

Step up to

Mathematica 7

Mathematica 7

实用教程

张韵华 王新茂◎编著

中国科学技术大学出版社

Step up to

Mathematica 7

Mathematica 7

实用教程



张韵华 王新茂◎编著

中国科学技术大学出版社

内 容 简 介

符号计算软件是能做高等数学和初等数学题目、画数学函数和数据的图形以及编写程序的应用软件系统。Mathematica 以其友好的界面而成为流行的符号计算软件。在符号计算系统的软件环境下我们可以轻松愉快地用计算机进行数学公式推导、数学计算和图形变换。

本书内容包括:如何应用 Mathematica 7 做因式分解、数项求和、函数极限、不定积分、求解偏微分方程、求解线性方程组、计算矩阵的特征值和特征向量、矩阵分解、插值、拟合和统计等数学运算;如何用函数、数据、图元素画图;如何自定义函数和写程序构建程序包。

本书可作为高等院校学生学习 Mathematica 的教材,数学实验和数学建模课程的辅助教材,数学教学的辅助工具,科研和工程技术人员科学计算的参考教材。

图书在版编目(CIP)数据

Mathematica 7 实用教程/张韵华,王新茂编著. —合肥:中国科学技术大学出版社, 2011. 1

ISBN 978-7-312-02739-0

I. M… II. ①张… ②王… III. 数学—应用软件, Mathematica 7—高等学校—教材 IV. O245

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2010)第 211087 号

出版 中国科学技术大学出版社

安徽省合肥市金寨路 96 号, 邮编: 230026

网址: <http://press.ustc.edu.cn>

印刷 合肥华星印务有限责任公司

发行 中国科学技术大学出版社

经销 全国新华书店

开本 710 mm×960 mm 1/16

印张 20

字数 403 千

版次 2011 年 1 月第 1 版

印次 2011 年 1 月第 1 次印刷

定价 33.00 元

前 言

符号计算系统是一个展示和应用数学知识的系统,一个集成化的、计算机化的数学软件系统,一个在大学和研究所流行的应用软件。在符号计算系统环境下我们可以轻松愉快地用计算机进行数学公式推导、数值计算和图形变换。

目前 Mathematica 用户达到数百万,包括有世界 500 强公司、国家级的研究实验室和世界各地顶尖的大学。2004 年的三位诺贝尔物理学奖得主都是 Mathematica 的忠实用户。在北美、欧洲和日本都有大学将 Mathematica 作为大学生在校必修的计算机课程之一。

1994 年,中国科学技术大学成为了国内最早为本科生开设符号计算语言 Mathematica 课程的两所高校之一,该课程现已作为数学系和全校本科生公共选修课,已有 20 届数学系学生和 9 届物理、化学、生物、地空、信息和管理等专业的理工科学生选修了本课程。

这些聪明的学生不但很快掌握了使用方法,还结合所学专业做出了不少值得记录在案的习题。他们已将 Mathematica 用在数学课程学习、数学建模竞赛、大学生研究计划和毕业论文中。

20 世纪 90 年代中期,Mathematica 主要作为“数学建模”竞赛的计算工具,由于符号计算软件在数学表示和函数绘图上的优势,近年来多所高等院校用它作为“数学实验”课程的主要工具和高等数学课程教学改革的支持平台,它的应用范围正在扩展之中。

为了课程教学需要,经过几年的教学实践,我们编写了《Mathematica(1.2 版)符号计算实用教程》(中国科学技术大学出版社,1998 年 9 月)和《符号计算系统 Mathematica(4.0 版)教程》(科学出版社,2001 年 11 月)。这两本书荣幸地被一些高校选用,也得到了读者很多有益的反馈建议。在此感谢选用过这两本教材的教师、学生和读者!

在本教材中一方面按照数学内容的进程,从初等数学到高等数学,介绍如何调用 Mathematica 的函数做初等数学、微积分、线性代数和微分方程中的计算题,验证数学公式的推导,演示函数图形,给学生提供了重温高等数学和探索数学的空间,让高年级本科生和研究生在专业课学习中“会用”和“用好”高等数学;另一方面

按照计算机语言的结构,从简单的命令行输入到构建复杂的程序包,学习过程编程和函数编程。

本书的绪论部分对符号计算系统和 Mathematica 作一简介,以实例介绍 Mathematica 的风采以及怎样获取帮助;第 1 章介绍 Mathematica 中的数值类型和基本量;第 2 章至第 4 章按初等数学到高等数学的内容排列,介绍如何求和、计算极限、计算不定积分、求解偏微分方程、求解线性方程组、计算矩阵的特征值和特征向量以及矩阵分解等数学运算;第 5 章介绍数值计算方法;第 6 章介绍二维和三维的函数作图、数据画图、图元素绘图以及系统程序包中各类画图函数(第 1 章到第 6 章介绍如何使用系统的函数,重在调用系统的丰富的函数资源);第 7 章和第 8 章介绍定义函数方式和编写程序构建程序包。

特别感谢李翊神教授,由于他对 Mathematica 的推荐和倡导,才让作者有了写作本书的想法和动力。

感谢季孝达教授对出版《Mathematica(1.2 版)》给予的帮助和支持!

感谢中国科大 9601 练恒(布朗大学博士)、刘洋(香港科大博士)、刘琼林(中国科大博士)、龚隽(中国科大研究生)为《符号计算系统 Mathematica(4.0 版)教程》出版所做的工作!

感谢 Wolfram 公司中国区商务发展助理陈向群女士、出版项目专业人士 Maryka Baraka 对出版本书给予的帮助和支持!

感谢中国科学技术大学教务处和出版社在本书出版工作中给予的支持!

编 者
2010.7

目 录

前言	(i)
绪论	(1)
0.1 符号计算系统简介	(1)
0.2 Mathematica 简介	(4)
0.3 初识 Mathematica	(6)
0.4 获取帮助	(11)
第 1 章 Mathematica 的基本量	(17)
1.1 数的表示及其函数	(17)
1.2 字符串	(22)
1.3 变量	(27)
1.4 列表	(31)
1.5 表达式	(45)
习题 1	(48)
第 2 章 初等函数运算	(50)
2.1 多项式运算	(50)
2.2 三角函数运算	(60)
2.3 方程运算	(62)
2.4 求和与乘积运算	(67)
习题 2	(69)
第 3 章 微积分	(71)
3.1 求极限	(71)
3.2 微商和微分	(73)
3.3 不定积分和定积分	(77)
3.4 幂级数	(83)
3.5 微分方程	(87)
3.6 积分变换	(91)

习题 3	(95)
第 4 章 线性代数	(98)
4.1 矩阵的定义	(98)
4.2 矩阵的基本运算	(109)
4.3 矩阵的高级运算	(117)
习题 4	(127)
第 5 章 数值计算方法	(130)
5.1 插值	(130)
5.2 曲线拟合	(137)
5.3 数值积分	(142)
5.4 非线性方程求根	(146)
5.5 函数极值	(148)
5.6 数据统计和分析	(151)
5.7 微分方程数值解	(159)
5.8 离散傅立叶变换	(163)
5.9 线性规划	(164)
习题 5	(166)
第 6 章 在 Mathematica 中作图	(169)
6.1 二维图形	(169)
6.2 三维图形	(186)
6.3 图形动画和声音播放	(196)
6.4 等值线和密度图	(209)
6.5 用图元作图	(218)
6.6 特殊作图命令	(229)
习题 6	(248)
第 7 章 自定义函数和模式替换	(251)
7.1 自定义函数	(252)
7.2 模式替换	(260)
7.3 给模式附加条件	(264)
7.4 参数数目可变函数	(268)
7.5 函数的属性与属性定义	(270)
7.6 表达式部件操作	(273)
7.7 纯函数	(276)

习题 7	(278)
第 8 章 程序设计	(280)
8.1 条件语句	(280)
8.2 循环语句	(284)
8.3 转向语句	(288)
8.4 程序模块	(290)
8.5 程序调试	(294)
8.6 程序包	(296)
习题 8	(300)
附录	(302)
参考文献	(312)

绪 论

0.1 符号计算系统简介

◇ 数值计算与符号计算

从单纯计算到文字处理、图形变换、多媒体表示,计算机正在改变着我们的生活方式和生活方式。在 19 世纪之前,计算是数学家工作的主要内容,高斯对于谷神星轨道的计算和提出最小二乘拟合的方法便是一个例子。在 19 世纪之后,数学研究发生了重大改变,计算的色彩日渐淡薄,数学家对数学理论和数学结构远比对数学问题的求解计算更为关心。现代电子计算机问世以后,情况又发生了变化,利用计算机求解数学问题或证明数学定理成为行之有效的新方法。例如,世界上最早的电子计算机之一 ENIAC(Electronic Numerical Integrator and Computer)是为美国军方提供准确而及时的弹道火力表服务的,其中涉及到求解大量复杂的非线性方程组和数值积分,这是用计算机求解数学问题的典型范例。又例如,组合数学中的著名问题“四色定理”是在利用计算机编程对各种可能情形加以枚举之后,从而得到证明的。

数值计算过程是常量值、变量值、函数值到数值的变换,一个或多个数值到一个数值的变换,一个多对一的变换。例如:计算 $y = \sin 10 + \ln 10$ 。其结果是 1.75856。在计算机高级语言中,算术表达式由常量、变量、函数和运算符等组成,算术表达式的值为某一精度范围内的数值。计算各种类型表达式的值是计算机高级语言的主要工作。

符号计算过程是常量、变量、函数和计算公式到常量、变量、函数和计算公式的一个变换,一个多对多的变换。它能完成数学表达式到数学表达式的精确运算和数值计算。例如:计算一个初等函数的不定积分,其结果被积函数的原函数仍然是初等函数,

$$\iint (x^2 + y^3) \cos x dx dy = 8xy \cos x + y(4x^2 + y^3 - 8) \sin x$$

符号计算比数值计算对于计算机的硬件和软件提出了更高的要求。和数值计算一

样,设计有效的算法也是符号计算的核心。就算法而言,符号计算比数值计算能继承更多的、更丰富的数学遗产,古典数学中的许多算法仍然是核心算法的成员,当代数学的算法成果也被不断地充实到符号计算系统中。

◇ 符号计算系统

随着数学和计算机科学的发展,一门称为“符号计算”或“计算机代数”的交叉学科已经形成了。它的发展与代数计算、算法设计、机器学习、自动推理等紧密联系在一起。符号计算软件充分表达了这个学科的最新算法成果和应用。通用符号计算软件已经成为解决各种科学工程计算问题的有力工具。

符号计算系统是一个表示数学知识和数学工具的系统,一个集成化的数学软件系统。符号计算系统由系统内核、符号计算语言和若干软件包组成。一个符号计算系统通常包括数值计算、符号计算、图形演示和程序设计语言 4 个部分。并将各种功能融合在一起,易于保持数学公式推导、数值计算和图形可视化的一致性和连贯性。

符号计算系统的数学对象几乎涉及所有数学基础学科,从初等数学到高等数学,包括各类数学表达式的化简、四则运算、因式分解、极限、导数、积分、级数、常微分方程、偏微分方程、行列式、线性方程组以及各种向量和矩阵运算等。

符号计算已成功地应用于几乎所有的科学技术和工程领域,其中包括数学理论领域。由于它能够正确地完成人在短时间内无法完成的公式推导计算,使得不少研究领域的前沿向前推移。

◇ 符号计算的应用

• 数学公式的推导工具

在 19 世纪,法国天文学家 Charles Delaunay 没有以太阳而是以月亮的位置作为计算时间的函数。从 1847 年到 1867 年用了 20 年的时间,他完成并发表了长达数百页的计算方面的文章,推导了近 4 万个公式。1970 年 MIT 的一个研究小组用符号计算软件对 Delaunay 的计算公式进行复查,只用了 20 小时的 CPU 时间便完成了。复查表明原先的计算只有 3 个错误,其中一个错误是某项的系数是 3 而不是 2,另外两个错误是由由此而引起的。

科研中常常进行公式推导和公式验证,有时由于设计模型的复杂性,在手工推导中既有数学理论的深度又有数学推导运算不菲的工作量。例如:一个 7 个自由度行走的机器人,从运动方程求解加速度时,包括大量的多维转换公式推导,可以有上百项,甚至上千项。这时只能用符号计算系统才能迅速、准确的求解;在推导有限元的刚度矩阵中、在计算行列式的展开和合并中,都可以用任何一个符号计算系统来完成公式演算。这样的例子还有很多,在数论、群论、李代数的理论研究中,也有专门的符号计算软件供数学家使用。用符号计算系统进行公式推导,既正确

又迅速。它帮助科研人员摆脱了理论推导中繁琐的一面,把更多的精力放在创造性的思维中。

- 理论研究的实验工具

在物理、化学和生物学等许多自然科学领域中,实验是科学研究的一个方法。符号计算系统的出现为数学领域和一些理论研究领域提供了实验工具。数学的创造大多来自直觉,用符号计算系统对设想的定理结论直接验证,或将待研究的方程绘出图形以观察几何性质和变化趋势,常常会给科研人员带来不同程度的灵感和启发,他们将数学实验的结果进行理论深化并加以严格证明,甚至会得到意想不到的收获。

- 数学教学的辅助工具

在符号计算语言的应用初期,使用者主要是科技工作者和相关专业人士。目前已广泛地用于教学中,是计算机辅助教学的良好环境。它已成为国内很多高校“数学实验”和“数学建模”课程的有力支撑工具。目前国内外多所高校数学教材中都包括用符号计算语言做数学习题的内容。在高等数学课程教学中,系统提供的数学函数的几何直观帮助学生理解数学的内涵,培养学生的空间想像能力。它“轻松做数学题”的能力可以激发学生“学数学”的兴趣,提高学生用计算机软件“用数学”的能力。

◇ 符号计算系统软件简介

符号计算系统一般可分为专用系统和通用系统两大类。通用符号计算系统具有数值计算、符号计算、图形演示、程序设计等功能。目前比较流行的通用符号计算系统如表 0-1 所示(按字母顺序排列)。

表 0-1 目前比较流行的通用符号计算系统

软件名称	说 明
Axiom	免费开源软件, http://axiom-developer.org
CoCoA	免费开源软件, 交换代数, http://cocoa.dima.unige.it
Euler	免费开源软件, http://eumat.sourceforge.net/
GAP	免费开源软件, 计算群论, http://www.gap-system.org/
Java Algebra System	免费开源软件, 交换可解多项式、Gröbner 基, http://krum.rz.uni-mannheim.de/jas
Macaulay2	免费开源软件, 代数几何、交换代数, http://www.math.uiuc.edu/Macaulay2
Maple	商业软件, http://www.maplesoft.com

续表

软件名称	说 明
Mathematica	商业软件, http://www.wolfram.com
Maxima	免费开源软件, http://maxima.sourceforge.net
Reduce	免费开源软件, http://reduce-algebra.sourceforge.net
Sage	免费开源软件, http://www.sagemath.org
Singular	免费开源软件, 交换代数、代数几何、奇点理论, http://www.singular.uni-kl.de

符号计算系统通常有两种运行方式:一种是交互式,每输入一个命令,就执行相应的数学计算,类似于使用计算器;另一种方式是写一段程序,执行一系列的命令,类似于用 Basic 或 C 语言编写程序。每个符号计算系统都有自己的程序设计语言,这些语言与通用的高级语言大同小异。请看 C 语言和 Mathematica 中的几个语句形式(表 0-2)。

表 0-2 C 语言和 Mathematica 中的几个语句形式

C 语言	Mathematica
if(条件)语句 1;else 语句 2	If[条件,语句 1,语句 2]
while(条件)语句	While[条件,语句]
for(初始化;条件;更新)语句	For[初始化,条件,更新,语句]

0.2 Mathematica 简介

Mathematica 是美国 Wolfram 研究公司开发的符号计算系统,自 1988 年首次发布以来,因系统精致的结构和强大的计算能力而广为流传,经不断扩充功能和完善修改之后,本书的版本为 2008 年推出的 Mathematica 7。Mathematica 产品家族还包括 gridMathematica、webMathematica、Mathematica Player、Wolfram Workbench、Mathematica Applications 等一系列产品。

Mathematica 是 Mathematica 产品家族中最大的应用程序,内容丰富并功能强大的函数覆盖了初等数学、微积分和线性代数等众多的数学领域,它包含了多个数学方向的新方法和新技术;它包含的近百个作图函数是数据可视化的最好工具;它

的编辑功能完备的工作平台 Notebooks 已成为许多报告和论文的通用标准;在给用户最大自由限度的集成环境和优良的系统开放性前提下,吸引了各领域和各行各业的用户。在近 20 年的算法开发中,Mathematica 建立了一个数值计算的新层次。特别是许多高效原始算法、自动选择算法以及在系统范围内支持自动误差追踪和任意精度算法。Mathematica 引入了并行计算,可以充分发挥多核处理器的计算能力和 Mathematica 的自动并行计算技术。

从计算到可视化,从开发到应用,在 20 年不断创新的基础上,Mathematica 7 提供了一个全新视野:终端技术应用和环境。Mathematica 7 简体中文版采用了中文的菜单界面和中文的帮助文档,以及超过 500 个新功能和 12 个新增应用领域。所有这些都完美地集成在一个系统中,给用户带来前所未有的连贯、可靠的工作流。Mathematica 7 的新特性还包括数学对象的即时 3D 模型,内置了图像处理和图像分析功能,基因组、化学、气象、天文学、金融、测地学数据的完整支持等,使其成为科学研究的有力工具。

现在,Mathematica 在世界上拥有超过数百万的用户,已在工程领域、计算机科学、生物医学、金融和经济、数学、物理、化学和社会科学等范围得到应用。尤其在科研院所和高等院校广为流行。目前至少有 20 种语言写成的 700 多册书籍和几种专门介绍 Mathematica 的期刊。在英国和日本都有大学将 Mathematica 作为理工科学生入校必修的计算机课程之一。在教学研究和教学应用方面,世界各地的大学和高等教育工作者已开发基于 Mathematica 的多门课程。它也是国内“数学模型”和“数学实验”课程最常用的工具。Mathematica 具有不同类型软件的特点。

- 具有计算器一样简单的交互式操作方式;
- 具有 Matlab 那样强的数值计算功能;
- 具有 Macsyma, Maple 和 Reduce 那样的符号计算功能;
- 具有 APL 和 LISP 那样的人工智能列表处理功能;
- 像 C 语言与 Pascal 语言那样的结构化程序设计语言。

◇ Mathematica 的发明者

Stephen Wolfram 是 Mathematica 的发明者,负责 Mathematica 核心系统的整体设计,同时也是 Wolfram Research 公司的创办人和总裁。Stephen Wolfram 于 1959 年生于英国伦敦,接受了伊顿公学、牛津大学和加州理工大学的教育,15 岁时发表了第一篇科技论文,20 岁时获得加州理工大学理论物理学博士学位,并于 1981 年成为最年轻的 MacArthur 奖获奖者。此后,Stephen Wolfram 致力于研究大自然中复杂现象的产生根源。他所做的关于元胞自动机的研究工作获得了一系列重大的发现,为“复杂系统研究”这一新兴领域的创建奠定了基础,并在复杂性理

论、人造生命、计算流体力学等诸多领域得到了广泛的应用。Stephen Wolfram 曾历任加州理工大学、普林斯顿高等研究院、伊利诺斯大学的物理学、数学和计算机科学教授,他于 1986 年创办了 Complex Systems 杂志,并于 1987 年创办了 Wolfram Research 公司。自从 Wolfram Research 公司创办开始,Stephen Wolfram 就担任公司的总裁并致力于 Mathematica 的发展,Wolfram 负责 Mathematica 的总体设计,他编写了 Mathematica 大部分的基本核心代码。

0.3 初识 Mathematica

Mathematica 是什么? Mathematica 是一个符号计算系统,是一个做数学和学数学的软件。Mathematica 能做什么? Mathematica 能够完成计算器的任何工作;能够做中小学数学中的计算题目;能做高等数学中的许多题目;给出数据或数学函数,只用一条命令就能绘出复杂的函数图形。

即使你对 Mathematica 还一无所知,看完下面的例子,你会发现 Mathematica 是位博学多才而又友好的助手。Mathematica 会成为你工作和学习的好伙伴!

◇ 进入和退出 Mathematica

运行 Wolfram Mathematica 7.0 程序,首先出现在我们面前的是一个空白的 Mathematica 笔记本窗口,系统暂时取名“未命名-1”,直到用户另存为止(图 0-1)。



图 0-1 进入 Mathematica

退出 Mathematica 系统时,可在“文件”菜单中选择“退出”,或按下快捷键“Alt+F4”。如果当前的窗口内容已经被修改,却没有保存到文件中,这时会出现一个对话框问你是否保存。点击对话框上的“Save”按钮,则保存并退出系统;点击“Don't Save”按钮,则不保存并退出系统;点击“Cancel”按钮,则取消操作并返回系统(图 0-2)。

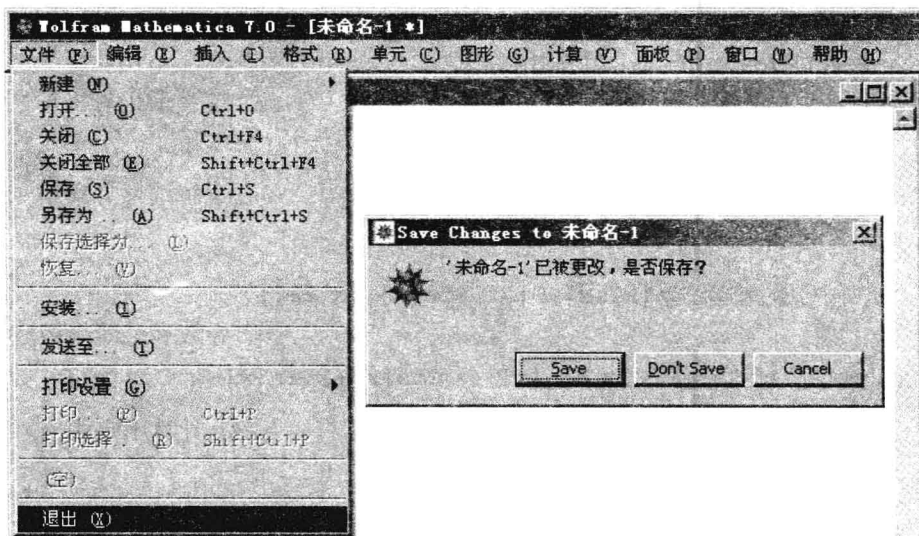


图 0-2 退出 Mathematica

◇ 输入并计算表达式

输入表达式,按 Shift+Enter 发出执行命令,或在“计算”菜单中选择“计算单元”命令,系统将计算表达式的值并输出结果。例如(图 0-3):



图 0-3 表达式求值示例

系统为输入和输出附上次序标识 In[1]和 Out[1],In[1]表明输入的是第 1 条语句,Out[1]右边输出的是第 1 条语句的运行结果。请看下面的例子:

```
In[2]:= 123456789*987654321 (*像用一个计算器*)
Out[2]= 121932631112635269

In[3]:= Factor[x^3+36x^2+431x+1716] (*因式分解*)
Out[3]= (11+x) (12+x) (13+x)

In[4]:= Expand[(x-3)(y^2-x+6)] (*展开多项式*)
Out[4]= -18+9x-x^2-3y^2+xy^2
```


In[5]:= **GCD**[391,561,357] (*计算最大公约数*)

Out[5]= 17

In[6]:= **LCM**[21,29,35] (*计算最小公倍数*)

Out[6]= 3045

In[7]:= **Solve**[{3x-2y==5,x+y==5},{x,y}] (*解线性方程组*)

Out[7]= {{x→3,y→2}}

In[8]:= **D**[x^2Sin[x],x],**D**[x^2Sin[x],{x,2}]

(*导数和二阶导数*)

Out[8]= {x^2 Cos[x]+2x Sin[x],4x Cos[x]+2Sin[x]-x^2 Sin[x]}

In[9]:= **Integrate**[x^2Sin[x],x] (*计算不定积分*)

Out[9]= -(-2+x^2)Cos[x]+2x Sin[x]

In[10]:= **Integrate**[(Cos[x]+2)/Sin[x]^2,{x,1.1,1.3}]

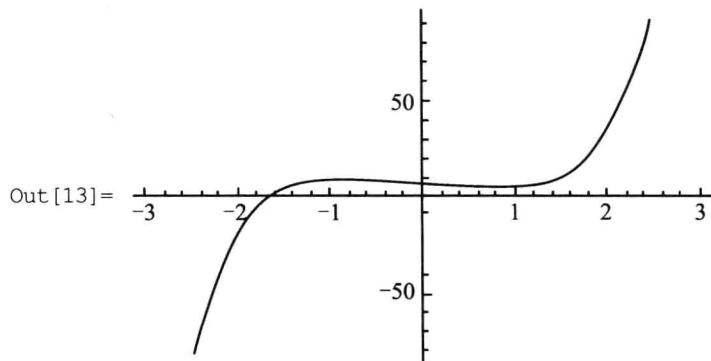
Out[10]= 0.546958 (*计算定积分*)

In[11]:= **A**= {{1.,2,3,4},{3,2,5,6},{1,2,-1,2},{0,2,5,7}};

Eigenvalues[A] (*计算矩阵特征值*)

Out[12]= {11.2276,-2.83855,1.46668,-0.855736}

In[13]:= **Plot**[x^5-3x+7,{x,-3,3}] (*绘制函数图像*)



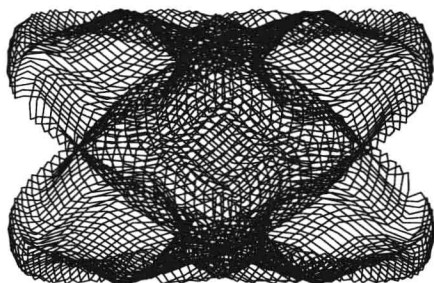
In[14]:= **ParametricPlot**[

{Sin[0.99t]-0.7*Cos[3.01t],Cos[1.01t]}

+0.1Sin[15.03t]],{t,-150,150},**Axes**→None]

(*参数方程绘图*)

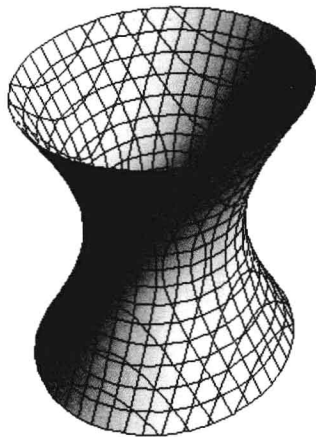
Out[14]=



例:用 ContourPlot3D 语句绘制单叶双曲面 $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} - \frac{z^2}{2} = 1$ 。

```
In[15]:= ContourPlot3D[x^2/4+y^2/3-z^2/2==1,{x,-4,4},
{y,-3,3},{z,-2,2},Axes->False,Boxed->False]
```

Out[15]=



例:用 ParametricPlot3D 语句绘制 Möbius 带。

```
In[16]:= ParametricPlot3D[
{Cos[t] (3+r*Cos[t/2]), Sin[t] (3+r*Cos[t/2]),
r*Sin[t/2]}, {r,-1,1}, {t,0,2Pi}, Axes->False,
Boxed->False]
```

Out[16]=

