数学的衔接，增加了中学数学教材中删去而学习微积分必备的知识点，如幂函数、和差化积与积化和差公式、反三角函数等。另外教材特别注重微积分在经济与管理领域中的应用，除了包含教学基本要求中的微积分在经济中的应用问题，还增加了连续复利、现在值与将来值、供需模型、消费模型等经济管理类专业中的常用知识。书中加“*”号的内容，任课教师可酌情选用。

本书第 1, 2, 3 章由丁志强组织编写，第 4, 5, 6, 7 章由王宏栋组织编写，第 8, 9 章由王凯组织编写。

由于编者水平有限，加上时间比较仓促，书中难免存在不足之处，希望专家、同行及读者批评指正。

编者

目 录

前言

第 1 章 函数 极限与连续	1
1.1 函数	1
1.1.1 区间	1
1.1.2 函数概念	2
1.1.3 反函数与复合函数	5
1.1.4 初等函数	7
1.1.5 函数的几种特性	12
习题 1.1	14
1.2 数列的极限	15
1.2.1 数列的概念	15
1.2.2 数列极限的概念	16
1.2.3 数列极限的性质	18
习题 1.2	20
1.3 函数的极限	20
1.3.1 自变量趋于无穷时函数 的极限	20
1.3.2 自变量趋于有限值时函 数的极限	21
1.3.3 函数极限的性质	24
习题 1.3	25
1.4 无穷小与无穷大	25
1.4.1 无穷小量	25
1.4.2 无穷大量	27
习题 1.4	28
1.5 极限运算法则	29
习题 1.5	32
1.6 极限存在准则及两个重要 极限	33
1.6.1 准则 I 和第一个重要	

极限	33
1.6.2 准则 II 和第二个重要 极限	36
1.6.3 极限在经济中的应用	38
习题 1.6	41
1.7 无穷小的比较	42
习题 1.7	45
1.8 函数的连续性	45
1.8.1 连续函数的概念	45
1.8.2 函数的间断点	47
1.8.3 初等函数的连续性	48
1.8.4 闭区间上连续函数的 性质	50
习题 1.8	51
知识纵横 极限法的哲学思考	51
数学实验 1	55
1. MATLAB 简介	55
2. 曲线绘图	56
3. 求极限的 MATLAB 命令	59
练习	62
总习题 1	63
第 2 章 导数与微分	66
2.1 导数的概念	66
2.1.1 引例	66
2.1.2 导数的定义	68
2.1.3 求导数举例	70
2.1.4 导数的几何意义	71
2.1.5 函数的可导性与连续性 之间的关系	72
习题 2.1	73



2.2 求导法则与基本初等函数的求导公式	74
2.2.1 函数的和、差、积、商的求导法则	74
2.2.2 反函数的求导法则	77
2.2.3 复合函数的求导法则	79
2.2.4 求导法则与导数公式	80
习题 2.2	82
2.3 高阶导数	83
习题 2.3	86
2.4 隐函数的导数	86
习题 2.4	88
2.5 函数的微分	89
2.5.1 微分的定义	89
2.5.2 微分的几何意义	91
2.5.3 基本初等函数的微分公式与微分运算法则	92
习题 2.5	94
知识纵横 微分和导数符号的历史	95
数学实验 2 求函数的导数和微分	97
练习	98
总习题 2	98
第 3 章 中值定理与导数的应用	101
3.1 中值定理	101
3.1.1 罗尔定理	101
3.1.2 拉格朗日中值定理	103
3.1.3 柯西中值定理	105
习题 3.1	106
3.2 洛必达法则	106
习题 3.2	111
3.3 泰勒 (Taylor) 公式	111
3.3.1 带有佩亚诺型余项的泰勒公式	111
3.3.2 带有拉格朗日型余项的泰勒公式	115
3.3.3 泰勒公式在近似计算上的应用	117
习题 3.3	118
3.4 函数的单调性	118
习题 3.4	121
3.5 函数的极值和最值	121
3.5.1 函数的极值	121
3.5.2 函数的最大值、最小值	124
习题 3.5	126
3.6 曲线的凹凸性与拐点	127
习题 3.6	130
3.7 函数图像的描绘	131
3.7.1 曲线的渐近线	131
3.7.2 函数图像的描绘	132
习题 3.7	135
3.8 导数在经济中的应用	135
3.8.1 经济中常用的一些函数	135
3.8.2 边际分析	138
3.8.3 弹性分析	140
习题 3.8	144
知识纵横 微分中值定理的历史与发展	146
数学实验 3 导数的应用	149
练习	151
总习题 3	151
第 4 章 不定积分	153
4.1 不定积分的概念与性质	153
4.1.1 原函数与不定积分的概念	153
4.1.2 不定积分的性质	156
4.1.3 基本积分公式	157



微积分 (经济类)

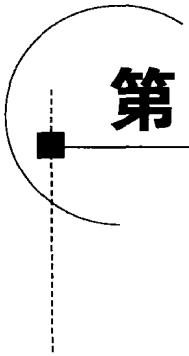
习题 4.1	159	5.4.1 无穷区间上的反常 积分	203
4.2 换元积分法	160	5.4.2 无界函数的反常积分	205
4.2.1 第一类换元法	160	5.4.3 Γ 函数	207
4.2.2 第二类换元法	165	习题 5.4	208
习题 4.2	169	5.5 定积分在几何上的应用	209
4.3 分部积分法	170	5.5.1 微元法	209
习题 4.3	174	5.5.2 平面图形的面积	210
4.4 有理函数的不定积分	175	5.5.3 立体的体积	213
4.4.1 有理函数的不定积分	175	习题 5.5	217
4.4.2 三角函数有理式的不定 积分	178	5.6 定积分在经济上的应用	218
习题 4.4	179	5.6.1 已知边际函数求总 函数	218
知识纵横 积分符号的由来	180	5.6.2 收益流的现值和将 来值	219
数学实验 4 求不定积分	181	习题 5.6	220
练习	182	知识纵横 微积分的创立	221
总习题 4	182	数学实验 5 求定积分	223
第 5 章 定积分及其应用	185	练习	224
5.1 定积分的概念及性质	185	总习题 5	225
5.1.1 曲边梯形的面积	185	第 6 章 多元函数微分学	227
5.1.2 变速直线运动的路程	186	6.1 空间解析几何简介	227
5.1.3 定积分的概念	187	6.1.1 空间直角坐标系	227
5.1.4 定积分的几何意义	188	6.1.2 空间两点间的距离	229
5.1.5 定积分的性质	189	6.1.3 空间曲面及其方程	230
习题 5.1	192	习题 6.1	235
5.2 微积分基本定理	193	6.2 多元函数的基本概念	236
5.2.1 积分上限的函数及其 导数	193	6.2.1 平面区域	236
5.2.2 牛顿-莱布尼茨公式	195	6.2.2 多元函数的概念	237
习题 5.2	196	6.2.3 二元函数的极限	239
5.3 定积分的换元积分法和分部 积分法	197	6.2.4 二元函数的连续性	240
5.3.1 定积分的换元积分法	197	习题 6.2	241
5.3.2 定积分的分部积分法	200	6.3 偏导数	242
习题 5.3	202	6.3.1 偏导数	242
5.4 反常积分	203	6.3.2 高阶偏导数	246



习题 6.3	247	积分	293
6.4 全微分	248	习题 7.2	298
6.4.1 全微分的概念	248	知识纵横 二重积分的换元法	300
6.4.2 全微分在近似计算中 的应用	251	数学实验 7 二重积分的计算	302
习题 6.4	252	练习	303
6.5 多元复合函数的微分法	252	总习题 7	303
6.5.1 多元复合函数的偏 导数	252	第 8 章 无穷级数	306
6.5.2 全微分的形式不变性	258	8.1 常数项级数的概念和性质	306
习题 6.5	259	8.1.1 常数项级数的概念	306
6.6 隐函数的微分法	260	8.1.2 无穷级数的基本性质	310
习题 6.6	262	习题 8.1	312
6.7 多元函数的极值	263	8.2 正项级数	312
6.7.1 多元函数的极值及最大 值、最小值	263	习题 8.2	318
6.7.2 条件极值	266	8.3 任意项级数	319
习题 6.7	269	8.3.1 交错级数	319
知识纵横 偏导数符号的由来	270	8.3.2 绝对收敛与条件收敛	321
数学实验 6	271	习题 8.3	323
1. 二元函数图像的绘制	271	8.4 幂级数	324
2. 求多元函数的偏导数和极 值	276	8.4.1 函数项级数的概念	324
练习	280	8.4.2 幂级数及其收敛域	325
总习题 6	280	8.4.3 幂级数的运算	328
第 7 章 二重积分	283	习题 8.4	330
7.1 二重积分的概念及性质	283	8.5 函数展开成幂级数	330
7.1.1 曲顶柱体的体积	283	8.5.1 泰勒级数	330
7.1.2 二重积分的定义	284	8.5.2 函数展开成幂级数	332
7.1.3 二重积分的性质	285	习题 8.5	337
习题 7.1	286	知识纵横 有趣的几何级数	338
7.2 二重积分的计算方法	287	数学实验 8 函数的泰勒展开与 求级数的和	340
7.2.1 利用直角坐标计算二重 积分	287	练习	341
7.2.2 利用极坐标计算二重		总习题 8	342
		第 9 章 微分方程和差分方程	345
		9.1 微分方程的基本概念	345
		习题 9.1	348
		9.2 一阶微分方程	349



9.2.1 可分离变量的微分方程	349	习题 9.5	374
9.2.2 齐次方程	350	9.6 差分及差分方程的基本概念	374
9.2.3 一阶线性微分方程	352	9.6.1 差分的概念	374
*9.2.4 伯努利方程	355	9.6.2 差分方程的基本概念	376
习题 9.2	356	习题 9.6	377
*9.3 可降阶的二阶微分方程	357	9.7 一阶常系数线性差分方程	377
9.3.1 $y'' = f(x)$ 型的微分方程	357	9.7.1 一阶常系数齐次线性差分方程的解法	377
9.3.2 $y'' = f(x, y')$ 型的微分方程	358	9.7.2 一阶常系数非齐次线性差分方程的解法	378
9.3.3 $y'' = f(y, y')$ 型的微分方程	359	习题 9.7	379
习题 9.3	360	9.8 差分方程在经济中的应用	380
9.4 二阶常系数线性微分方程	360	习题 9.8	382
9.4.1 二阶常系数线性微分方程的解的结构	360	知识纵横 一阶常微分方程的发展简史及应用	383
9.4.2 二阶常系数齐次线性微分方程的解法	363	数学实验 9 求解微分方程	385
9.4.3 二阶常系数非齐次线性微分方程的解法	365	练习	386
习题 9.4	370	总习题 9	386
9.5 微分方程在经济中的应用	370	部分习题答案与提示	389
		参考文献	416



第 1 章

函数 极限与连续

创立于 17 世纪的微积分, 是数学发展史上的里程碑, 是大学数学基础课程的主要内容. 函数是微积分的主要研究对象, 极限是学习微积分的理论基础, 连续是函数的重要性质之一. 本章将在复习和加深函数有关知识的基础上, 介绍函数的极限、函数的连续性的概念以及它们的一些性质.

1.1 函数

1.1.1 区间

1. 区间

设 a 和 b 都是实数, 且 $a < b$, 则称数集 $\{x \mid a < x < b\}$ 为开区间, 记为 (a, b) , 即

$$(a, b) = \{x \mid a < x < b\}.$$

类似地, 有

$$[a, b] = \{x \mid a \leq x \leq b\}$$

称为闭区间,

$$[a, b) = \{x \mid a \leq x < b\}, (a, b] = \{x \mid a < x \leq b\}$$

称为半开区间.

其中 a 和 b 称为上述区间的端点, $b - a$ 称为区间的长度. 以上这些区间称为有限区间.

$[a, +\infty) = \{x \mid x \geq a\}, (-\infty, b) = \{x \mid x < b\}, (-\infty, +\infty) = \{x \mid -\infty < x < +\infty\}$ 称为无限区间.



以后在不需要辨明所讨论的区间是否包含端点, 以及是有限区间还是无限区间时, 我们简单地称它为“区间”, 且用 I 表示.

2. 邻域

以点 x_0 为中心的任何开区间称为点 x_0 的邻域, 记作 $U(x_0)$.

设 $\delta > 0$, 称开区间 $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ 为点 x_0 的 δ 邻域, 记作 $U(x_0, \delta)$, 即

$$\begin{aligned} U(x_0, \delta) &= \{x \mid x_0 - \delta < x < x_0 + \delta\} \\ &= \{x \mid |x - x_0| < \delta\}. \end{aligned}$$

其中点 x_0 称为邻域的中心, δ 称为邻域的半径.

开区间 $(x_0 - \delta, x_0) \cup (x_0, x_0 + \delta)$ 称为点 x_0 的去心 δ 邻域, 记作 $\dot{U}(x_0, \delta)$, 即

$$\begin{aligned} \dot{U}(x_0, \delta) &= \{x \mid x_0 - \delta < x < x_0 \text{ 或 } x_0 < x < x_0 + \delta\} \\ &= \{x \mid 0 < |x - x_0| < \delta\}. \end{aligned}$$

开区间 $(x_0 - \delta, x_0)$ 称为点 x_0 的左 δ 邻域, 开区间 $(x_0, x_0 + \delta)$ 称为点 x_0 的右 δ 邻域.

1.1.2 函数概念

1. 函数的定义

定义 1-1 设 x 和 y 是两个变量, D 是一个非空数集. 如果按照某个对应法则 f , 使得对于每一个 $x \in D$, 都有唯一确定的 y 值与之对应, 则称这个对应法则 f 为定义在 D 上的函数, 记作

$$y = f(x), \quad x \in D.$$

其中, x 称为自变量, y 称为因变量, D 称为定义域, 记作 $D(f)$.

在函数定义中, 对于每一个 $x \in D$, 按照对应法则 f , 总有唯一确定的 y 值与之对应, 则这个 y 值称为函数 f 在 x 处的函数值, 记作 $f(x)$, 即 $y = f(x)$. 因变量 y 与自变量 x 之间的这种依赖关系通常称为函数关系, 习惯上称因变量 y 是自变量 x 的函数. 当自变量 x 取遍定义域 D 中的值时, 相应的函数值 $f(x)$ 的全体所构成的集合称为函数的值域, 记作 $f(D)$ 或 $R(f)$, 即

$$f(D) = \{y \mid y = f(x), x \in D\}.$$

由函数定义可知, 定义域和对应法则是函数概念的两要素. 如果两个函数的定义域与对应法则都相同, 那么这两个函数就是同一个函数, 并且与自变量和因变量用什么字母表示无关.

函数的定义域通常按以下两种情形来确定: 一种是对有实际背景的

函数, 根据实际背景中变量的实际意义确定. 例如, 边长为 x 的正方形的面积 $A = x^2$ 的定义域为 $(0, +\infty)$; 另一种是用算式表达的函数, 通常约定这种函数的定义域是使得算式有意义的一切实数组成的集合. 例如, 函数 $y = \ln(x+1)$ 的定义域是开区间 $(-1, +\infty)$. 函数的定义域通常用区间或不等式表示.

在函数的定义中, 对每个 $x \in D$, 只有唯一的 y 值与之对应, 这样定义的函数称为单值函数, 否则称为多值函数. 如函数 $y^2 = x$, 对于每个 $x \in (0, +\infty)$, 都有两个 y 值与之对应, 所以该函数为多值函数. 对于多值函数, 往往只要附加一些条件, 就可以将它化为单值函数进行讨论.

例 1-1 求函数 $y = \sqrt{4-x^2} + \frac{1}{\ln(x-1)}$ 的定义域.

解 要使函数有意义, x 必须同时满足: $4-x^2 \geq 0$, $x-1 > 0$, $x-1 \neq 1$. 解得函数的定义域为 $(1, 2)$.

例 1-2 设 $f(x-1) = x^2 + 1$, 求 $f(x)$, $f(1)$.

解 令 $x-1=t$, 则 $x=t+1$. 于是

$$f(t) = (t+1)^2 + 1 = t^2 + 2t + 2.$$

所以 $f(x) = x^2 + 2x + 2$, $f(1) = 5$.

2. 分段函数

有些函数在自变量的不同取值范围内, 其对应法则是用不同的式子来表示的, 这种函数就称为分段函数. 如函数 $f(x) = \begin{cases} \sqrt{x}, & 0 \leq x \leq 1, \\ 2-x, & x > 1 \end{cases}$ 是一个定义在区间 $[0, +\infty)$ 上的分段

函数, $f(\frac{1}{4}) = \frac{1}{2}$, $f(2) = 0$. 应当注意, 不论用几个式子表示的分段函数都是一个函数, 而不是几个函数. 下面举几个特殊的分段函数的例子.

例 1-3 绝对值函数 $y = |x| = \begin{cases} x, & x \geq 0, \\ -x, & x < 0, \end{cases}$ 其定义域为 $D = (-\infty, +\infty)$, 值域为 $W = [0, +\infty)$, 其图像如图 1-1 所示.

例 1-4 符号函数 $y = \operatorname{sgn} x = \begin{cases} 1, & x > 0, \\ 0, & x = 0, \\ -1, & x < 0, \end{cases}$ 其定义域为 $D = (-\infty, +\infty)$, 值域为 $W = \{-1, 0, 1\}$, 其图像如图 1-2 所示.

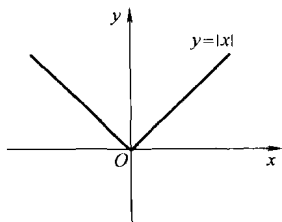


图 1-1

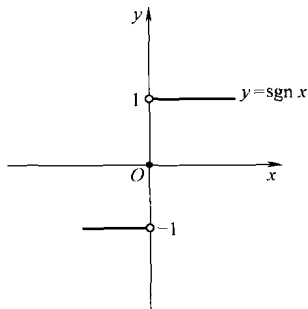


图 1-2

例 1-5 取整函数 $y = [x]$, 其中 $[x]$ 表示不超过 x 的最大整数. 如 $[\frac{5}{7}] = 0$, $[\sqrt{2}] = 1$, $[\pi] = 3$, $[-1] = -1$, $[-3.5] = -4$. 其定义域为 $D = (-\infty, +\infty)$, 值域为 $W = \mathbf{Z}$ (所有整数), 其图像如图 1-3 所示.

例 1-6 狄利克雷 (Dirichlet) 函数

$$D(x) = \begin{cases} 1, & x \text{ 为有理数时,} \\ 0, & x \text{ 为无理数时,} \end{cases}$$

它的定义域是 $D = (-\infty, +\infty)$, 值域是 $W = \{0, 1\}$.

3. 建立函数关系举例

利用相关的数学知识解决实际问题时, 首先需要将实际问题转化为数学问题, 建立函数关系式, 然后才能进行分析和计算. 因此, 在实际应用中, 建立函数关系式是十分重要的.

例 1-7 要建一个容积为 V 的长方体水池, 它的底为正方形. 若池底与侧面的单位面积造价比为 2:1, 试建立总造价与底面边长之间的函数关系.

解 设水池的底面边长为 x , 总造价为 y , 侧面的单位面积造价为 a , 则由已知可得水池的高为 $\frac{V}{x^2}$, 从而得

$$y = 2ax^2 + 4a \cdot \frac{V}{x} \quad (0 < x < +\infty).$$

例 1-8 某市出租车按如下规定收费: 当行驶里程不超过 3 公里时, 一律收起步费 8 元; 当行驶里程超过 3 公里时, 除起步费外, 超出部分按每 600 米 1 元计费. 试建立车费 y 元与行驶里程 x 公里之间的函数

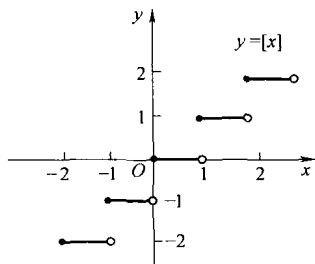


图 1-3

关系.

解 根据题意可列出函数关系如下:

$$y = \begin{cases} 8, & 0 < x \leq 3, \\ 8 + \frac{5}{3}(x-3), & x > 3, \end{cases} \quad \text{即 } y = \begin{cases} 8, & 0 < x \leq 3, \\ \frac{5}{3}x + 3, & x > 3. \end{cases}$$

1.1.3 反函数与复合函数

1. 反函数

在圆的面积公式

$$S = \pi R^2$$

中, R 是自变量, S 是因变量, 表示圆的面积随半径的变化而变化. 事实上, 半径 R 与面积 S 同时发生变化, 很难说哪个先变、哪个后变, 因此没有理由一定要把 R 取作自变量, 也可以把面积 S 取作自变量, 这时半径 R 就是面积 S 的函数

$$R = \sqrt{\frac{S}{\pi}}.$$

这个函数就称为原来面积函数的反函数.

一般地, 设函数 $y = f(x)$ 的定义域为 D , 值域为 $f(D)$. 如果对每一个 $y \in f(D)$, 都有唯一确定且满足 $y = f(x)$ 的 $x \in D$ 与之对应, 则按此对应法则就得到一个定义在 $f(D)$ 上的函数, 这个函数称为函数 f 的**反函数**, 记作

$$x = f^{-1}(y), y \in f(D).$$

由于习惯上用 x 表示自变量, y 表示因变量, 所以函数 $y = f(x)$, $x \in D$ 的反函数通常记成

$$y = f^{-1}(x), x \in f(D).$$

相对于反函数 $y = f^{-1}(x)$ 来说, 原来的函数 $y = f(x)$ 称为**直接函数**. 由定义可知, 反函数 $y = f^{-1}(x)$ 的定义域和值域分别是其直接函数 $y = f(x)$ 的值域和定义域. 如果把函数 $y = f(x)$ 和它的反函数 $y = f^{-1}(x)$ 的图像画在同一坐标平面上, 那么这两个函数的图像是关于直线 $y = x$ 对称的.

一般地, 若函数 $y = f(x)$ 是区间 I 上的单调函数, 则它的反函数 $y = f^{-1}(x)$ 必定存在, 并且反函数与其直接函数具有相同的单调性.

例如, 函数 $y = \sin x \left(-\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2} \right)$ 的反函数为

$$y = \arcsin x (-1 \leq x \leq 1),$$



且都是单调增加的; 函数 $y = x^2$ 在区间 $(-\infty, 0)$ 内的反函数为 $y = -\sqrt{x}$ ($0 < x < +\infty$), 且都是单调减少的.

2. 复合函数

例如函数

$$y = \sin x^2$$

可以看成是函数 $y = \sin u$, $u = x^2$ 的复合, 函数 $y = \sin x^2$ 就称为 $y = \sin u$, $u = x^2$ 的复合函数. 一般有如下定义.

设 $y = f(u)$, $u \in E$, $u = g(x)$, $x \in D$, 若 $D(f) \cap R(g) \neq \emptyset$, 则 y 通过 u 构成 x 的函数, 称为 $y = f(u)$ 和 $u = g(x)$ 构成的复合函数, 记作 $y = f[g(x)]$, u 称为中间变量.

例如, $y = \sqrt{u}$ 的定义域为 $[0, +\infty)$, $u = g(x) = 1 + x^2$ 的定义域为 $D = (-\infty, +\infty)$, 且 $g(D) = [1, +\infty) \subset [0, +\infty)$, 所以 $y = \sqrt{u}$ 和 $u = 1 + x^2$ 能构成复合函数 $y = \sqrt{1 + x^2}$, 它的定义域为 $D = (-\infty, +\infty)$. 又如, $y = f(u) = \arcsin u$ 的定义域为 $[-1, 1]$, $u = g(x) = 2\sqrt{1 - x^2}$ 的定义域为 $[-1, 1]$, 且 $g(D) = [0, 2] \cap [-1, 1] \neq \emptyset$, 则 $y = \arcsin u$ 与 $u = 2\sqrt{1 - x^2}$ 能构成复合函数 $y = \arcsin 2\sqrt{1 - x^2}$, 它的定义域为 $D = \left[-1, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right] \cup \left[\frac{\sqrt{3}}{2}, 1\right]$. 由此例也可看出, 复合函数中间变量 $u = g(x)$ 的定义域不一定是复合函数本身的定义域.

在进行函数复合时, 要注意不是任何两个函数都可以复合成一个复合函数的. 如函数 $y = \arcsin u$ 和函数 $u = 2 + x^2$ 就不能构成复合函数, 这是因为对任一 $x \in (-\infty, +\infty)$, $u = 2 + x^2 \geq 2$ 均不在 $y = \arcsin u$ 的定义域 $[-1, 1]$ 内. 另外, 复合函数的中间变量可以是两个或两个以上. 如 $y = \sqrt{u}$, $u = \cot v$, $v = \frac{x}{2}$ 构成的复合函数为 $y = \sqrt{\cot \frac{x}{2}}$, 其中 u 和 v 是中间变量.

对于复合函数, 既要会把几个简单函数复合成一个复合函数, 又要会把一个复合函数分拆成几个简单函数.

例 1-9 下列函数是由哪些函数复合而成的?

(1) $y = \sin^2 x$; (2) $y = \sqrt{1 - x^2}$;

(3) $y = e^{\frac{1}{x}}$; (4) $y = \cos [\ln (x - 1)]$.

解 (1) $y = u^2$, $u = \sin x$;

(2) $y = \sqrt{u}$, $u = 1 - x^2$;

$$(3) y = e^u, u = \frac{1}{x};$$

$$(4) y = \cos u, u = \ln v, v = x - 1.$$

1.1.4 初等函数

1. 基本初等函数

我们中学学过的幂函数 $y = x^\mu$ ($\mu \in \mathbf{R}$ 是常数); 指数函数 $y = a^x$ ($a > 0$ 且 $a \neq 1$); 对数函数 $y = \log_a x$ ($a > 0$ 且 $a \neq 1$); 三角函数 $y = \sin x, y = \cos x, y = \tan x, y = \cot x$; 反三角函数 $y = \arcsin x, y = \arccos x, y = \arctan x, y = \operatorname{arccot} x$ 统称为基本初等函数. 为了今后学习和查阅方便, 现将基本初等函数的定义域、图像和特性列举如下:

(1) 幂函数 底数为自变量的函数 $y = x^\mu$ 称为幂函数. 它的定义域根据指数 μ 才能确定. 例如

$$y = x^n \quad (n \text{ 为正整数}), \text{ 定义域为 } (-\infty, +\infty);$$

$$y = x^{-n} \quad (n \text{ 为正整数}), \text{ 定义域为 } (-\infty, 0) \cup (0, +\infty);$$

$$y = x^{\frac{2}{3}}, \text{ 定义域为 } (-\infty, +\infty);$$

$$y = x^{-\frac{3}{2}}, \text{ 定义域为 } (0, +\infty).$$

一般情形下, 都假定幂函数 $y = x^\mu$ 中的 $x > 0$.

(2) 指数函数 幂指数为自变量的函数 $y = a^x$ ($a > 0$ 且 $a \neq 1$) 称为指数函数. 它的定义域为 $(-\infty, +\infty)$ (图 1-4).

当 $a > 1$ 时, $y = a^x$ 是增函数; 当 $0 < a < 1$ 时, $y = a^x$ 是减函数.

根据幂的基本性质, 指数函数 $y = a^x$ 具有性质: $a^{x_1} a^{x_2} = a^{x_1 + x_2}$ (加法定理).

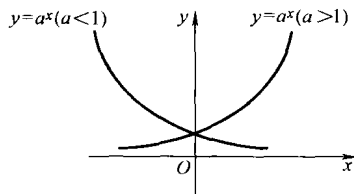


图 1-4

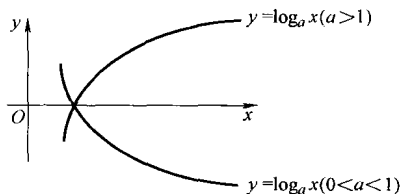


图 1-5

(3) 对数函数 因为指数函数 $y = a^x$ 是增函数 (当 $a > 1$ 时) 或减函数 (当 $0 < a < 1$ 时) (图 1-4), 所以它有反函数, 记成

$$x = \log_a y \quad (0 < y < +\infty).$$

或者把 x 与 y 对调位置后为

$$y = \log_a x \quad (0 < x < +\infty) \quad (\text{图 1-5}).$$



称函数 $y = \log_a x$ ($a > 0$ 且 $a \neq 1$) 为对数函数, 它的定义域为 $(0, +\infty)$.

根据定义, 有对数恒等式

$$x = a^{\log_a x} (x > 0) \text{ 和 } x = \log_a a^x (-\infty < x < +\infty).$$

而根据对数的定义和幂的基本性质, 则有下列的结论:

- ① $\log_a x_1 = \log_a x_2 \Rightarrow x_1 = x_2$;
- ② $\log_a |x_1 x_2| = \log_a |x_1| + \log_a |x_2|$;
- ③ $\log_a \left| \frac{x_1}{x_2} \right| = \log_a |x_1| - \log_a |x_2|$;
- ④ $\log_a 1 = 0, \log_a a = 1, \log_a x = -\log_a \frac{1}{x}$;
- ⑤ $\log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a}$ (换底公式).

(4) 三角函数与反三角函数

测量角的大小时, 首先要确定一个单位. 例如, 取直角的 $1/90$ (称为度), 或取圆弧长等于半径时的圆心角 (称为弧度) 作为测量角的单位. 若不特别声明, 今后就采用弧度作为测量角的单位. “角”的概念需要推广如下: 第一, 不仅有锐角或钝角, 而且也有大于平角或周角的角; 即有任意大小的角; 第二, 角也有相反的两个方向, 即正角和负角.

1) 任意角的三角函数的定义 如图 1-6 所示, 用 r 表示点 $M(x, y)$ 到原点 O 的距离, 则比值 $\frac{y}{r}, \frac{x}{r}, \frac{y}{x}, \frac{x}{y}, \frac{r}{x}, \frac{r}{y}$ 仅由角 $\angle AOM = \theta$ 的大小所决定 (相似三角形对应边成比例), 与 r 的大小无关. 因此, 我们不妨取 $r = 1$ (图 1-7).

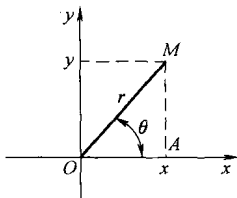


图 1-6

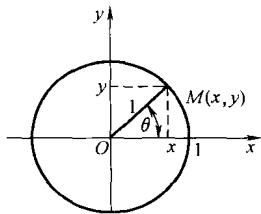


图 1-7

现在, 把 θ ($-\infty < \theta < +\infty$) 看做自变量, 就可以定义六个 (简单) 三角函数:

正弦函数 $\sin \theta = y$ ($-\infty < \theta < +\infty$);

余弦函数 $\cos \theta = x$ ($-\infty < \theta < +\infty$);

正切函数 $\tan \theta = \frac{y}{x} \left(\theta \neq k\pi + \frac{\pi}{2}; k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \right)$;