山东省强化建设重点学科

“聊城大学课程与教学论”基金项目

现代数学课程研究

宋宝和　主编

房元霞　副主编

现代数学课程中的文化视点

谷焕春　宗培磊　于兴江　著

山东大学出版社

山东省强化建设重点学科

“聊城大学课程与教学论”基金项目

现代数学课程研究

宋宝和　主编

房元霞　副主编

现代数学课程中的文化视点

谷焕春　宗培磊　于兴江　著

山东大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

现代数学课程中的文化视点/宋宝和主编.—济南:
山东大学出版社,2006.8
(现代数学课程研究)
ISBN 7-5607-3244-5

Ⅰ.现...
Ⅱ.宋...
Ⅲ.数学教学-教学研究-高等学校
Ⅳ.01-4

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2006)第 099271 号

山东大学出版社出版发行
(山东省济南市山大南路 27 号　邮政编码:250100)
山 东 省 新 华 书 店 经 销
济南景升印业有限公司印刷
850×1168 毫米　1/32　21 印张　528 千字
2006 年 8 月第 1 版　2006 年 8 月第 1 次印刷
定价(全三册):48.00 元

目　录

第一章

灿烂的古代数学文化

世界各个民族的先人在不断的社会实践和生产活动中，用他们的智慧创造了灿烂的文化。在数学方面比在任何其他学科有着惊人的进步，他们不仅在数学的各个部分中作出了显著的、不朽的贡献而且还为它们以后的发展奠定了永久的基础。在西方，欧几里得《几何原本》的公理化体系、形式逻辑的论证方法以及丰富的数学知识内容，都要归因于古希腊的学者柏拉图、亚里士多德，特别是毕达哥拉斯的工作；另一方面《几何原本》中的第五公设，由于学者们企图证明这条公设而经历了 15 个世纪未获成功，最终导致了非欧几何学的产生。在东方，集中国古代数学的辉煌成就于一书的著作是《九章算术》，它是采用问题集的形式编写的，这种问题集的形式对后来中国古代数学著述的影响很大，中国古代的数学著作始终采用着这种形式，后世的数学家往往是由为《九章算术》作注的途径来进行自己的研究工作。我们了解数学文化，理解各种不同的数学思想方法，探求数学的本质，领会数学的价值，从而提高自身的文化素养和创新意识。

第一节 万物皆数——数学文化的崛起

早在公元前 6 世纪，毕达哥拉斯在意大利南部克罗托那(Crotona)建立了学派，它原来只是一个宗教团体，但是它的成员都积极追求学问。由于毕达哥拉斯学派的讲授都是口头的，并且该学派的习惯是将所有发现都归功于其尊敬的领袖，所以没有给后人留下什么著作，也很难知道究竟是谁在什么时候发明的。但在他们手里，整个数学变得抽象，更加脱离经济生活的需要了。这个学派对数学的发展产生了巨大的影响，在它的奠基人逝世后，仍然保持其传统，一直繁盛达两个世纪之久。

“万物皆数(正整数)”，即整数是人和物质的各种各样的性质之起因，是形成宇宙的基本组成原则，这就是毕达哥拉斯学派的一个重要的数学学说，或说毕达哥拉斯哲学是以这样一个假定为基础的。他们不只认为任何事物都具有一个数或可以用数来表示，还认为数是所有物理现象的基础，这就导致了对数的性质的阐述与研究。例如，天空里的一个星座既可用组成它的星的数目刻画，也可以被认为是由一个数代表的几何形式刻画，行星的运动可以根据数的比表示。单弦的调和乐音与弦长的关系，也是毕达哥拉斯学派关于数的发现。一根拉紧的弦，若取原长的 1/2，可弹出八度音调；若取 2/3，可弹出五度音调；若取 3/4，可弹出四度音调，通过各种不同的长度，即可以奏出完整的音阶。这些成果是数学物理中最初的有记载的事实，这使毕达哥拉斯学派成为音阶的科学研究之鼻祖。由此导致一个信念：终极的实在可以在数字里找到。亚里士多德说：“毕达哥拉斯学派似乎把数看成本质，这就是说，看

成是万物的元质。"[①]结果是关于数的科学吸引了他们强烈的注意，把抽象的数的概念放到首要地位，而前人所发展起来的计算技术却反而不为他们所关心了。

一、毕达哥拉斯学派的算术

毕达哥拉斯及其后继者，连同这个团体的哲学，是数论发展的先驱，是后来数发展为神秘主义的基础。他们把数分成了奇数和偶数、素数与合数、完全数、亲和数等。他们在研究这些数的时候，发现了许多复杂的定理，其中有许多经蒂奥泰德(Theaetetus)研究后，被欧几里得收集到《几何原本》中。毕达哥拉斯学派可能用点或小卵石表示数，一个偶数可以用能分成两个相等部分的一行小卵石表示，而一个奇数却不能被分成两个相等的部分。用小卵石可以很容易地证明一些简单的定理，例如，任意一组偶数的和仍是偶数，而偶数组个奇数的和是偶数，奇数组个奇数的和是奇数(见图 1-1-1～图 1-1-3)。

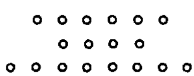

图 1-1-1　偶数的和是偶数

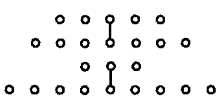

图 1-1-2　偶数个数的和是偶数

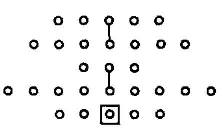

图 1-1-3　奇数个奇数的和是奇数

从这些基本的概念可得出一些简单推论，如偶数的平方是偶数，奇数的平方是奇数。用点表示数，这样便有了"形数"的概念。图 1-1-4～图 1-1-6 说明了三角形数、正方形数、五边形数的命名法。

① [英]斯科特著，侯德润、张兰译：《数学史》，广西师范大学出版社 2002 年版，第 16 页。

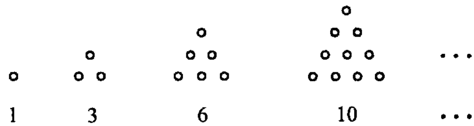

图 1-1-4　三角形数

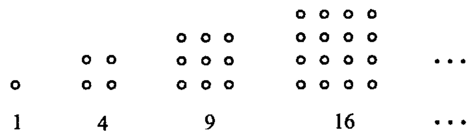

图 1-1-5　正方形数

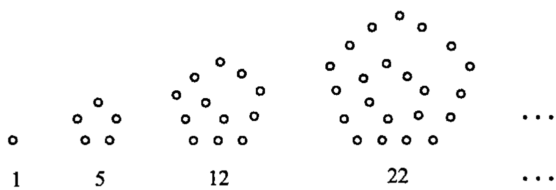

图 1-1-6　五边形数

许多关于形数的有趣的定理,能以纯几何的方法来证明。例如,图 1-1-7 说明了前 n 个奇数之和等于 n^2;图 1-1-8 则说明了任何一个正方形数都是两个相继的三角形数的和;图 1-1-9 的划分明确证明了第 n 个五边形数等于第 $n-1$ 个三角形数的 3 倍加上 n。

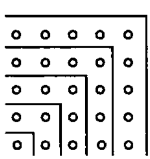

图 1-1-7

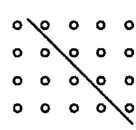

图 1-1-8

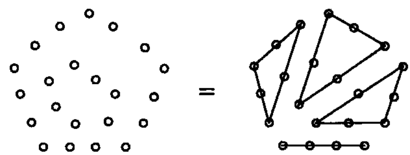

图 1-1-9

二、毕达哥拉斯三数组与毕达哥拉斯定理

关于数论的问题，毕达哥拉斯学派最感兴趣的是毕达哥拉斯三元数组的构造。他们已经知道，当 n 是奇数、m 是偶数时，$\left(n,\dfrac{n^2-1}{2},\dfrac{n^2+1}{2}\right)$和$\left(m,\left(\dfrac{m}{2}\right)^2-1,\left(\dfrac{m}{2}\right)^2+1\right)$都是毕达哥拉斯三数组。他们是这样解释的：任意一个奇数都是两个连续正方形数的差，因此，如果奇数本身是一个正方形数，那么就找到了两个正方形数，其中一个是另外两个的和。为了找到这些正方形的边，即这个三数组（见图 1-1-10），注意到曲尺形的边已经给出，因为它是一个奇数的平方，那么较小的正方形数的边可以这样求得，即从曲尺形数中减去 1，然后把剩余的结果二等分；而较大的正方形数的边数则是那个较小的边加上 1。对偶数的情况也可用类似的方法证明。

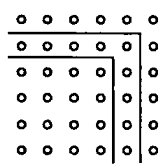

图 1-1-10

对毕达哥拉斯三元数组的研究引出了勾股定理[①]——直角三角形中斜边上的正方形等于两直角边上正方形的和。传说毕达哥拉斯本人获得这一发现时，欢欣之情不可言状，宰了一百头牲畜来祭祀缪斯女神，以酬谢神的默示。虽然这个定理的证明是以毕达哥拉斯的名字命名的，但早在毕达哥拉斯之前，巴比伦文明和中国文明已经发现了这个定理。对这个定理的第一个证明是毕达哥拉

① 西方称为"毕达哥拉斯定理"，中国称为"勾股定理"。

斯给出的，一般认为也许是如图 1-1-11 所示的这种剖分式证明。[1] 令 a,b,c 分别表示直角三角形的两条直角边和斜边，并考虑两个边长为 $a+b$ 的正方形。第一个正方形被分成六块，即两个以直角边为边的正方形和四个与给定的三角形全等的三角形。第二个正方形被分成五块，即以斜边为边的正方形和四个与给定直角三角形全等的三角形。等量减等量其差相等，于是定理成立。

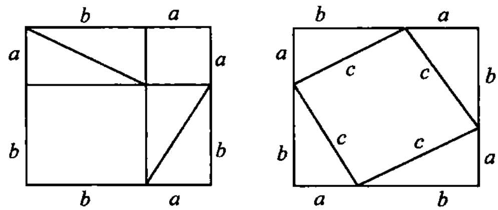

图 1-1-11

为了证明第二种剖分的中间那块确实是边长为 c 的正方形，需要利用“直角三角形的两个锐角互余”这一事实。毕达哥拉斯学派熟悉平行线的性质，他们利用这些性质证明了三角形的三内角之和等于两直角，由此他们还推证了多边形内角之和。

三、不可公度线段

毕达哥拉斯学派认为，数字总是与事物的计数联系在一起的，计数时单位必须保持不变，一个数是多个计数单位的“组合”。既然数是宇宙的组成基础，毕达哥拉斯学派也认为每样东西包括长度、重量和时间都是可以度量的，任何量都可以被表示为某个有理数。毕达哥拉斯学派假定总可以找到一个度量单位来度量正方形的边和对角线，换句话说，总存在这样一个长度，正方形的边和对角线是这个长度的整数倍。取正方形的边 s 和其对角线 d，能将 s

① 参见[美]H·伊夫斯著，欧阳绛译：《数学史概论》，山西人民出版社 1986 年版，第 68 页。

和 d 划分为整数段的最长的第三线段为 t，设 $s=bt$，$d=at$，这里 a，b 是互素的正整数。因为，$d=\sqrt{2}s$，从而 $at=bt\sqrt{2}$，即$\sqrt{2}=a/b$ 是有理数，然而遗憾的是毕达哥拉斯学派发现并证明了直线上不存在对应于$\sqrt{2}$的有理数点，$\sqrt{2}$是无理数，正方形的边和对角线是不可公度的。这个发现是毕达哥拉斯学派最伟大的成就之一，但也是一次致命的打击，它迫使毕达哥拉斯学派不得不放弃他们的万物皆数的基本哲学，从而使数学家们发展新的理论成为可能。

四、代数恒等式

在古代，没有任何代数符号，为了进行代数运算，他们设计了灵巧的几何程序。在《几何原本》中我们可以看到，毕达哥拉斯学派用剖分法证明的代数恒等式，如第二卷的命题 4，把边长为 $a+b$ 的正方形分成面积分别为 a^2，b^2，ab，ab 的两个正方形和两个矩形，如图 1-1-12 所示，在几何上证明了两数和的平方公式：$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$。再如第二卷的命题 5：如果把线段分别分成相等和不相等的两部分，那么由这不等的两部分构成的矩形与原线段的两个分点间的线段上的正方形的和等于原线段一半上的正方形。此定理证明的剖分图如图 1-1-13 所示，图中点 C 和点 D 分别是AB 的等分点和不等分点，四边形 $CEFB$ 和四边形 $LEGH$ 分别是以 BC 和 CD 为边的正方形，则

$$
\begin{aligned}
S_{\square AKHD}+S_{\square LEGH}&=S_{\text{维尔斯特拉斯}AKLC}+S_{\square CLHD}+S_{\text{维尔斯特拉斯}LEGH}\\
&=S_{\square DGFB}+S_{\square CLHD}+S_{\square LEGH}=S_{\square CEFB}
\end{aligned}
$$

如果我们令 $AC=a$，$CD=b$，则导出代数恒等式

$$(a+b)(a-b)=a^2-b^2$$

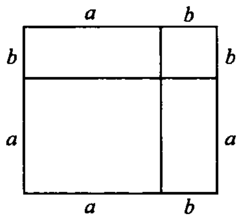

图 1-1-12

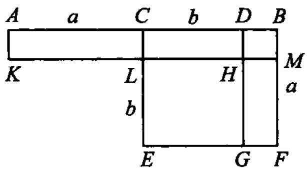

图 1-1-13

五、二次方程的几何解法

在几何代数中，毕达哥拉斯学派提出了两种解某些简单的二次方程的方法：比例法和面积贴合法。

正如现在中学几何课程中所做的那样，比例法就是作出满足 $a:b=c:x$ 或 $a:x=x:b$ 的线段 x（见图 1-1-14），也就是说，比例法可以提供方程 $ax=bc$ 和 $x^2=ab$ 的解。

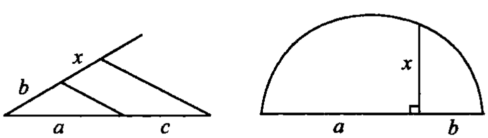

图 1-1-14

面积贴合法就是在给定的线段上作给定面积的平行四边形。我们考虑特殊情形，如图 1-1-15 中矩形 $ABCD$ 亏缩为一个与给定的正方形相似的正方形 $EBDF$，使得被贴合的矩形 $AEFC$ 的面积等于给定的正方形。设 $AB=a$，$AE=x$，给定正方形的边长为 b，则 $x(a-x)=b^2$ 或 $x^2-ax+b^2=0$。面积贴合法就是给出线性方程或二次方程 $x^2\pm ax\pm b^2=0$ 的几何解。

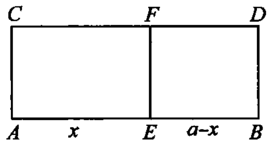

图 1-1-15

六、正多面体

在几何方面，毕达哥拉斯学派证明了平面可用正三角形、正方形或正六边形填满，空间可用立方体填满。又知道正四面体、六面体、八面体和二十面体，直观地说四面体对于它的表面包有最小的体积，二十面体则包有最大的体积，然后令这些体积—表面关系分别为干性和湿性，因为火是四元素中最干的，而水是最湿的，所以四面体代表火，二十面体代表水；六面体与地面相联系，将六面体放在地上，有最大的稳定性；另一方面，用手按住八面体的两个相对的点，最易于在空气中旋转，有空气的不平稳性。后来又发现了十二面体，但没有相应的第五种元素，于是将它与包罗万象的宇宙联系在一起，十二面体有十二个面，而黄道有十二宫。

第二节 《几何原本》——数学演绎体系的创立

一、欧几里得

亚历山大前期(公元前 4 世纪～前 2 世纪)，出现了第一个大数学家欧几里得。关于他的生平，现在知道得很少，猜想他早年师从柏拉图，曾在亚历山大博物馆和图书馆任教并进行学术活动。他是一位温良敦厚的教育家，对有志数学之士，总是循循善诱的教导，但反对在学习上不肯钻研，投机取巧的作风，也反对急功近利的狭隘实用观点。据后人记载，托勒密曾向欧几里得询问学习几何知识的捷径时，他答道："在几何学中没有王者之路。"有这样一

个故事，传说有一个青年学生，才开始学第一个命题，就问欧几里得，他学了几何学之后将得到什么。欧几里得说："给他三个钱币，因为他想在学习中获取实利。"

欧几里得写过至少十部数学、物理的著作，而且其中有五部被相当完整地保存下来，最重要的、使他声名显赫的主要是《几何原本》一书。

二、《几何原本》

《几何原本》是人类历史上最重要的数学著作，约编成于公元前 320 年，是除《圣经》外发行量最大的著作。《几何原本》已经几乎被译成了每一种语言，自从它首次印刷以来，便不断地被各个国家再次印刷出版，从 1482 年到 19 世纪末《几何原本》的印刷本用各种文字出了一千版以上。事实上，在这以前，它的手抄本统驭几何学也已达一千八百年之久。欧几里得的影响如此深远，以至于欧几里得都成了"几何学"的同义词，公理化的方法已经渗透到数学甚至是现代科学的每一个领域。

数学的发展，特别是几何学的发展，积累了异常丰富的材料，但杂乱无章令人眼花缭乱。于是问题就提出来了，怎样把它们整理在严密的逻辑系统之中，将几何学的大厦建立在巩固的基础之上呢？这是一项艰巨的任务，此前的学者也做过这样的整理工作，出现过类似的著作，但当欧几里得集大成的《几何原本》出现的时候，这些工作都湮没无闻了，欧几里得的《几何原本》是唯一能够幸存至今的，这可能因为它是在柏拉图学派发展了比例理论和无理数理论基础及亚里士多德细致地对数和量进行区分之后写成的第一部数学著作，因此，它的内容"完整"、结构严谨，因为当时数学团体规模不大，一旦他们意识到《几何原本》的重要性，那么就没有必要在课程中保留并使用其他相形见绌的著作。

我国现存最早的译本是 1607 年利玛窦、徐光启合译的《几何原本》前 6 卷和 1857 年伟烈亚力、李善兰合译的后 9 卷。在这以

前，元朝已有《几何原本》的译本，但没有流传下来。

现在的读者可能难以理解这一著作，没有例子，没有情景，没有注释，也没有计算，而只有简单的定义、公理、定理和证明。但是，许多著名数学家的传记中都指出，欧几里得这本书是最早把他们引入数学研究并激励和促使他们成为数学家的著作。《几何原本》给他们提供了"纯数学"的模式，严密的公理、准确的定义、仔细陈述的定理和逻辑一致的证明。《几何原本》的伟大历史意义就在于它用公理化方法建立起演绎的数学体系的最早典范。通过下面对《几何原本》的介绍，不仅可以使读者深入了解它的优越之处，而且还能认识到《几何原本》所讨论的每一方面对后来数学发展的重要性。

关于"原本"(elements)这个术语的意思。演绎研究的"elements"，古代希腊人指的是在该学科中具有广泛的和一般的应用的最重要的定理，其作用可同字母表中的字母对语言的作用相比。事实上，希腊文中的"字母"就是这个词。亚里士多德在他的《形而上学》一书中指出："在几何命题中，我们把这样一些命题称为'elements'，这些命题的证明包含于所有或大多数几何命题的证明之中。"

三、《几何原本》的内容

《几何原本》是从一系列定义、公设和公理开始的。

第 1 卷，共 49 个命题，是关于直线和由直线构成的平面图形的几何学，其中的许多都是我们所熟悉的。

首先有 36 个定义。如：

1. 点是没有部分的。
2. 线是没有宽度的长。
3. 线的两端是点。
4. 直线是它上面均匀分布着点的线。
5. 面是只有长度和宽度的。

6. 面的边界是线。

7. 平面是它的上面均匀分布着线的面。

9. 当包含角的两条线是在同一条直线时，这个角叫做平角。

15. 圆是由一条线包围着的平面图形，其内有一点与这条线上的所有点连成的线段都相等。

23. 平行直线是在同一平面内的直线，它们向两个方向无限延长，不论在哪个方向都不相交。

按现在的标准，欧几里得的前几个定义并无实际意义，但他的解释有助于我们理解这些概念。

其次是公设——几何学中特有的真理。

1. 从任意一点到任意一点可以作一直线。

2. 一条有限直线可以不断延长。

3. 以任意中心和任意的距离可以画圆。

4. 凡直角都彼此相等。

5. 若一直线落在两直线上所构成的同旁内角和小于两直角，那么把两条直线无限延长，它们将在同旁内角和小于两直角的一侧相交。

《几何原本》中有大量的命题要求作出满足特定性质的图形，所以前三个公设是构造这些图形的基础。直角作为测量角的标准，所以公设 4 对公设 5 是必要的。公设 5 即所谓的“平行公设”是平行理论的起点，由于它不像前四个那样不证自明，所以后来的许多数学家就试图用其他九条公理和公设证明它是一个定理而不是公设，但所有这些尝试都以失败而告终。到了 19 世纪，数学家证明了平行公设是独立于欧氏几何的其他假定的，并且从于平行公设相矛盾的命题出发，导出了非欧几何。

在公设之后，欧几里得总结出了对于所有学科都成立的真理，把它们称为公理。

1. 等于同量的量彼此相等。