小课本大讲坛　小单元大提升
小方法大智慧　小技巧大成效

金星教育

总主编　钟　山

专题小课本
首席教师1对1辅导

专题全解®

ZHUANTIXIAOKEBEN
SHOUXIJIAOSHIYIDUIYIFUDAO

高中数学

A-06　ZHUANTIQUANJIE

不等式

中国出版集团　现代教育出版社

专题小课本

首席教师1对1辅导

专题全解®

高中数学

不等式

总主编 钟 山

主　编 程祥学

副主编 曹贤波 陈玉杰

编　委 唐软信

我的签名

中国出版集团 现代教育出版社

发现依靠眼光 选择成就未来

方法赢得速度 行动决定收获

金星国际教育集团·教学考试研究院

小单元专题学习法

首席教师1对1解决学生困惑的秘诀

小单元专题学习法，是现今中学生学习方法中最简捷易行，而且效果最佳的学习方法之一。

所谓“小单元”是指根据新课标和考纲对知识、能力的要求，把教材内容细分成的若干个相对独立的小板块，此小板块我们称之为“小单元”，可以说“小单元”是知识、方法、能力的结合体。

小单元专题学习，是先将知识点有机地分解、细化，使之简洁、具体，然后再逐点展开、循序渐进、逐步深化。这种方法既有利于学生依据自己的学习实际情况自学，又可与老师的教学进度同步，是一个完全可以自主掌握、灵活运用的好方法。

小单元专题学习法的实施方案可分三步：

一、小知识点，各个击破

在“小单元”中，知识点被具体化、简洁化，这样就会易学、易懂、易掌握，学生再也不用为知识内容的繁杂、例题的深难而苦恼。

二、重难疑点，重点探究

对于重难疑点，要进行探究式学习，通过探究学习要真正弄懂、搞清重点为什么是重点、难点难在哪里、疑点为什么有疑，为知识、能力的形成打下坚实的基础。

三、专题知识，系统细化

[illegible]

[illegible]

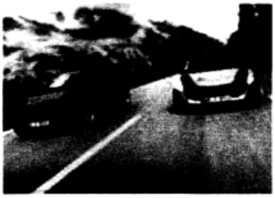
本丛书是以“小单元专题学习法”为依据编撰的图书。本丛书知识点、考点选编清晰准确，专题划分具体实用，内容讲解一步到位。相信本丛书对您调整学习策略，改善学习方法，提升知识运用能力和问题解决能力会有很大帮助；这本丛书会让您的学习变得轻松、快乐。相信本丛书会成为您实现理想的阶梯、梦想的桥梁。

目录 CONTENTS

名师寄语

专题学习导引

不等式问题在我们现实生活中无处不在，如话费的收缴；汽车的行驶速度与事故的分析；奶粉中蛋白质、脂肪的含量不低于多少；三聚氰氨的含量不高于多少；生产中的最优化问题……



这些都与我们的现实生活息息相关.

本专题，我们来研究不等式问题. 主要内容包括不等式的性质及解法、不等式的应用及证明两大部分.

不等式的性质部分主要讲解性质及应用，解法部分主要讲解一元二次不等式、分式不等式、高次不等式及与函数部分密切相关的指数、对数及无理不等式的解法，另外，还有绝对值不等式的解法.

不等式的应用包括线性规划问题、均值不等式及其应用，证明部分主要讲解综合法、分析法、比较法、反证法等常见的证明方法与技巧.

另外，本书还从不同角度讲解不等式中常见的思想方法及高考热点问题.

本专题知识点繁多，孰重孰轻？下面我们排一排，你便一目了然.

知识排行榜

重点排行榜	难点排行榜	易错点排行榜
①均值不等式与最值	①均值不等式的灵活应用	①基本不等式 $\sqrt{ab}\leqslant\frac{a+b}{2}$ 成立的条件
②简单线性规划的实际应用	②简单线性规划问题的解法	②不等式的证明
③一元二次不等式	③一元二次不等式的应用	③解分式不等式
④不等式的基本性质	④三个“二次”之间的关系	④求整点最优解
⑤不等式与不等关系	⑤不等式比较大小	⑤穿根法的使用

专题学法指南

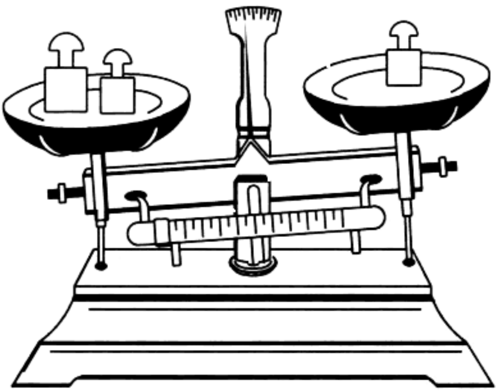
不等式不仅是中学数学的重点内容之一，具有变通灵活、应用广泛、知识综合、能力复合等特点，还是学习高等数学的重要工具，所以不等式一直是高考命题的重点. 在不等式中，一元二次不等式的解法、基本不等式的应用、利用线性规划知识解决最优化问题等是重点，也是高考热点，所以我们在学习中应把握好以下几点：

1. 熟练、准确地求解一元二次不等式，掌握三个“二次”之间的内在联系，是学好一元二次不等式的关键.

2. 基本不等式在求最值问题中有着广泛的应用，运用时应注意其“一正、二定、三相等”的前提适用条件.

3. 线性规划知识的应用充分体现了数形结合思想，除利用图解法解决最优化问题外，同时还应注意利用线性规划思想来求平面区域的面积、求参数字母的取值范围等.

4. 对于不等式与函数、数列等其他内容综合在一起的问题，在求解过程中要注意转化思想、分类讨论思想、数形结合思想等数学思想的应用.



[基础提升篇]

第一章　不等式的性质及解法

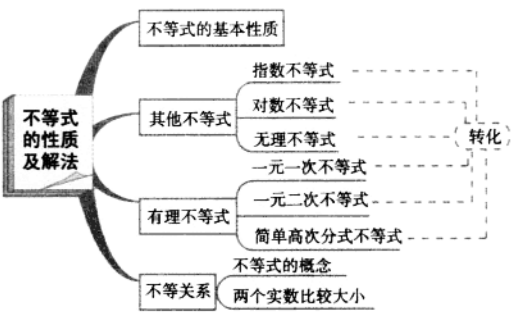
本章情景导学

随着人们生活水平的提高，越来越多的人喜欢外出旅行．那你知道《铁路旅行常识》的有关规定吗？

比如：身高在 1.1 米～1.5 米的儿童享受半价客票(以下称儿童票)，超过 1.5 米时应买全价票．每一成人旅客可免费带一名身高不足 1.1 米的儿童，超过一名时，超过的人数应买儿童票．旅客每人免费携带物品的标准是每件物品的外部尺寸长、宽、高之和不超过 160 厘米，杆状物品不超过 200 厘米，质量不得超过20 千克……

上面是关于购买火车票和乘火车时携带物品的外部尺寸的规定，你能用不等式表示这些规定吗？

本章思维导图



课标考纲要求

知识点	课标要求	考纲要求
1. 不等关系	了解	了解
2. 不等式的性质	理解并会应用	掌握
3. 一元二次不等式	会解，尝试设计求解的程序框图	会解，会设计求解的程序框图

第一单元 不等关系与不等式的性质

知识清单精解 ZHISHIQINGDAN JINGJIE

不等关系	数学上用不等式表示，常用符号：$<, >, \geqslant, \leqslant, \neq$
不等式的概念	(1)不等式的定义：用不等号表示不等关系的式子
	(2)同向不等式：$f(x)>0$ 与 $g(x)>0$ 叫同向不等式； 异向不等式：$f(x)>0$ 与 $g(x)<0$ 叫异向不等式
	(3)不等式的解集：使 $f(x)>0$(或 $f(x)<0$)成立的 x 的集合
	(4)同解不等式：若两个不等式的解集相同，则叫同解不等式
	(5)不等式的同解变形：一个不等式变形为与它同解的不等式
	(6)证明不等式：证明不等式成立的过程
	(7)解不等式：求不等式解集的过程
两实数比较大小的理论依据	(1)设 a、$b\in\mathbf{R}$，则①$a-b>0\Leftrightarrow a>b$；②$a-b=0\Leftrightarrow a=b$；③$a-b<0\Leftrightarrow a<b$
	(2)设 a、$b\in\mathbf{R}^+$，则①$\frac{a}{b}>1\Leftrightarrow a>b$；②$\frac{a}{b}=1\Leftrightarrow a=b$；③$\frac{a}{b}<1\Leftrightarrow a<b$
不等式的基本性质	(1)传递性：$a>b, b>c\Rightarrow a>c$
	(2)可加性：$a>b\Rightarrow a+c>b+c$
	(3)同向可加：$a>b, c>d\Rightarrow a+c>b+d$
	(4)可乘性：$a>b, c>0\Rightarrow ac>bc$；$a>b, c<0\Rightarrow ac<bc$
	(5)同向可乘：$a>b>0, c>d>0\Rightarrow ac>bd$
	(6)乘方法则：$a>b>0\Rightarrow a^n>b^n>0$($n\in\mathbf{Z}$ 且 $n>1$)
	(7)开方法则：$a>b>0\Rightarrow \sqrt[n]{a}>\sqrt[n]{b}>0$($n\in\mathbf{Z}$ 且 $n>1$)

考点题型例析

考点一　不等关系的判定

例1 已知 a、b 为非零实数且 $a<b$，则下列命题成立的是（　　）

A. $a^2<b^2$　　B. $ab^2>a^2b$　　C. $\frac{1}{ab^2}<\frac{1}{a^2b}$　　D. $\frac{b}{a}<\frac{a}{b}$

分析与解答

若 $a<b<0$ → 可得 $a^2>b^2$，知A不成立

若 $\begin{cases}ab<0,\\a<b\end{cases}$ → 可得 $a^2b>ab^2$，知B不成立

若 $a=1$，$b=2$，则 $\frac{b}{a}=2$，$\frac{a}{b}=\frac{1}{2}$ → 有 $\frac{b}{a}>\frac{a}{b}$，知D不成立

答案：C

例2 对于 $0<a<1$，给出下列四个不等式：①$\log_a(1+a)<\log_a\left(1+\frac{1}{a}\right)$；②$\log_a(1+a)>\log_a\left(1+\frac{1}{a}\right)$；③$a^{1+a}<a^{1+\frac{1}{a}}$；④$a^{1+a}>a^{1+\frac{1}{a}}$．其中成立的是（　　）

A. ①③　　B. ①④　　C. ②③　　D. ②④

分析与解答

因为 $0<a<1$ → $a<\frac{1}{a}$ → 从而 → $1+a<1+\frac{1}{a}$

所以 $\log_a(1+a)>\log_a\left(1+\frac{1}{a}\right)$

又因为 $0<a<1$ → 所以 → $a^{1+a}>a^{1+\frac{1}{a}}$ → 故②与④成立

答案：D

例3 若 $\frac{1}{a}<\frac{1}{b}<0$，则下列结论不正确的是（　　）

A. $a^2<b^2$　　B. $ab<b^2$　　C. $\frac{b}{a}+\frac{a}{b}>2$　　D. $|a|-|b|=|a-b|$

解析：取 $a=-1$，$b=-3$ 代入各选项验证知只有D不成立，故选D．　　答案：D

名师点拨

本题若用基本方法求解反而不好判断答案的正误，而采用特殊值法则简单、直接、正确率高．要注意特殊化思想的应用．

考点二　比较数或式大小的问题

例4 已知正数 a、b、c 成等比数列，比较 $a^2-b^2+c^2$ 与 $(a-b+c)^2$ 的大小．

分析：本题运用作差法解答．作差法的理论依据：$a-b>0\Leftrightarrow a>b$；$a-b=0\Leftrightarrow a=b$；$a-b<0\Leftrightarrow a<b$．应用作差法的一般步骤：作差→变形→判断→定论．

解：∵ $ac=b^2$，$b>0$，

∴ $(a^2-b^2+c^2)-(a-b+c)^2=a^2-b^2+c^2-a^2-b^2-c^2+2ab-2ac+2bc$

$=2ab-4b^2+2bc=2b(a-2b+c)=2b(\sqrt{a}-\sqrt{c})^2\geqslant 0$,

$\therefore a^2-b^2+c^2\geqslant(a-b+c)^2$.

例 5 设 a、b 都是正实数,m、$n\in\mathbf{N}^*$,且 $1\leqslant m\leqslant n$,比较 a^n+b^n 与 $a^{n-m}b^m+a^mb^{n-m}$ 的大小.

分析:a^n+b^n 与 $a^{n-m}b^m+a^mb^{n-m}$ 有公因式(按分组看)a^{n-m}、b^{n-m},可以考虑用作差法解答本题,提取公因式后,对正数 a 与 b 的大小顺序要进行分类讨论.

解:$\because$ a、b 都是正实数,m、$n\in\mathbf{N}^*$,且 $1\leqslant m\leqslant n$,

$\therefore a^n+b^n-(a^{n-m}b^m+a^mb^{n-m})$

$=a^{n-m}(a^m-b^m)+b^{n-m}(b^m-a^m)=(a^m-b^m)(a^{n-m}-b^{n-m})$.

当 $a=b>0$ 时,$a^n+b^n-(a^{n-m}b^m+a^mb^{n-m})=0$,即 $a^n+b^n=a^{n-m}b^m+a^mb^{n-m}$;

当 $a>b>0$ 时,$a^m>b^m$,$a^{n-m}\geqslant b^{n-m}$,$(a^m-b^m)(a^{n-m}-b^{n-m})\geqslant 0$,

即 $a^n+b^n\geqslant a^{n-m}b^m+a^mb^{n-m}$;

当 $b>a>0$ 时,$a^m<b^m$,$a^{n-m}\leqslant b^{n-m}$,$(a^m-b^m)(a^{n-m}-b^{n-m})\geqslant 0$,

即 $a^n+b^n\geqslant a^{n-m}b^m+a^mb^{n-m}$.

当 $m=n$ 时,$a^{n-m}=b^{n-m}=1$,故 $a^n+b^n=a^{n-m}b^m+a^mb^{n-m}$.

综上所述,有 $a^n+b^n\geqslant a^{n-m}b^m+a^mb^{n-m}$.

名师点拨

分类讨论是一种重要的解题方法,也是当前高考命题的热点内容,在进行分类讨论时,要找准分类讨论的标准,做到不重不漏.

例 6 已知 a、$b\in\mathbf{R}^+$,比较 $\frac{a+b}{2}$ 与 $(a^bb^a)^{\frac{1}{a+b}}$ 的大小.

分析:本题可运用作商比较法.作商法的理论依据:若 a、$b\in\mathbf{R}^+$,则 $\frac{a}{b}>1\Leftrightarrow a>b$;$\frac{a}{b}=1\Leftrightarrow a=b$;$\frac{a}{b}<1\Leftrightarrow a<b$.应用作商法的一般步骤:作商→变形→判断→定论.

解:$\because \dfrac{\sqrt{ab}}{(a^bb^a)^{\frac{1}{a+b}}}=a^{\frac{1}{2}-\frac{b}{a+b}}b^{\frac{1}{2}-\frac{a}{a+b}}=\left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{a-b}{2(a+b)}}$,$a$、$b\in\mathbf{R}^+$,

$\therefore$ 若 $a\geqslant b>0$,则 $\frac{a}{b}\geqslant 1$,$a-b\geqslant 0$,根据指数函数的性质有 $\left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{a-b}{2(a+b)}}\geqslant 1$;

若 $0<a<b$,则 $0<\frac{a}{b}<1$,$a-b<0$,根据指数函数的性质有 $\left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{a-b}{2(a+b)}}>1$.

$\therefore \dfrac{\sqrt{ab}}{(a^bb^a)^{\frac{1}{a+b}}}\geqslant 1$,$\therefore \sqrt{ab}\geqslant(a^bb^a)^{\frac{1}{a+b}}$.

又 $\because \frac{a+b}{2}\geqslant\sqrt{ab}$,$\therefore \frac{a+b}{2}\geqslant(a^bb^a)^{\frac{1}{a+b}}$.

规律小结

一般在比较两个多项式的大小时，常用作差比较法，在比较分式或指数式的大小时，常用作商比较法.比较法的关键是第二步的变形，一般说来，变形越彻底越有利于下一步的判断.

变式训练 1 若 $x<y<0$，试比较 $(x^2+y^2)(x-y)$ 与 $(x^2-y^2)(x+y)$ 的大小. [答案见 P14]

变式训练 2 设 $a>0,b>0$，且 $a\neq b$，试比较 $a^a b^b$ 与 $a^b b^a$ 的大小. [答案见 P15]

例 7 某家庭准备利用假期到某地旅游，有甲、乙两家旅行社提供两种优惠方案，甲旅行社的方案是：如果户主买全票一张，其余人可享受五五折优惠；乙旅行社的方案是：家庭旅游算集体票，可按七五折优惠.如果甲、乙旅行社的原价相同，请问该家庭选择哪家旅行社外出旅游合算？

解：设该家庭除户主外还有 x 人参加旅游，甲、乙两旅行社收费总金额分别为 y_1 元和 y_2 元，一张全票价格为 a 元，那么 $y_1=a+0.55ax$，$y_2=0.75(x+1)a$.

$\therefore y_1-y_2=a+0.55ax-0.75(x+1)a=0.2a(1.25-x)$.

$\therefore$ 当 $x>1.25$ 时，$y_1<y_2$；当 $x<1.25$ 时，$y_1>y_2$.

又 $\because x$ 为正整数，$\therefore$ 当 $x=1$ 时，即两口之家应选择乙旅行社；当 $x\geqslant 2(x\in\mathbf{N})$ 时，即三口或多于三口之家应选择甲旅行社.

> **名师点拨**
> 解决此类实际问题只需建立数学模型，利用作差法即可解决.

考点三 利用性质证明不等式

例 8 已知 $a>b>0,c>d>0$，求证：$\sqrt{\dfrac{a}{d}}>\sqrt{\dfrac{b}{c}}$.

分析：应用不等式的性质定理及其推论证得结论.

证明：$\because c>d>0$，$\therefore cd>0$，

$\therefore \dfrac{c}{cd}>\dfrac{d}{cd}>0$，即 $\dfrac{1}{d}>\dfrac{1}{c}>0$.

$\because a>b>0$，$\therefore a\cdot\dfrac{1}{d}>b\cdot\dfrac{1}{c}$，即 $\dfrac{a}{d}>\dfrac{b}{c}>0$，

$\therefore \sqrt{\dfrac{a}{d}}>\sqrt{\dfrac{b}{c}}$.

> **名师点拨**
> 对于一些简单不等式的证明，要利用不等式的基本性质等知识进行严密的逻辑推理.

变式训练 3 已知 $a>b>0,c<d<0,e>0$，求证：$\dfrac{e}{a-c}<\dfrac{e}{b-d}$. [答案见 P15]

考点四 利用性质探求命题成立的条件

例 9 已知三个不等式：①$ab>0$；②$bc>ad$；③$\dfrac{c}{a}>\dfrac{d}{b}$.以其中两个作为条件，余下一个作为结论，则可以组成正确命题的个数是(　　)

A. 0　　B. 1　　C. 2　　D. 3

分析与解答

- 命题1　若$ab>0$，$\frac{c}{a}>\frac{d}{b}$，则$bc>ad$
- 命题2　若$ab>0$，$bc>ad$，则$\frac{c}{a}>\frac{d}{b}$
- 命题3　若$\frac{c}{a}>\frac{d}{b}$，$bc>ad$，则$ab>0$

答案：D

例10　已知 $a>b$ 与 $a-\frac{1}{a}>b-\frac{1}{b}$ 同时成立，则 ab 应满足的条件是________.

分析与解答

- 由　$a-\frac{1}{a}>b-\frac{1}{b}$　得　$\left(a-\frac{1}{a}\right)-\left(b-\frac{1}{b}\right)=\frac{(a-b)(ab+1)}{ab}>0$
- 由　$a>b$，即$a-b>0$　及　$\frac{(a-b)(ab+1)}{ab}>0$　$ab(ab+1)>0$
- 视　ab为一个整体　则　$ab>0$或$ab<-1$

答案：$ab>0$ 或 $ab<-1$

变式训练 4　适当增加条件，使下列各命题成立.

(1)若 $a>b$，则 $-ac<-bc$；

(2)若 $a>b$，则 $\frac{1}{a}<\frac{1}{b}$；

(3)若 $a>b$，$c>d$，则 $ac>bd$；

(4)若 $a<b$，则 $a^2<b^2$.　[答案见 P15]

方法技巧突破

FANGFAJIQIAOTUPO

一　特殊值法

方法指南：特殊值法是一种很重要的数学方法，特殊值的选取能达到化繁为简的目的.用常规方法难以解决的问题，用特殊值法可能会迅速得到答案，此法多用于解答客观题或用在探索性问题中寻求结论.特别是在比较大小的问题中，此方法显得尤为重要.

典例 1　若 a、b 是正数，则 $\frac{a+b}{2}$、$\sqrt{ab}$、$\frac{2ab}{a+b}$、$\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}$ 这四个数的大小顺序是(　　)

A. $\sqrt{ab}\leqslant\frac{a+b}{2}\leqslant\frac{2ab}{a+b}\leqslant\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}$　　B. $\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}\leqslant\sqrt{ab}\leqslant\frac{a+b}{2}\leqslant\frac{2ab}{a+b}$

C. $\frac{2ab}{a+b}\leqslant\sqrt{ab}\leqslant\frac{a+b}{2}\leqslant\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}$　　D. $\sqrt{ab}\leqslant\frac{a+b}{2}\leqslant\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}\leqslant\frac{2ab}{a+b}$

分析与解答
- 可用特殊值法求解：取$a=1,b=2$，则$\frac{a+b}{2}=\frac{3}{2}$
- 且还有：$\frac{2ab}{a+b}=\frac{4}{3}$，$\sqrt{ab}=\sqrt{2}$，$\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}=\sqrt{\frac{1+4}{2}}=\sqrt{\frac{5}{2}}$
- 显然：$\frac{4}{3}<\sqrt{2}<\frac{3}{2}<\sqrt{\frac{5}{2}}$

答案：C

二　分类讨论的方法

方法指南：解含参数的不等式是个难点，解决这类问题的通法便是分类讨论.

典例 2　设$0<x<1,a>0$且$a\neq\frac{1}{3}$，试比较$|\log_{3a}(1-x)^3|$与$|\log_{3a}(1+x)^3|$的大小.

分析：本题应对a分类讨论，即讨论$a>\frac{1}{3}$和$0<a<\frac{1}{3}$两种情况.

解：$\because 0<x<1$，$\therefore$ ①当$3a>1$，即$a>\frac{1}{3}$时，

$|\log_{3a}(1-x)^3|-|\log_{3a}(1+x)^3|=|3\log_{3a}(1-x)|-|3\log_{3a}(1+x)|$
$=3[-\log_{3a}(1-x)-\log_{3a}(1+x)]=-3\log_{3a}(1-x^2)$.
$\because 0<1-x^2<1$，$\therefore -3\log_{3a}(1-x^2)>0$. $\therefore |\log_{3a}(1-x)^3|>|\log_{3a}(1+x)^3|$.

②当$0<3a<1$，即$0<a<\frac{1}{3}$时，

$|\log_{3a}(1-x)^3|-|\log_{3a}(1+x)^3|=3[\log_{3a}(1-x)+\log_{3a}(1+x)]$
$=3\log_{3a}(1-x^2)>0$. $\therefore |\log_{3a}(1-x)^3|>|\log_{3a}(1+x)^3|$.
综上所述，$|\log_{3a}(1-x)^3|>|\log_{3a}(1+x)^3|$.

规律小结

在进行分类讨论时，要把握好分类原则，进行合理、恰当的讨论；讨论要在允许的取值范围内；讨论时要做到不重不漏；解题结束时，要加上综述进行总结.

变式训练 5　已知$x>0$且$x\neq1,m>n>0$，比较$x^m+\frac{1}{x^m}$与$x^n+\frac{1}{x^n}$的大小.

[答案见 P15]

三　比较法

方法指南：对于比较大小问题，有些若直接作差，差的正负不易判定，如果先进行等价转化，再求差，或者是转化为与中间量比较，则会容易解决.

典例 3　已知$a\geqslant1$，试比较$M=\sqrt{a+1}-\sqrt{a}$和$N=\sqrt{a}-\sqrt{a-1}$的大小.

分析：若直接求差可得$M-N=\sqrt{a+1}+\sqrt{a-1}-2\sqrt{a}$，此式的正负不易判定，若先将$M$、$N$通过分子（或分母）有理化，然后再求差，就容易多了.

解：$\because M-N=(\sqrt{a+1}-\sqrt{a})-(\sqrt{a}-\sqrt{a-1})=\frac{1}{\sqrt{a+1}+\sqrt{a}}-\frac{1}{\sqrt{a}+\sqrt{a-1}}$

$$=\frac{\sqrt{a-1}-\sqrt{a+1}}{(\sqrt{a+1}+\sqrt{a})(\sqrt{a}+\sqrt{a-1})}<0,\therefore M<N.$$

规律小结

本题是先利用分子有理化再判断差的符号.一般来说,涉及偶次根式的问题,分子或分母有理化是变形中常用的技巧.

▶典例 4 已知 $x\in\mathbf{R}$,试比较 $2x^2-3x+3$ 与 $\frac{2}{2^x+2^{-x}}$ 的大小.

分析:如果作差变形,由于"x"既在底数上,又在指数上,因而无法进行因式分解,我们应该想办法找到一个中间数,以它作为媒介来传递,因而可分别求出两个函数 $y=2x^2-3x+3$ 与 $y=\frac{2}{2^x+2^{-x}}$ 的最值.

解:$\because\ 2x^2-3x+3=2\left(x-\frac{3}{4}\right)^2+\frac{15}{8}\geqslant\frac{15}{8}$,

$2^x+2^{-x}=(\sqrt{2^x}-\sqrt{2^{-x}})^2+2\geqslant2$,即 $\frac{2}{2^x+2^{-x}}\leqslant1$,

又 $\because\ \frac{15}{8}>1$,$\therefore\ 2x^2-3x+3>\frac{2}{2^x+2^{-x}}$.

名师点拨

在比较两个数(或式)的大小或证明不等式时,常选择中间量 b,通过比较 a 与 b,b 与 c 来比较 a 与 c 的大小,即 $a>b,b>c\Rightarrow a>c$.需要注意的是:只有同向不等式才具有传递性.

▶典例 5 已知 $a>0,b>0$,试比较 $M=\sqrt{a}+\sqrt{b}$ 与 $N=\sqrt{a+b}$ 的大小.

解:$\because\ M^2-N^2=(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2-(\sqrt{a+b})^2=a+b+2\sqrt{ab}-a-b=2\sqrt{ab}>0$,

$\therefore\ M>N$.

规律小结

当两个正数比较大小时,如果直接作差有困难或无法比较,可采用平方、立方后再间接作差,此法常用于根式间的大小比较.

易错易混辨析

YICUOYIHUNBIANXI

利用性质求取值范围易犯的错误

例 1 若 α、β 满足 $\begin{cases}-1\leqslant\alpha+\beta\leqslant1,&①\\1\leqslant\alpha+2\beta\leqslant3,&②\end{cases}$ 试求 $\alpha+3\beta$ 的取值范围.

错解:不等式①乘 -1,得 $-1\leqslant-\alpha-\beta\leqslant1$, ③

②+③,得 $0\leqslant\beta\leqslant4$. ④

不等式①乘 -2,得 $-2\leqslant-2\alpha-2\beta\leqslant2$, ⑤

②+⑤,得 $-1\leqslant-\alpha\leqslant5$,即 $-5\leqslant\alpha\leqslant1$. ⑥

君子义以为上,君子有勇而无义为乱,小人有勇而无义为盗。

⑥$+3\times$④，得$-5\leqslant\alpha+3\beta\leqslant13$.

错因分析：错解中先求出α、β的范围，再求$\alpha+3\beta$的范围. 但α、β同时取最小值时，$\alpha+3\beta$才能取最小值-5，而事实上α、β不能同时取最小值（最大值也有类似的情况），因此所求的范围扩大了.

正解：设$\alpha+3\beta=x(\alpha+\beta)+y(\alpha+2\beta)=(x+y)\alpha+(x+2y)\beta$.

设$\begin{cases}x+y=1,\\x+2y=3,\end{cases}$可得$\begin{cases}x=-1,\\y=2.\end{cases}$

$\because -1\leqslant-(\alpha+\beta)\leqslant1, 2\leqslant2(\alpha+2\beta)\leqslant6$，$\therefore$ 两式相加，得$1\leqslant\alpha+3\beta\leqslant7$.

例2 设$f(x)=ax^2+bx$，若$1\leqslant f(-1)\leqslant2$，$2\leqslant f(1)\leqslant4$，求$f(-2)$的取值范围.

错解：由$\begin{cases}1\leqslant a-b\leqslant2,\\2\leqslant a+b\leqslant4\end{cases}$得$\begin{cases}\dfrac{3}{2}\leqslant a\leqslant3,\\0\leqslant b\leqslant\dfrac{3}{2}.\end{cases}$由此可得$3\leqslant f(-2)=4a-2b\leqslant12$.

$\therefore f(-2)$的取值范围是$[3,12]$.

错因分析：利用不等式性质可以求某些代数式的取值范围，但应注意两点：一是必须严格运用不等式的性质；二是在多次运用不等式的性质时有可能扩大了变量的取值范围，要注意、谨慎. 错因在于运用同向不等式相加这一性质时，不是等价变形，导致$f(-2)$的取值范围扩大. 另外，本题也可用线性规划求解，题中a、b不是相互独立的，而是相互制约的，故不可分割开来. 先建立待求范围的整体与已知范围的整体的等量关系，最后通过"一次性"不等式关系的运算求得待求整体的范围是避免错误的一条途径.

正解：方法1：设$f(-2)=mf(-1)+nf(1)$（m、n为待定系数），

则$4a-2b=m(a-b)+n(a+b)$，即$4a-2b=(m+n)a+(n-m)b$，

于是$\begin{cases}m+n=4,\\n-m=-2,\end{cases}$解得$\begin{cases}m=3,\\n=1.\end{cases}$ $\therefore f(-2)=3f(-1)+f(1)$.

又$\because 1\leqslant f(-1)\leqslant2, 2\leqslant f(1)\leqslant4$，

$\therefore 5\leqslant3f(-1)+f(1)\leqslant10$，即$5\leqslant f(-2)\leqslant10$.

方法2：由$\begin{cases}f(-1)=a-b,\\f(1)=a+b\end{cases}$得$\begin{cases}a=\dfrac{1}{2}[f(-1)+f(1)],\\b=\dfrac{1}{2}[f(1)-f(-1)].\end{cases}$

$\therefore f(-2)=4a-2b=3f(-1)+f(1)$.

又$\because 1\leqslant f(-1)\leqslant2, 2\leqslant f(1)\leqslant4$，

$\therefore 5\leqslant3f(-1)+f(1)\leqslant10$，即$5\leqslant f(-2)\leqslant10$.

纠错练习

1. 已知$-1<a+b<3$且$2<a-b<4$，则$2a+3b$的取值范围是（　　）

A. $\left(-\frac{13}{2},\frac{17}{2}\right)$ B. $\left(-\frac{7}{2},\frac{11}{2}\right)$ C. $\left(-\frac{7}{2},\frac{13}{2}\right)$ D. $\left(-\frac{9}{2},\frac{13}{2}\right)$

2. 设二次函数 $y=f(x)$ 的图象过原点且 $1\leqslant f(-2)\leqslant 2$，$3\leqslant f(1)\leqslant 4$，求 $f(2)$ 的取值范围.

单元优化训练

DANYUANYOUHUAXUNLIAN

单元基础提升

1. 若 $a<0$，$-1<b<0$，则 a、ab、ab^2 之间的大小关系是（　　）

A. $a>ab>ab^2$ B. $ab^2>ab>a$ C. $ab>a>ab^2$ D. $ab>ab^2>a$

2. 若 $a<b<0$，则下列不等关系中不能成立的是（　　）

A. $a^2>b^2$ B. $|a|>|b|$ C. $\frac{1}{a}>\frac{1}{b}$ D. $\frac{1}{a-b}>\frac{1}{a}$

3.（高考变式题）设 a、b 都是正实数，且 $a\neq b$，$n\in\mathbf{N}^*$，则 $ab^n+a^nb-a^{n+1}-b^{n+1}$ 的值（　　）

A. 恒为正 B. 恒为负

C. 与 a、b 的大小有关 D. 与 n 是奇数或偶数有关

4.（概念应用题）已知 a、b、$c\in\mathbf{R}$，则下面推理中正确的是（　　）

A. $a>b\Leftrightarrow am^2>bm^2$ B. $\frac{a}{c}>\frac{b}{c}\Rightarrow a>b$

C. $a^3>b^3$，$ab>0\Rightarrow\frac{1}{a}<\frac{1}{b}$ D. $a^2>b^2$，$ab>0\Rightarrow\frac{1}{a}<\frac{1}{b}$

5. 若不等式 $[(1-a)n-a]\lg a<0$ 对于任意正整数 n 恒成立，则实数 a 的取值范围是（　　）

A. $\{a\mid a>1\}$ B. $\left\{a\,\middle|\,0<a<\frac{1}{2}\right\}$

C. $\left\{a\,\middle|\,0<a<\frac{1}{2}\text{或 }a>1\right\}$ D. $\left\{a\,\middle|\,0<a<\frac{1}{3}\text{或 }a>1\right\}$

6. 设 $a=\log_{\frac{1}{2}}3$，$b=\left(\frac{1}{3}\right)^{0.2}$，$c=2^{\frac{1}{3}}$，则（　　）

A. $a<b<c$ B. $c<b<a$ C. $c<a<b$ D. $b<a<c$

7. 某地 2009 年第一季度应聘和招聘人数排行榜前 5 个行业的情况列表如下：

行业名称	计算机	机械	营销	物流	贸易
应聘人数	215 830	200 250	154 676	74 570	65 280

行业名称	计算机	营销	机械	建筑	化工
招聘人数	124 620	102 935	89 115	76 516	70 436