"十二五"应用型本科系列规划教材

微积分（经济类）

Calculus for Economics and Management

侯亚君　总主编
王宏栋　丁志强　王凯　主　编

机械工业出版社
CHINA MACHINE PRESS

"十二五"应用型本科系列规划教材

微积分（经济类）

总主编　侯亚君
主　编　王宏栋　丁志强　王　凯
参　编　刘立士　马建军　张玉春

机械工业出版社

本书是经济类微积分课程教材，主要特点是包含了 MATLAB 实验、相关数学历史文化知识介绍和常用经济知识．全书共分 9 章，主要内容包括函数的极限与连续、导数与微分、中值定理与导数的应用、不定积分、定积分及其应用、多元函数微分学、二重积分、无穷级数、微分方程和差分方程．教材注意与中学数学的衔接，增加了中学数学教材中删去而学习微积分必备的知识点，如幂函数、和差化积与积化和差公式、反三角函数等．另外，除了包含教学基本要求的微积分在经济中的应用问题，还增加了连续复利、现在值与将来值、供需模型、消费模型等经济管理类专业中的常用知识．

本书适合应用型本科经济类专业使用，也可作为相关领域的参考书．

图书在版编目（CIP）数据

微积分：经济类/侯亚君主编；王宏栋，丁志强，王凯分册主编．—北京：机械工业出版社，2011.8

“十二五”应用型本科系列规划教材

ISBN 978-7-111-34583-1

Ⅰ.①微… Ⅱ.①侯…②王…③丁…④王… Ⅲ.①微积分-高等学校-教材 Ⅳ.①O172

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2011）第 143204 号

机械工业出版社（北京市百万庄大街 22 号 邮政编码 100037）
策划编辑：韩效杰 责任编辑：韩效杰 昔玉花
版式设计：霍永明 责任校对：张 媛 李秋荣
封面设计：路恩中 责任印制：李 研
北京振兴源印务有限公司印刷
2011 年 9 月第 1 版第 1 次印刷
184mm × 240mm · 26.5 印张 · 517 千字
标准书号：ISBN 978-7-111-34583-1
定价：39.80 元

凡购本书，如有缺页、倒页、脱页，由本社发行部调换

电话服务
社服务中心：（010）88361066
销售一部：（010）68326294
销售二部：（010）88379649
读者购书热线：（010）88379203

网络服务
门户网：http://www.cmpbook.com
教材网：http://www.cmpedu.com

前　　言

本套数学基础课教学改革教材包括《线性代数》、《概率论与数理统计》、《微积分（经济类)》三种，改革思路一致，体例统一，风格相似.

目前在数学基础课教学中采用的教材里，纯粹的数学问题多，应用问题少；抽象、经典的内容多，直观、现代的内容少，造成了教材和教学目标有偏差．为了改善这种状况，我们组织编写了这套教学改革教材.

本套教材试图尝试针对专业需求、注重直观和学生亲身实践的思路，强调教材的针对性、实用性和趣味性．内容安排上，遵循“量力”和“循序渐近”的原则．概念的引入力求朴实、简明和自然，尽可能从简单问题引入．定理的证明尽可能做到严谨，但强调理论证明与直观说明并重，突出数学的思想和方法．数学应用方面，强调与专业知识相结合，与计算机手段相结合．本套教材的主要特色是：

一、把数学软件 MATLAB 引入教材．在实践中，数学问题的解决往往要借助计算机，为了使学生既能通过计算机编程来亲身体验数学知识，又不至于被繁琐的程序编写羁绊，我们选择了数学编程简单而高效的 MATLAB 作为计算机手段引入课堂教学．为了使学生对 MATLAB 的使用有个初步的了解，同时加强对相关知识的理解和运用，教材在每章后面都加入了数学实验的内容，要求学生以 MATLAB 为工具完成数学实验．这部分内容可根据学时决定是安排在正常课堂教学内，还是另外安排时间或者课后练习.

二、引入知识纵横，加强数学教材的趣味性．每章后我们加入“知识纵横”，内容丰富而灵活，既有数学简史，又有相关内容的延伸，还有数学家小传等．这些内容为学生课外阅读提供一种引导，旨在调动学生对数学知识背后的历史和文化的兴趣，促使学生主动阅读其他的相关文献.

本书是《微积分（经济类)》，全书共分 9 章，主要内容包括函数的极限与连续、导数与微分、中值定理与导数的应用、不定积分、定积分及其应用、多元函数微分学、二重积分、无穷级数、微分方程和差分方程．教材注意与中学数学的衔接，增加了中学数学教材中删去而学习微积分必备的知识点，如幂函数、和差化积与积化和差公式、反三角函数等．另外教材特别注重微积分在经济与管理领域中的应用，除了包含教学基本要求中的微积分在经济中的应用问题，还增加了连续复利、现在值与将来值、供需模型、消费模型等经济管理类专业中的常用知识．书中加“*”号的内容，任课教师可酌情选用.

本书第 1，2，3 章由丁志强组织编写，第 4，5，6，7 章由王宏栋组织编写，第 8，9 章由王凯组织编写.

由于编者水平有限，加上时间比较仓促，书中难免存在不足之处，希望专家、同行及读者批评指正.

编者

目　录

第 1 章

函数　极限与连续

创立于 17 世纪的微积分，是数学发展史上的里程碑，是大学数学基础课程的主要内容．函数是微积分的主要研究对象，极限是学习微积分的理论基础，连续是函数的重要性质之一．本章将在复习和加深函数有关知识的基础上，介绍函数的极限、函数的连续性的概念以及它们的一些性质．

1.1　函数

1.1.1　区间

1．区间

设 a 和 b 都是实数，且 $a<b$，则称数集 $\{x \mid a<x<b\}$ 为**开区间**，记为 (a, b)，即

$$(a, b)=\{x \mid a<x<b\}.$$

类似地，有

$$[a, b]=\{x \mid a \leqslant x \leqslant b\}$$

称为**闭区间**，

$$[a, b)=\{x \mid a \leqslant x<b\},(a, b]=\{x \mid a<x \leqslant b\}$$

称为**半开区间**.

其中 a 和 b 称为上述**区间的端点**，$b-a$ 称为**区间的长度**．以上这些区间称为**有限区间**.

$[a,+\infty)=\{x \mid x \geqslant a\},(-\infty, b)=\{x \mid x<b\},(-\infty,+\infty)$ $=\{x \mid -\infty<x<+\infty\}$ 称为**无限区间**.

以后在不需要辨明所讨论的区间是否包含端点，以及是有限区间还是无限区间时，我们简单地称它为“区间”，且用 I 表示.

2. 邻域

以点 x_0 为中心的任何开区间称为**点 x_0 的邻域**，记作 $U(x_0)$.

设 $\delta>0$，称开区间 $(x_0-\delta,\ x_0+\delta)$ 为**点 x_0 的 δ 邻域**，记作 $U(x_0,\delta)$，即

$$U(x_0,\delta)=\{x\mid x_0-\delta<x<x_0+\delta\}$$
$$=\{x\mid |x-x_0|<\delta\}.$$

其中点 x_0 称为**邻域的中心**，δ 称为**邻域的半径**.

开区间 $(x_0-\delta,x_0)\cup(x_0,x_0+\delta)$ 称为**点 x_0 的去心 δ 邻域**，记作 $\mathring{U}(x_0,\delta)$，即

$$\mathring{U}(x_0,\delta)=\{x\mid x_0-\delta<x<x_0 \text{ 或 } x_0<x<x_0+\delta\}$$
$$=\{x\mid 0<|x-x_0|<\delta\}.$$

开区间 $(x_0-\delta,\ x_0)$ 称为**点 x_0 的左 δ 邻域**，开区间 $(x_0,\ x_0+\delta)$ 称为**点 x_0 的右 δ 邻域**.

1.1.2 函数概念

1. 函数的定义

定义 1-1 设 x 和 y 是两个变量，D 是一个非空数集. 如果按照某个对应法则 f，使得对于每一个 $x\in D$，都有唯一确定的 y 值与之对应，则称这个对应法则 f 为**定义在 D 上的函数**，记作

$$y=f(x),\quad x\in D.$$

其中，x 称为**自变量**，y 称为**因变量**，D 称为**定义域**，记作 $D(f)$.

在函数定义中，对于每一个 $x\in D$，按照对应法则 f，总有唯一确定的 y 值与之对应，则这个 y 值称为函数 f 在 x 处的函数值，记作 $f(x)$，即 $y=f(x)$. 因变量 y 与自变量 x 之间的这种依赖关系通常称为函数关系，习惯上称因变量 y 是自变量 x 的函数. 当自变量 x 取遍定义域 D 中的值时，相应的函数值 $f(x)$ 的全体所构成的集合称为函数的**值域**，记作 $f(D)$ 或 $R(f)$，即

$$f(D)=\{y\mid y=f(x),\ x\in D\}.$$

由函数定义可知，定义域和对应法则是函数概念的两要素. 如果两个函数的定义域与对应法则都相同，那么这两个函数就是同一个函数，并且与自变量和因变量用什么字母表示无关.

函数的定义域通常按以下两种情形来确定：一种是对有实际背景的

函数，根据实际背景中变量的实际意义确定．例如，边长为 x 的正方形的面积 $A=x^2$ 的定义域为 $(0,+\infty)$；另一种是用算式表达的函数，通常约定这种函数的定义域是使得算式有意义的一切实数组成的集合．例如，函数 $y=\ln(x+1)$ 的定义域是开区间 $(-1,+\infty)$．函数的定义域通常用区间或不等式表示．

在函数的定义中，对每个 $x\in D$，只有唯一的 y 值与之对应，这样定义的函数称为**单值函数**，否则称为**多值函数**．如函数 $y^2=x$，对于每个 $x\in(0,+\infty)$，都有两个 y 值与之对应，所以该函数为多值函数．对于多值函数，往往只要附加一些条件，就可以将它化为单值函数进行讨论．

例 1-1　求函数 $y=\sqrt{4-x^2}+\dfrac{1}{\ln(x-1)}$ 的定义域．

解　要使函数有意义，x 必须同时满足：$4-x^2\geqslant0$，$x-1>0$，$x-1\neq1$．解得函数的定义域为 $(1,2)$．

例 1-2　设 $f(x-1)=x^2+1$，求 $f(x)$,$f(1)$．

解　令 $x-1=t$，则 $x=t+1$．于是

$$f(t)=(t+1)^2+1=t^2+2t+2.$$

所以 $f(x)=x^2+2x+2$,$f(1)=5$．

2. 分段函数

有些函数在自变量的不同取值范围内，其对应法则是用不同的式子来表示的，这种函数就称为**分段函数**．如函数 $f(x)=\begin{cases}\sqrt{x}, & 0\leqslant x\leqslant1,\\ 2-x, & x>1\end{cases}$ 是一个定义在区间 $[0,+\infty)$ 上的分段函数，$f\left(\dfrac{1}{4}\right)=\dfrac{1}{2}$,$f(2)=0$．应当注意，不论用几个式子表示的分段函数都是一个函数，而不是几个函数．下面举几个特殊的分段函数的例子．

例 1-3　绝对值函数 $y=|x|=\begin{cases}x, & x\geqslant0,\\ -x, & x<0,\end{cases}$ 其定义域为 $D=(-\infty,+\infty)$，值域为 $W=[0,+\infty)$，其图像如图 1-1 所示．

例 1-4　符号函数 $y=\operatorname{sgn}x=\begin{cases}1, & x>0,\\ 0, & x=0,\\ -1, & x<0,\end{cases}$ 其定义域为 $D=(-\infty,+\infty)$，值域为 $W=\{-1,0,1\}$，其图像如图 1-2 所示．

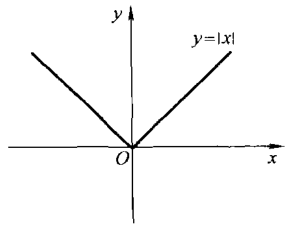

图 1-1

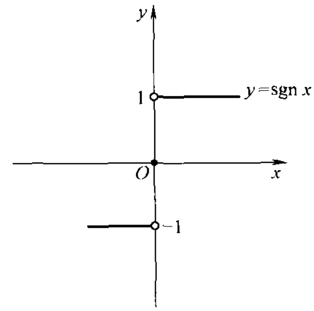

图 1-2

例 1-5 取整函数 $y=[x]$，其中 $[x]$ 表示不超过 x 的最大整数．如 $\left[\frac{5}{7}\right]=0$，$[\sqrt{2}]=1$，$[\pi]=3$，$[-1]=-1$，$[-3.5]=-4$．其定义域为 $D=(-\infty,+\infty)$，值域为 $W=\mathbf{Z}$（所有整数），其图像如图 1-3 所示．

例 1-6 狄利克雷（Dirichlet）函数

$$D(x)=\begin{cases}1, & x\text{ 为有理数时},\\ 0, & x\text{ 为无理数时},\end{cases}$$

它的定义域是 $D=(-\infty,+\infty)$，值域是 $W=\{0,1\}$．

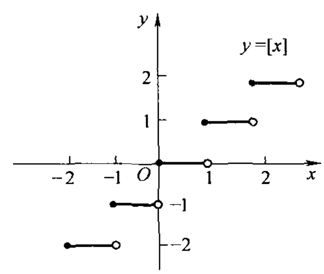

图 1-3

3．建立函数关系举例

利用相关的数学知识解决实际问题时，首先需要将实际问题转化为数学问题，建立函数关系式，然后才能进行分析和计算．因此，在实际应用中，建立函数关系式是十分重要的．

例 1-7 要建一个容积为 V 的长方体水池，它的底为正方形．若池底与侧面的单位面积造价比为 2∶1，试建立总造价与底面边长之间的函数关系．

解 设水池的底面边长为 x，总造价为 y，侧面的单位面积造价为 a，则由已知可得水池的高为 $\frac{V}{x^2}$，从而得

$$y=2ax^2+4a\cdot\frac{V}{x}\quad(0<x<+\infty).$$

例 1-8 某市出租车按如下规定收费：当行驶里程不超过 3 公里时，一律收起步费 8 元；当行驶里程超过 3 公里时，除起步费外，超出部分按每 600 米 1 元计费．试建立车费 y 元与行驶里程 x 公里之间的函数

关系.

解　根据题意可列出函数关系如下：

$$y=\begin{cases}8, & 0<x\leqslant 3,\\ 8+\dfrac{5}{3}(x-3), & x>3,\end{cases}\quad \text{即 } y=\begin{cases}8, & 0<x\leqslant 3,\\ \dfrac{5}{3}x+3, & x>3.\end{cases}$$

1.1.3　反函数与复合函数

1. 反函数

在圆的面积公式

$$S=\pi R^2$$

中，R 是自变量，S 是因变量，表示圆的面积随半径的变化而变化. 事实上，半径 R 与面积 S 同时发生变化，很难说哪个先变、哪个后变，因此没有理由一定要把 R 取作自变量，也可以把面积 S 取作自变量，这时半径 R 就是面积 S 的函数

$$R=\sqrt{\frac{S}{\pi}}.$$

这个函数就称为原来面积函数的反函数.

一般地，设函数 $y=f(x)$ 的定义域为 D，值域为 $f(D)$. 如果对每一个 $y\in f(D)$，都有唯一确定且满足 $y=f(x)$ 的 $x\in D$ 与之对应，则按此对应法则就得到一个定义在 $f(D)$ 上的函数，这个函数称为函数 f 的**反函数**，记作

$$x=f^{-1}(y),\ y\in f(D).$$

由于习惯上用 x 表示自变量，y 表示因变量，所以函数 $y=f(x)$，$x\in D$ 的反函数通常记成

$$y=f^{-1}(x),\ x\in f(D).$$

相对于反函数 $y=f^{-1}(x)$ 来说，原来的函数 $y=f(x)$ 称为直接函数. 由定义可知，反函数 $y=f^{-1}(x)$ 的定义域和值域分别是其直接函数 $y=f(x)$ 的值域和定义域. 如果把函数 $y=f(x)$ 和它的反函数 $y=f^{-1}(x)$ 的图像画在同一坐标平面上，那么这两个函数的图像是关于直线 $y=x$ 对称的.

一般地，若函数 $y=f(x)$ 是区间 I 上的单调函数，则它的反函数 $y=f^{-1}(x)$ 必定存在，并且反函数与其直接函数具有相同的单调性.

例如，函数 $y=\sin x\left(-\dfrac{\pi}{2}\leqslant x\leqslant\dfrac{\pi}{2}\right)$ 的反函数为

$$y=\arcsin x(-1\leqslant x\leqslant 1),$$

且都是单调增加的；函数 $y=x^2$ 在区间 $(-\infty, 0)$ 内的反函数为 $y=-\sqrt{x}$ $(0<x<+\infty)$，且都是单调减少的.

2. 复合函数

例如函数

$$y=\sin x^2$$

可以看成是函数 $y=\sin u$，$u=x^2$ 的复合，函数 $y=\sin x^2$ 就称为 $y=\sin u$，$u=x^2$ 的复合函数. 一般有如下定义.

设 $y=f(u), u\in E, u=g(x), x\in D$，若 $D(f)\cap R(g)\neq\varnothing$，则 y 通过 u 构成 x 的函数，称为 **$y=f(u)$ 和 $u=g(x)$ 构成的复合函数**，记作 $y=f[g(x)]$，u 称为**中间变量**.

例如，$y=\sqrt{u}$ 的定义域为 $[0,+\infty)$，$u=g(x)=1+x^2$ 的定义域为 $D=(-\infty,+\infty)$，且 $g(D)=[1,+\infty)\subset[0,+\infty)$，所以 $y=\sqrt{u}$ 和 $u=1+x^2$ 能构成复合函数 $y=\sqrt{1+x^2}$，它的定义域为 $D=(-\infty,+\infty)$. 又如，$y=f(u)=\arcsin u$ 的定义域为 $[-1,1]$，$u=g(x)=2\sqrt{1-x^2}$ 的定义域为 $[-1,1]$，且 $g(D)=[0,2]\cap[-1,1]\neq\varnothing$，则 $y=\arcsin u$ 与 $u=2\sqrt{1-x^2}$ 能构成复合函数 $y=\arcsin 2\sqrt{1-x^2}$，它的定义域为 $D=\left[-1,-\frac{\sqrt{3}}{2}\right]\cup\left[\frac{\sqrt{3}}{2},1\right]$. 由此例也可看出，复合函数中间变量 $u=g(x)$ 的定义域不一定就是复合函数本身的定义域.

在进行函数复合时，要注意不是任何两个函数都可以复合成一个复合函数的. 如函数 $y=\arcsin u$ 和函数 $u=2+x^2$ 就不能构成复合函数，这是因为对任一 $x\in(-\infty,+\infty)$，$u=2+x^2\geqslant 2$ 均不在 $y=\arcsin u$ 的定义域 $[-1,1]$ 内. 另外，复合函数的中间变量可以是两个或两个以上. 如 $y=\sqrt{u}$，$u=\cot v$，$v=\frac{x}{2}$ 构成的复合函数为 $y=\sqrt{\cot\frac{x}{2}}$，其中 u 和 v 是中间变量.

对于复合函数，既要会把几个简单函数复合成一个复合函数，又要会把一个复合函数分拆成几个简单函数.

例 1-9 下列函数是由哪些函数复合而成的？

(1) $y=\sin^2 x$；(2) $y=\sqrt{1-x^2}$；

(3) $y=e^{\frac{1}{x}}$；(4) $y=\cos[\ln(x-1)]$.

解 (1) $y=u^2$，$u=\sin x$；

(2) $y=\sqrt{u}$，$u=1-x^2$；

(3) $y = e^u$，$u = \frac{1}{x}$；

(4) $y = \cos u$，$u = \ln v$，$v = x - 1$.

1.1.4　初等函数

1. 基本初等函数

我们中学学过的幂函数 $y = x^\mu$（$\mu \in \mathbf{R}$ 是常数）；指数函数 $y = a^x$（$a > 0$ 且 $a \neq 1$）；对数函数 $y = \log_a x$（$a > 0$ 且 $a \neq 1$）；三角函数 $y = \sin x$, $y = \cos x$，$y = \tan x$，$y = \cot x$；反三角函数 $y = \arcsin x$，$y = \arccos x$，$y = \arctan x$，$y = \text{arccot}\ x$ 统称为基本初等函数. 为了今后学习和查阅方便，现将基本初等函数的定义域、图像和特性列举如下：

(1) 幂函数　底数为自变量的函数 $y = x^\mu$ 称为**幂函数**. 它的定义域根据指数 μ 才能确定. 例如

$y = x^n$（n 为正整数），定义域为 $(-\infty, +\infty)$；

$y = x^{-n}$（n 为正整数），定义域为 $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$；

$y = x^{\frac{2}{3}}$，定义域为 $(-\infty, +\infty)$；

$y = x^{-\frac{3}{2}}$，定义域为 $(0, +\infty)$.

一般情形下，都假定幂函数 $y = x^\mu$ 中的 $x > 0$.

(2) 指数函数　幂指数为自变量的函数 $y = a^x$（$a > 0$ 且 $a \neq 1$）称为**指数函数**. 它的定义域为 $(-\infty, +\infty)$（图 1-4）.

当 $a > 1$ 时，$y = a^x$ 是增函数；当 $0 < a < 1$ 时，$y = a^x$ 是减函数.

根据幂的基本性质，指数函数 $y = a^x$ 具有性质：$a^{x_1} a^{x_2} = a^{x_1 + x_2}$（加法定理）.

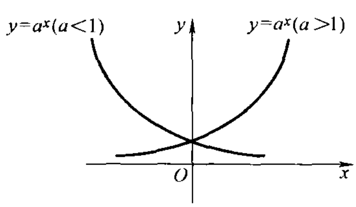

图　1-4

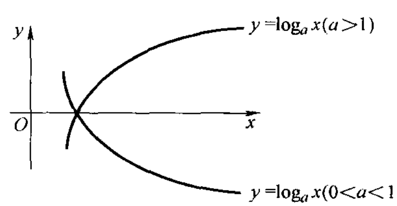

图　1-5

(3) 对数函数　因为指数函数 $y = a^x$ 是增函数（当 $a > 1$ 时）或减函数（当 $0 < a < 1$ 时）（图 1-4），所以它有反函数，记成

$$x = \log_a y (0 < y < +\infty).$$

或者把 x 与 y 对调位置后为

$$y = \log_a x (0 < x < +\infty) (图 1\text{-}5).$$

称函数 $y=\log_a x$ （$a>0$ 且 $a\neq 1$） 为**对数函数**，它的定义域为$(0, +\infty)$.

根据定义，有对数恒等式

$$x=a^{\log_a x}(x>0) \text{ 和 } x=\log_a a^x(-\infty<x<+\infty).$$

而根据对数的定义和幂的基本性质，则有下面的结论：

① $\log_a x_1=\log_a x_2 \Rightarrow x_1=x_2$；

② $\log_a |x_1x_2|=\log_a|x_1|+\log_a|x_2|$；

③ $\log_a \left|\dfrac{x_1}{x_2}\right|=\log_a|x_1|-\log_a|x_2|$；

④ $\log_a 1=0$，$\log_a a=1$，$\log_a x=-\log_a \dfrac{1}{x}$；

⑤ $\log_a x=\dfrac{\log_b x}{\log_b a}$（**换底公式**）.

（4）三角函数与反三角函数

测量角的大小时，首先要确定一个单位. 例如，取直角的 1/90（称为**度**），或取圆弧长等于半径时的圆心角（称为**弧度**）作为测量角的单位. 若不特别声明，今后就采用弧度作为测量角的单位. “角”的概念需要推广如下：第一，不仅有锐角或钝角，而且也有大于平角或周角的角；即有任意大小的角；第二，角也有相反的两个方向，即正角和负角.

1）任意角的三角函数的定义　如图 1-6 所示，用 r 表示点 $M(x, y)$ 到原点 O 的距离，则比值$\dfrac{y}{r}$，$\dfrac{x}{r}$，$\dfrac{y}{x}$，$\dfrac{x}{y}$，$\dfrac{r}{x}$，$\dfrac{r}{y}$仅由角$\angle AOM=\theta$ 的大小所决定（相似三角形对应边成比例），与 r 的大小无关. 因此，我们不妨取 $r=1$（图 1-7）.

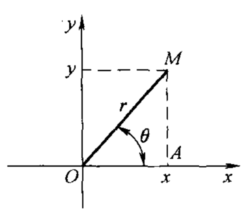

图 1-6

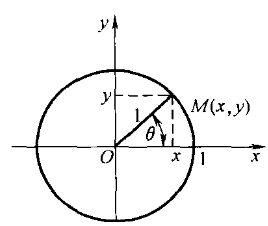

图 1-7

现在，把 $\theta(-\infty<\theta<+\infty)$看做自变量，就可以定义六个(**简单**)**三角函数**：

正弦函数　$\sin\theta=y(-\infty<\theta<+\infty)$；

余弦函数　$\cos\theta=x(-\infty<\theta<+\infty)$；

正切函数　$\tan\theta=\dfrac{y}{x}\left(\theta\neq k\pi+\dfrac{\pi}{2};\ k=0, \pm 1, \pm 2, \cdots\right)$；