

现代电子信息科学技术基础

# Optimal Control

Theory, Method and Applications

## 最优控制

### ——理论、方法与应用

王青 陈宇 张颖昕 侯砚泽 编著

现代电子信息科学技术基础

# Optimal Control

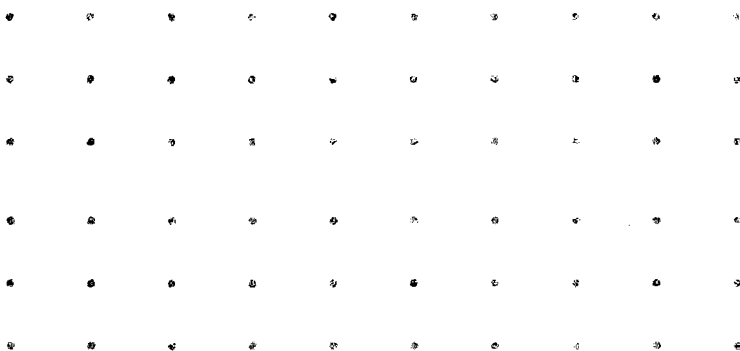
Theory, Method and Applications

## 最优控制

### ——理论、方法与应用

ZUIYOU KONGZHI

王青 陈宇 张颖昕 侯砚泽 编著



高等教育出版社·北京  
HIGHER EDUCATION PRESS BEIJING

## 图书在版编目(CIP)数据

最优控制:理论、方法与应用/王青等编著. —北京:高等教育出版社,2011.5

ISBN 978 - 7 - 04 - 031720 - 6

I. ①最… II. ①王… III. ①最佳控制 - 数学理论 - 高等学校 - 教材 IV. ①O232

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2011)第 042702 号

策划编辑 刘 英  
版式设计 范晓红

责任编辑 刘 英  
责任校对 姜国萍

封面设计 赵 阳  
责任印制 张泽业

责任绘图 尹 莉

出版发行 高等教育出版社  
社 址 北京市西城区德外大街 4 号  
邮政编码 100120  
印 刷 北京机工印刷厂  
开 本 787 × 1092 1/16  
印 张 16.75  
字 数 320 000  
购书热线 010 - 58581118

咨询电话 400 - 810 - 0598  
网 址 <http://www.hep.edu.cn>  
<http://www.hep.com.cn>  
网上订购 <http://www.landaco.com>  
<http://www.landaco.com.cn>  
版 次 2011 年 5 月第 1 版  
印 次 2011 年 5 月第 1 次印刷  
定 价 45.00 元(含光盘)

本书如有缺页、倒页、脱页等质量问题,请到所购图书销售部门联系调换。

版权所有 侵权必究

物料号 31720 - 00

# 前 言

最优控制的提出可追溯至 20 世纪 50 年代,经历了 60 余年的发展,现已形成了独立的研究分支,具有完善的理论体系。最优控制在工业生产、经济管理及国防军事等领域发挥着重要的作用,并在应用中得到不断的发展。

本书系统全面地介绍了最优控制理论及其工程应用。本书第 2 章~第 10 章为基础理论篇,详细阐述最优控制的基本理论。本书第 11 章~第 16 章为工程应用篇,提供了丰富的最优控制应用实例及其 MATLAB 仿真代码,便于读者巩固理论知识,扎实地掌握最优控制的应用方法。

本书在选材范围和数学工具的使用上充分考虑了学生的知识结构和教学需求。面向工科学生,深入浅出,简洁易读,注重基本理论学习和主要方法的掌握,尽量避免大篇幅的数学论证。书中融入了很多最优控制理论与应用的新成果,而且给出了许多工程应用实例,在为教学人员提供了更多讲授素材的同时,方便读者对最优控制理论内容的理解。

本书第 1 章为绪论,介绍最优控制的发展历程和基本思想。第 2 章阐述利用变分法求解最优控制的方法,介绍无约束和等式约束条件下的泛函极值问题。第 3 章为极小值原理,给出最短时间控制、最小能量控制和时间能量综合控制的解法。第 4 章为线性二次型最优控制,介绍具有二次型性能指标的状态调节器设计和伺服跟踪问题。第 5 章为动态规划,讲述最优性原理和离散/连续系统的动态规划问题。第 2 章~第 5 章是最优控制的主体内容,构成了最优控制理论的基本框架。第 6 章~第 10 章分别陈述最优控制的计算方法、随机线性系统的最优控制、奇异最优控制、鲁棒最优控制以及遗传算法在最优控制中的应用。第 11 章~第 16 章为变分法、极小值原理、线性二次型设计等最优控制主要方法在工程实际中的应用及其 MATLAB 仿真代码。

本书的编写工作得到了北京航空航天大学研究生精品课程建设基金的资助。

本书的工程实例多取材于最优控制课程的学生课程设计,编者在此对同学

们的无私帮助表示衷心的感谢。

虽然编者在撰写过程中参阅了国内外大量优秀的最优控制资料,力求内容充实准确,但是由于时间仓促、水平有限,不妥和疏漏之处在所难免,恳请广大读者予以批评指正。

编 者

2010年12月于北航

# 目 录

|                            |    |
|----------------------------|----|
| <b>第 1 章 绪论</b> .....      | 1  |
| 1.1 最优控制的发展历程 .....        | 1  |
| 1.2 最优控制问题的实例 .....        | 2  |
| 1.2.1 登月舱的月球软着陆问题 .....    | 2  |
| 1.2.2 空间拦截问题 .....         | 3  |
| 1.2.3 生产计划问题 .....         | 4  |
| 1.3 最优控制问题的描述 .....        | 5  |
| 1.4 本书内容安排 .....           | 6  |
| 1.4.1 章节结构 .....           | 7  |
| 1.4.2 使用建议 .....           | 7  |
| <b>第 2 章 变分法</b> .....     | 9  |
| 2.1 泛函与变分的数学基础 .....       | 9  |
| 2.1.1 泛函与变分的定义 .....       | 9  |
| 2.1.2 泛函极值的必要条件 .....      | 10 |
| 2.2 无条件泛函极值的变分原理.....      | 11 |
| 2.3 等式约束泛函极值的变分原理.....     | 14 |
| 2.3.1 终端时刻固定,终端状态自由 .....  | 14 |
| 2.3.2 终端时刻自由,终端状态受约束 ..... | 20 |
| 2.3.3 终端时刻固定,终端状态受约束 ..... | 27 |
| 2.4 小结.....                | 28 |
| 习题 .....                   | 29 |
| <b>第 3 章 极小值原理</b> .....   | 31 |
| 3.1 变分法的局限性.....           | 31 |
| 3.2 连续系统的极小值原理.....        | 32 |
| 3.3 双积分系统的最短时间控制.....      | 36 |

|            |                     |           |
|------------|---------------------|-----------|
| 3.4        | 双积分系统的最少能量控制        | 45        |
| 3.5        | 时间和能量综合最优控制         | 50        |
| 3.6        | 离散系统的极小值原理          | 57        |
| 3.7        | 小结                  | 61        |
|            | 习题                  | 62        |
| <b>第4章</b> | <b>线性系统的二次型最优控制</b> | <b>65</b> |
| 4.1        | 线性二次型最优控制的数学描述      | 65        |
| 4.2        | 连续系统的有限时间状态调节器      | 67        |
| 4.2.1      | 基于极小值原理的设计方法        | 67        |
| 4.2.2      | 黎卡提微分方程的求解          | 69        |
| 4.3        | 连续系统的无限时间状态调节器      | 73        |
| 4.3.1      | 黎卡提代数方程             | 73        |
| 4.3.2      | LQR 系统的稳定裕度分析       | 74        |
| 4.3.3      | 利用 MATLAB 求解黎卡提代数方程 | 77        |
| 4.4        | 具有指定衰减速率的无限时间状态调节器  | 81        |
| 4.5        | 连续系统的伺服跟踪最优控制器      | 84        |
| 4.6        | 离散系统的状态调节器          | 88        |
| 4.6.1      | 离散系统的有限时间状态调节器      | 88        |
| 4.6.2      | 离散系统的无限时间状态调节器      | 91        |
| 4.7        | 小结                  | 94        |
|            | 习题                  | 95        |
| <b>第5章</b> | <b>动态规划</b>         | <b>97</b> |
| 5.1        | 动态规划的基本思想           | 97        |
| 5.1.1      | 多级决策问题              | 97        |
| 5.1.2      | 动态规划的基本原理——最优性原理    | 100       |
| 5.2        | 离散系统的动态规划方法         | 101       |
| 5.3        | 连续系统的动态规划方法         | 103       |
| 5.3.1      | HJB 方程              | 103       |
| 5.3.2      | HJB 方程与极小值原理        | 108       |
| 5.3.3      | HJB 方程与 LQR 设计问题    | 109       |
| 5.4        | 小结                  | 112       |
|            | 习题                  | 112       |

---

|                              |     |
|------------------------------|-----|
| 第 6 章 最优控制的计算方法              | 114 |
| 6.1 问题描述                     | 114 |
| 6.2 直接法                      | 115 |
| 6.2.1 梯度法                    | 115 |
| 6.2.2 共轭梯度法                  | 118 |
| 6.3 间接法                      | 126 |
| 6.3.1 边界迭代法                  | 126 |
| 6.3.2 拟线性化法                  | 128 |
| 6.4 小结                       | 130 |
| 习题                           | 131 |
| 第 7 章 随机最优控制                 | 132 |
| 7.1 分离定理与离散系统的随机线性控制器        | 132 |
| 7.2 连续系统的随机线性控制器             | 139 |
| 7.3 随机线性跟踪控制器的设计             | 145 |
| 7.4 小结                       | 147 |
| 习题                           | 147 |
| 第 8 章 奇异最优控制                 | 150 |
| 8.1 奇异最优控制的提出                | 150 |
| 8.2 奇异线性二次型最优控制              | 151 |
| 8.3 奇异最优控制的解法                | 157 |
| 8.4 小结                       | 159 |
| 习题                           | 159 |
| 第 9 章 鲁棒控制与最优控制              | 160 |
| 9.1 预备知识                     | 160 |
| 9.1.1 信号范数                   | 160 |
| 9.1.2 系统范数                   | 162 |
| 9.2 LQR/LQG 问题与 $H_2$ 最优控制问题 | 162 |
| 9.2.1 LQR 与 $H_2$ 最优控制       | 162 |
| 9.2.2 LQG 与 $H_2$ 最优控制       | 164 |
| 9.3 $H_\infty$ 控制理论          | 165 |
| 9.3.1 概述                     | 165 |



|               |                              |            |
|---------------|------------------------------|------------|
| 9.3.2         | $H_2$ 标准问题 .....             | 166        |
| 9.3.3         | 不确定性系统的 $H_2$ 控制 .....       | 167        |
| 9.4           | 线性定常系统的 $H_2$ 最优控制 .....     | 172        |
| 9.4.1         | 概述 .....                     | 172        |
| 9.4.2         | $H_2$ 控制器求解 .....            | 174        |
| 9.5           | 小结 .....                     | 176        |
|               | 习题 .....                     | 176        |
| <b>第 10 章</b> | <b>遗传算法与最优控制 .....</b>       | <b>178</b> |
| 10.1          | 传统的加权阵选择方法 .....             | 178        |
| 10.2          | 基于遗传算法的最优控制器设计 .....         | 179        |
| 10.3          | 小结 .....                     | 185        |
|               | 习题 .....                     | 186        |
| <b>第 11 章</b> | <b>变分法应用 .....</b>           | <b>187</b> |
| 11.1          | 实例一:变分法在温度控制系统设计中的应用 .....   | 187        |
| 11.1.1        | 温度控制系统描述 .....               | 187        |
| 11.1.2        | 变分法解温度控制问题 .....             | 187        |
| 11.1.3        | 仿真验证 .....                   | 189        |
| 11.2          | 实例二:火星探测器最优小推力变轨 .....       | 191        |
| 11.2.1        | 轨道优化的数学模型 .....              | 191        |
| 11.2.2        | 地球逃逸段小推力轨道优化与仿真 .....        | 193        |
| <b>第 12 章</b> | <b>极小值原理应用 .....</b>         | <b>198</b> |
| 12.1          | 实例一:机械手转台最短时间控制 .....        | 198        |
| 12.1.1        | 机械手转台控制系统描述 .....            | 198        |
| 12.1.2        | 极小值原理求解机械手最短时间控制问题 .....     | 199        |
| 12.1.3        | 仿真分析 .....                   | 201        |
| 12.2          | 实例二:最优导引律 .....              | 203        |
| 12.2.1        | 导弹运动状态方程的建立 .....            | 203        |
| 12.2.2        | 最优导引律的设计与仿真验证 .....          | 206        |
| <b>第 13 章</b> | <b>线性二次型最优控制方法应用 .....</b>   | <b>215</b> |
| 13.1          | 实例一:线性二次型最优控制在吊车控制中的应用 ..... | 215        |
| 13.1.1        | 桥式吊车控制系统概述 .....             | 215        |

|                                     |            |
|-------------------------------------|------------|
| 13.1.2 系统状态方程的建立 .....              | 216        |
| 13.1.3 线性二次型最优控制的设计与实现 .....        | 219        |
| 13.1.4 零极点配置的设计与实现 .....            | 222        |
| 13.1.5 结论 .....                     | 223        |
| 13.2 实例二:线性二次型最优控制在液压伺服系统中的应用 ..... | 223        |
| 13.2.1 液压伺服系统数学模型 .....             | 223        |
| 13.2.2 线性二次型最优控制器的设计与仿真 .....       | 225        |
| 13.2.3 加权阵对系统稳定性的影响 .....           | 227        |
| 13.2.4 结论 .....                     | 230        |
| <b>第 14 章 动态规划方法应用 .....</b>        | <b>231</b> |
| 14.1 实例一:利用动态规划解决热交换器最优设计问题 .....   | 231        |
| 14.1.1 热交换器设计问题描述 .....             | 231        |
| 14.1.2 热交换器系统数学模型 .....             | 231        |
| 14.1.3 动态规划法求解交换面积分配策略 .....        | 232        |
| 14.2 实例二:利用动态规划解决运行成本最小化问题 .....    | 234        |
| 14.2.1 运行成本最小化问题描述 .....            | 234        |
| 14.2.2 动态规划求解运行成本最小化问题 .....        | 235        |
| 14.2.3 仿真验证 .....                   | 237        |
| <b>第 15 章 随机最优控制方法应用 .....</b>      | <b>240</b> |
| 15.1 实例一:随机最优控制在汽车自控系统中的应用 .....    | 240        |
| 15.1.1 汽车自动控制系统数学描述 .....           | 240        |
| 15.1.2 随机最优控制系统设计 .....             | 241        |
| 15.1.3 仿真验证 .....                   | 243        |
| 15.2 实例二:随机最优控制在倒立摆控制中的应用 .....     | 244        |
| 15.2.1 二级倒立摆系统数学模型 .....            | 244        |
| 15.2.2 随机最优控制系统设计 .....             | 246        |
| 15.2.3 仿真验证 .....                   | 250        |
| <b>第 16 章 遗传算法在最优控制中的应用 .....</b>   | <b>252</b> |
| 16.1 倒立摆的数学模型 .....                 | 252        |
| 16.2 采用遗传算法选择加权阵 .....              | 253        |
| 16.3 仿真分析 .....                     | 254        |
| <b>参考文献 .....</b>                   | <b>256</b> |

# 第 1 章 绪 论

控制工程领域早期的经典控制方法和技术已为广大读者所熟知。一般而言,经典控制用于解决单输入单输出线性定常系统的控制器设计问题。采用经典控制的首要目标是稳定被控对象,在此前提下,保证瞬态性能、带宽和稳态误差等控制性能,常用的设计方法有解析法(如劳斯判据)和作图法(如波特图)。经典控制在一般工业和国防军事领域取得了显著的成就,部分方法依然沿用至今。

然而,对于高阶系统或多输入多输出系统,采用经典控制方法很难获得令人满意的控制性能。在这种情况下,控制学者于 20 世纪 60 年代初开始研究状态空间方法,并依此发展出最优控制、最优滤波和系统辨识等理论,形成了称之为现代控制的理论框架。与经典控制相比,现代控制可有效完成高阶系统或多输入多输出系统的控制器设计,并且大幅减少设计工作对人员经验的依赖。

最优控制是现代控制理论的主要分支,研究的主要问题是根据被控对象的数学模型,在容许范围内设计控制律,使得被控对象的性能指标达到最优。

## 1.1 最优控制的发展历程

最优控制理论具有悠久的发展历史。早在 20 世纪 50 年代初期,布绍(Bushaw)利用几何方法研究了伺服系统的最短时间控制问题。钱学森在 1954 年出版的《工程控制论》一书中简单介绍了布绍的工作,并指出变分方法是最优控制器设计的数学方法。然而,由于变分方法只能解决容许控制属于开集的最优控制问题,无法解决工程实际中经常遇到的容许控制属于闭集的最优控制,因此,促使控制学者开辟求解最优控制的新途径。1956 年至 1960 年间,前苏联学者庞特里亚金等发展了极大值原理(目前较多的称为极小值原理),将最优控制问题转化为具有约束的非经典变分问题,并完成了极大值原理的严格数学证明。与此同时,1953 年至 1957 年间,美国数学家贝尔曼(Bellman)等发展了变分方法中的哈密顿-雅可比(Hamilton - Jacobi)理论,逐步形成了动态规划方法,同样可以解决容许控制属于闭集的最优控制问题。上述两种方法是最优控制理论

的两大基石。

时至今日,最优控制理论研究无论在深度上和广度上都有了进一步的发展,形成了诸如分布参数系统最优控制、随机系统最优控制和切换系统最优控制等一系列研究领域。与此同时,计算机的快速发展为最优控制在工程领域的推广与应用奠定了坚实的基础。目前,最优控制仍是极其活跃的研究领域,并在国民经济和国防建设中继续发挥重要的作用。

以下首先介绍几个典型的最优控制问题,以便使读者对最优控制问题形成初步的感性认识,而后再具体给出最优控制问题的数学描述。

## 1.2 最优控制问题的实例

### 1.2.1 登月舱的月球软着陆问题

为了使宇宙飞船在月球表面上实现软着陆(即着陆时速度为 0),必须寻求着陆过程中发动机推力的最优控制规律,使得燃料的消耗量最少。设飞船的质量为  $m(t)$ ,离月球表面的高度为  $h(t)$ ,飞船的垂直速度为  $v(t)$ ,发动机推力为  $u(t)$ ,月球表面的重力加速度为  $g$ ,如图 1-1 所示,不携带燃料的飞船质量为  $M$ ,初始燃料的质量为  $F$ ,则飞船的运动方程可表示为

$$\begin{aligned} \dot{h}(t) &= v(t) \\ \dot{v}(t) &= -g + \frac{u(t)}{m(t)} \\ \dot{m}(t) &= -ku(t) \end{aligned} \quad (1-1)$$

式中,  $k$  为比例系数,表示推力与燃料消耗率的关系。

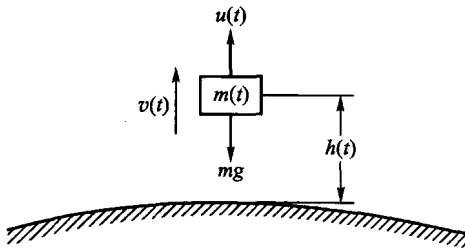


图 1-1 月球软着陆示意图

初始条件

$$h(t_0) = h_0, v(t_0) = v_0, m(t_0) = M + F \quad (1-2)$$

终端条件

$$h(t_f) = 0, v(t_f) = 0 \quad (1-3)$$

容许控制

$$0 \leq u(t) \leq a \quad (1-4)$$

控制目标是使燃料消耗量最小,飞船在着陆时的质量保持最大,即

$$J(u) = m(t_f) \quad (1-5)$$

达到最大。

### 1.2.2 空间拦截问题

所谓空间拦截是指发射空间武器拦击敌方空间武器。空间拦截设计的首要任务是为空间拦截器设计可实现拦截的导引律。为便于分析,在解释该问题时将空间拦截器和目标都看成质量集中于质心的质点。

在惯性坐标系内,设  $x_L$  和  $\dot{x}_L$  为拦截器质心的位置矢量和速度矢量,而  $x_M$  和  $\dot{x}_M$  为目标质心的位置矢量和速度矢量,如图 1-2 所示,取

$$\begin{aligned} x &= x_L - x_M \\ v &= \dot{x}_L - \dot{x}_M \end{aligned} \quad (1-6)$$

式中,  $x, v$  称为相对位置和速度矢量。

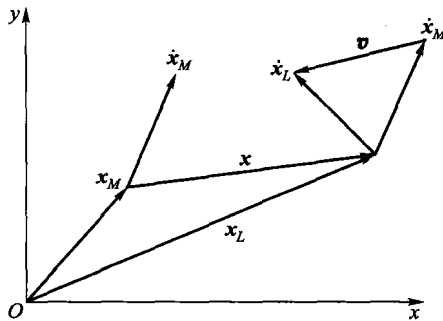


图 1-2 空间拦截相对运动示意图

假设目标无机动飞行且空间拦截器和目标均在已知空域内,  $m(t)$  为空间拦截器  $t$  时刻的质量,  $F(t)$  为空间拦截器  $t$  时刻的推力,  $u(t)$  为拦截器  $t$  时刻推力方向矢量,  $c$  为发动机有效喷气速度常数, 则空间拦截器与目标的相对运动方程为

$$\dot{x}(t) = v(t)$$

$$\begin{aligned}\dot{v}(t) &= \alpha(t) + \frac{F(t)}{m(t)}u(t) \\ \dot{m}(t) &= -\frac{F(t)}{c}\end{aligned}\quad (1-7)$$

式中,  $\alpha(t)$  是固有相对加速度矢量。系统状态为  $x, v, m$ , 其初始条件为

$$x(t_0) = x_0, v(t_0) = v_0, m(t_0) = m_0 \quad (1-8)$$

系统控制变量为  $F(t), u(t)$ 。从工程实际考虑, 它们应满足

$$\begin{aligned}0 \leq F(t) \leq \max F(t) \triangleq F_{\max} \\ \|u\|^2 = u^T u = 1\end{aligned}\quad (1-9)$$

第一个关系式表示推力大小受限制, 第二个关系式表示  $u$  为单位矢量, 其方向不受任何限制。记  $u^T = (u_1, u_2, u_3)$ , 则  $u$  的欧氏范数  $\|u\|$  为

$$\|u\| = \sqrt{u_1^2 + u_2^2 + u_3^2} \quad (1-10)$$

由于空间拦截器的质量不能小于所有燃料消耗后剩余质量  $m_e$ , 因此终端时刻  $t_f$  的质量  $m(t_f)$  应满足

$$m(t_f) \geq m_e \quad (1-11)$$

所谓空间拦截就是要求在终端时刻  $t_f$  时, 空间拦截器和目标的相对距离矢量为 0, 而相对速度矢量可任意, 即

$$x(t_f) = 0, v(t_f) \text{ 任意} \quad (1-12)$$

如果既要求拦截过程的时间尽量短, 又要求燃料消耗尽量省, 那么可取如下的性能指标:

$$J[F(\cdot), u(\cdot)] = \int_{t_0}^{t_f} [c_1 + F(t)] dt \quad (1-13)$$

并使其最小。式中,  $c_1$  为正常数。

综上所述, 空间拦截问题即为选择满足式 (1-9) 的控制  $F(t), u(t)$ ,  $t \in [t_0, t_f]$ , 使得状态方程 (1-7) 从初态 (1-8) 出发, 在某终端时刻  $t_f > t_0$  时满足式 (1-11) 和式 (1-12), 且性能指标 (1-13) 最小。

### 1.2.3 生产计划问题

设  $x(t)$  表示商品存货量,  $r(t) \geq 0$  表示对商品的需求率, 是已知函数。  $u(t)$  表示生产率, 由计划人员选取, 因此是控制变量。  $x(t)$  满足如下的状态方程:

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= -r(t) + u(t) \quad t \in [0, t_f] \\ x(0) &= x_0 \geq 0\end{aligned}\quad (1-14)$$

$x_0$ 是初始时刻的商品存货量。

从  $x(t)$  的实际意义来看,首先必须选取生产率  $u(t)$ ,使得

$$x(t) \geq 0 \quad t \in [0, t_f] \quad (1-15)$$

其次,生产能力应该有限制,即容许控制为

$$0 \leq u(t) \leq A \quad t \in [0, t_f] \quad (1-16)$$

式中,  $A > 0$  表示最大生产率,另外,为了保证满足商品需求,必须有

$$A > r(t) \quad t \in [0, t_f] \quad (1-17)$$

假定每单位时间的生产成本是生产率  $u(t)$  的函数,即  $h[u(t)]$ 。设  $b > 0$  是单位时间储存单位商品的费用,于是单位时间的总成本为

$$f[x(t), u(t), t] = h[u(t)] + bx(t) \quad (1-18)$$

由  $t = t_0$  到  $t = t_f$  的总成本为

$$J(u) = \int_{t_0}^{t_f} f[x(t), u(t), t] dt \quad (1-19)$$

最优生产计划即为寻找最优控制  $u^*(t)$ ,使总成本  $J$  最小。

### 1.3 最优控制问题的描述

由上节的例子可见,求解最优控制问题时需给定系统的状态方程、状态变量所满足的边界条件(初始条件和终端条件)、性能指标的形式(时间最短、消耗燃料最小、误差平方积分最小等)以及控制作用的容许范围。

本节将采用数学语言来详细描述最优控制问题。

(1) 建立被控系统的状态方程

$$\dot{X} = f[X(t), U(t), t] \quad (1-20)$$

式中,  $X(t)$  为  $n$  维状态向量,  $U(t)$  为  $m$  维控制向量,  $f[X(t), U(t), t]$  为  $n$  维向量函数,它可以是非线性时变向量函数,也可以是线性定常的向量函数。状态方程在最优控制问题中必须准确给定。

(2) 确定状态方程的边界条件。一个动态过程对应于  $n$  维状态空间中从一个状态到另一个状态的转移,也就是状态空间中的一条轨迹。在最优控制中初始状态通常是已知的,即

$$X(t_0) = X_0 \quad (1-21)$$

而到达终端的时刻  $t_f$  和终端状态  $X(t_f)$  则因问题而异。例如,在流水线生产过程中,  $t_f$  是固定的;在飞机快速爬升时,仅规定爬升的终端高度  $X(t_f) = X_f$ ,而  $t_f$  是自

由的,要求  $t_f - t_0$  越小越好。终端状态  $X(t_f)$  一般属于一个目标集  $S$ , 即

$$X(t_f) \in S \quad (1-22)$$

当终端状态是固定的,即  $X(t_f) = X_f$  时,则目标集退化为  $n$  维状态空间中一个点。而当终端状态满足某些约束条件,即

$$G[X(t_f), t_f] = 0 \quad (1-23)$$

这时,  $X(t_f)$  处在  $n$  维状态空间中某个超曲面上。若终端状态不受约束,则目标集扩展到整个  $n$  维空间,或称终端状态自由。

(3) 选定性能指标  $J$ 。性能指标一般有如下的形式:

$$J = \phi[X(t_f), t_f] + \int_{t_0}^{t_f} L[X(t), U(t), t] dt \quad (1-24)$$

式(1-24)所述的性能指标共包括两个部分,即积分指标  $\int_{t_0}^{t_f} L[X(t), U(t), t] dt$  和终端指标  $\phi[X(t_f), t_f]$ , 这种综合性指标对应的最优控制问题称为波尔扎(Bolza)问题。当只有终端指标时,称为迈耶尔(Mayer)问题;当只有积分指标时,称为拉格朗日(Lagrange)问题。性能指标的确定因问题性质而异。在导弹截击目标的问题中,要求弹着点的散布度最小,这时可用终端指标来表示。在快速控制问题中,要求系统从一个状态过渡到另一个状态的时间最短,即  $\int_{t_0}^{t_f} dt \rightarrow \min$ , 这就是积分指标。性能指标  $J$  是控制作用  $U(t)$  的函数,也就是函数  $U(t)$  的函数,这种以函数为自变量的函数称为泛函,所以  $J$  又称为性能泛函。有些文献中也把性能指标称为代价函数、目标函数等。

(4) 确定控制作用的容许范围  $\Omega$ , 即

$$U(t) \in \Omega \quad (1-25)$$

式中,  $\Omega$  是  $m$  维控制空间  $R^m$  中的一个集合。例如控制飞机的舵偏角是受限制的,控制电机的电流是受限制的,即  $|U(t)| \leq M$ , 这时控制作用属于一个闭集。当  $U(t)$  不受任何限制时,称它属于一个开集。以后将看到处理这两类问题的方法不相同。 $\Omega$  称为容许集合,属于  $\Omega$  的控制则称为容许控制。

(5) 按一定的方法计算出容许控制  $U(t)$  ( $U(t) \in \Omega$ ), 将它施加于用状态方程所描述的系统,使状态从初态  $X(t_0)$  转移到目标集  $S$  中某一个终态  $X(t_f)$ , 同时性能指标达到某种意义上的最优。

## 1.4 本书内容安排

本节阐述全书的章节安排,一方面可以使读者快速清晰地捕捉到最优控制



的理论框架,另一方面也为教学人员讲授该课程提供必要的方便。此外,本节概略介绍了本书编写宗旨,为读者使用本书提供若干建议。

### 1.4.1 章节结构

本书第2章~第10章阐述最优控制的理论基础,首先介绍容许控制属于开集情况下的最优控制求解方法,即利用变分法求解最优控制。而后,展开论述极小值原理,并利用其解决容许控制属于闭集情况下的最短时间问题、最少燃料问题和时间燃料综合最优问题。在变分法和极小值原理的基础上,本书阐述最优控制中应用最广泛的线性二次型问题,给出其状态调节器和伺服跟踪器的设计方案。在第5章,本书介绍最优控制理论中除极小值原理外的另一理论基石——动态规划,并着重分析其与极小值原理、线性二次型设计的密切关系。上述内容是控制工程界普遍认可的最适于教学的基本内容。为了确保最优控制课程的理论完整性,本书又介绍了部分与其相关的理论内容,如最优控制的计算方法、随机最优控制和面向不确定系统的最优控制——鲁棒控制等。

本书第11章~第16章介绍最优控制方法在工程设计中的应用。随着计算机技术的快速发展,高性能科学计算软件为最优控制的求解提供了极大方便。本书采用最有代表性的科学计算软件——MATLAB作为求解最优控制问题的专门工具,涉及的每一个工程实例都有详细的MATLAB代码供读者学习和使用。

图1-3所示为本书章节安排及作用。

### 1.4.2 使用建议

#### 1. 关于理论学习

最优控制理论是控制理论课程,掌握书中的理论性内容是十分重要的。但是,对于工学本科生或研究生而言,关键是能够应用所学理论解决实际问题。因此,本书在编写过程中,尽量避免大篇幅的数学推导,重点介绍最优控制理论的实际应用。建议读者在理论学习过程中,主动利用感性的物理思维去理解数学问题,反过来,在阅读工程应用实例时,积极尝试以抽象的数学思维去提炼物理问题。采用这种互补方式进行学习,对读者领悟最优控制方法和技术大有裨益。

#### 2. 关于内容取舍

本书的第2章~第5章是控制工程界公认的适于教学的最优控制理论内容,读者应该系统地了解其提出背景、主要结论和工程应用方法。其他理论内容是上述基本内容的有益补充,如果时间充裕,建议读者深入学习。