直觉与统计

ZHIJUE YU TONGJI

吴学品 著

吉林大学出版社

图书在版编目（CIP）数据

直觉与统计/吴学品著.—长春：吉林大学出版社，2011.4

ISBN 978-7-5601-7134-0

I.①直… II.①吴… III.①数理统计 IV.①021

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2011）第 057609 号

书　名：直觉与统计
作　者：吴学品　著

责任编辑、责任校对：王瑞金
吉林大学出版社出版、发行
开本：787×1092 毫米 1/16
印张：12.125　　字数：200 千字
ISBN 978-7-5601-7134-0

封面设计：创意广告
吉林省东文印务有限公司　印刷
2011 年 4 月　第 1 版
2011 年 4 月　第 1 次印刷
定价：28.00 元

社址：长春市明德路 421 号　邮编：130021
发行部电话：0431-88499826
网址：http://www.jlup.com.cn
E-mail:jlup@mail.jlu.edu.cn

前　言

《概率论与数理统计》是一门较为抽象的学科。多年来，作者在教授该课程的过程中，如何在有限的教学课时内，使学生掌握概率论与数理统计的基本原理和统计方法，并具备运用统计推断方法解决实际问题的能力，这一直是自己在教学过程中想努力解决的问题。为了使得学生能较容易地理解概率论与数理统计中的许多概念、定理及统计推断方法，笔者试图用直观性对它们进行解说，并对许多统计推断方法的原理及构造进行直观演绎，因此，本书可看作是作者在多年讲授《概率论与数理统计》课程的心得体会。

本书内容共分七章。第一章，概率与事件的直观性，包括概率论与数理统计中有直观性较强的概念、定义及相关的定理，以及常用统计方法。第二章，数理统计中几个基本概念的直观性。第三章，参数估计的直观性。详细地对矩估计、极大似然估计和序列号估计等点估计方法的思想进行直观的解说和演绎。第四章，假设检验的直观性。深刻探讨假设检验所包含的直观思想，并用直观性构造一般总体分布假设检验的拒绝域。第五章，方差分析的直观性。对方差分析中的原理及构造进行直观解析。第六章，非参数统计的直观性。着重分析了非参数假设检验所包含的直观思想，并用直观性构造非参数假设检验拒绝域。第七章，违背直觉的随机现象。主要介绍一些我们生活中与直觉相互违背的随机现象，并阐述产生错觉的原因。

为了使得读者能够方便地阅读本书，本书的内容安排都是按照常见教科书内容安排的顺序，书中的例子大多来自一些教科书中的例子及习题，在此对这些作者深表感谢。写作本书的目的只有一个，那就是尽可能通过通俗和直观的语言介绍统计推断方法的基本思想，使得没有数学基础的读者也能够理

解统计推断方法的基本思想原理。所以在本书的写作过程中，为了能把问题阐述清楚，我们用直观语言反复阐述，这时读者看起来可能会觉得啰嗦，但这只是为了把问题说清楚而已。

由于作者才疏学浅，水平有限，书中定有不妥甚至错误之处，恳请读者批评指正。

吴学品

海大留学生楼 601 室

目 录

绪 论

关于直觉的存在问题,已不再是哲学家和心理学家之间争论的对象了.许多生物学家、数学家、物理学家都从他们的切身经验中,体验到直觉的存在和作用.可以说"没有任何一个创造性行为能脱离直觉活动."

Brouwer 把直觉主义区分为三个阶段:前直觉主义、直觉主义第一阶段和第二阶段.直觉主义认为逻辑依赖于数学,而数学建立在直觉的基础上.直觉主义认为哲学、逻辑甚至计数等概念都比数学复杂得多,不能作为数学的基础,数学的基础需要更简单、更直接的概念,它就是直觉,直觉是心智的一项基本功能.当直觉主义将数学的基础归于直觉时,这个直觉既是他个人的也是人类共有的.Heyting 在回应"直觉主义是武断的"时说:"我的数学思想属于我个人的智力生活,限制于我的个人心智,其他思想也如此."然而,不同的思想家提出不同的直觉,Brouwer、Kant 和 Gdel 的直觉便彼此不相同,不仅如此,Brouwer 的直觉在不同阶段也不相同.Brouwer 在这里事实上将直觉分为原始直觉和构造两部分,原始直觉就是贰一壹性,它本身就是一种简单的构造,而构造又是原始直觉能力的延伸.当逻辑主义为自然数概念寻求逻辑基础时,直觉主义也在为它寻求直觉的基础,或至少是合理性的基础.直觉主义在找到了自然数的直觉基础后,再构造有理数、实数和直觉主义连续统和分析学,从而认为他们已将数学建立在直觉和构造之上,并提出了"存在就是被构造"的口号.但是,当我们仔细研读 Brouwer 的原始文献时发现:直觉主义有两个阶段,而这两个阶段的直觉、构造概念和无穷观都发生了重大

变化.

什么叫直觉呢？在科学的和哲学的文献中，直觉概念负载着不同的含义，至今尚无公认的看法.美国教育家布鲁纳认为："直觉是指没有明显地依靠个人技巧的分析器官掌握问题或情境的意义、重要性或结构的行为."英国剑桥大学病理学家贝弗里奇认为"直觉是指对情况的一种突如其来的颖悟或理解."数学家F·布洛赫则认为"直觉是把那些你已经了解很充分的对事物的认识拼起来，形成一个完整的认识."著名科学家钱学森认为："直觉是一种人们没有意识到的对信息的加工活动，是在潜意识中酝酿问题而然后与显意识突然沟通，于是一下子得到了问题的答案，而对加工的具体过程，我们则没有意识到."这些看法虽然不尽相同，但是却有一个共同思想，即直觉是从事科学创造所需要的与纯逻辑不同的某种东西.事实上，逻辑与直觉是科学家在研究活动中需要的两种完全不同的"精神类型"."逻辑精神"的特征是：从已知知识出发，依据逻辑规则进行推导和演算，一步一步地达到对研究对象的认识.它的步骤是明显的，而且常常能由科学家向别人作适当报道.而"直觉精神"却不同，它是跳跃式地，就像"勇敢的前卫骑兵，迅猛出击"，直接达到对研究对象的理解和认识.科学家虽然得到答案(不管正确与否)，但他对其间的来龙去脉却说不清楚.我们认为，直觉指的就是对事物本质的直接领悟或洞察，它是一种与逻辑方法完全不同的认识方法.由上述直觉的定义不难得出数学直觉的定义.所谓数学直觉，就是对于数学对象事物(结构及其关系)的某种直接领悟或洞察，这是一种不包含普通逻辑推理过程的直接悟性，属于非逻辑的方法论范畴.数学直觉在数学研究中的作用受到数学家们的高度重视，被视为数学创造的重要工具.法国著名数学家彭加勒曾经指出："没有一个人怀疑可觉察的直觉在数学中是最有用的发明工具.没有直觉，数学家便会像这样的一个作家：他只是按语法写诗，但是却毫无思想."和他同时代的数学巨匠希尔伯特也曾强调指出："数学知识终究是依赖于某种类型的直观洞察力."美国数学家

R·库朗也说过:“直觉,这种难于捉摸和充满活力的力量,始终在创造性的数学中起作用,甚至推动和引导最抽象的思维过程.原中国数学会理事长、著名数学家王元在谈到数学泰斗华罗庚先生的研究方法时,特别指出:“很多跟他来往的人认为华罗庚先生最大的特点、最强的能力是逻辑推导和计算能力,事实上这并不是最重要的.你算得快,推导能力强,你一个月能干成的,人家多用点时间,比如三个月也能干出来.我感觉到他最强的是直觉力,这种本事就不是多花点时间和精力能做到的.”正因为数学直觉在数学研究中客观存在及其独特地位,它已成为数学方法论的重要研究对象.

概率论与数理统计是研究随机现象统计规律的一门学科,是数学的一个重要的分支学科,同其他数学一样,统计学除了具有其他数学分支所具有的逻辑性、推理性、系统性外,还具有高度的直观性.在概率论与数理统计中,很多统计学思想及统计推断方法都具有直觉性,甚至有很多统计推断方法的思想源泉都是来自于直观感觉,把“非逻辑”的直观思想转化成数学语言就得到我们常见的统计推断方法.因此,本书作者斗胆通过对统计学的各种概念、定理及解题方法进行直观的演绎,以便于对这一学科有兴趣的朋友能较为直观地理解统计的知识.

第一章　事件与概率的直观性

第一节　随机事件的直观性

一、独立事件的直观性

对任意的两个随机事件 A 和 B，如

$$P(AB)=P(A)\cdot P(B)$$

成立，则称随机事件 A 和 B 是相互独立的.

从概率论的定义上来看，两个随机事件独立意味着随机事件 A 和 B 同时发生的概率等于事件 A 发生的概率和事件 B 发生的概率的乘积. 也就是说如果随机事件 A 和 B 是独立的，那么随机事件 A 和 B 同时发生的概率取决于事件 A 发生的可能性大小和事件 B 发生的可能性大小的乘积，因为在事件 A 不影响事件 B，事件 B 不影响事件 A 的条件下，事件 A 和 B 同时发生的可能性大小就取决于事件 A 和事件 B 分别发生的可能性的大小了. 这在直觉上是容易理解的，当两个随机事件 A 和 B 互相不受影响时，每个事件本身发生可能性的大小直接决定这两个事件是否同时发生. 所以我们在判断随机事件的独立性时很少用到上述公式，而是利用直观性进行判断. 事实上，在概率论的应用过程中，我们经常利用这种直观性来判断或者肯定随机事件间的相互独立性，从而使得问题和计算都得到简化. 随机事件的独立的概率公式在现实生活中有深刻的直觉基础，两随机事件独立，也就相互不受影响，互相不干扰的. 正如甲乙两个篮球队员投篮，从直观上判断，甲乙两个人投中的概率应该是独立的，所以甲乙两个人同时投中的概率取决于甲乙两个人各自投中的概率，如

果两个人投中的概率都很大，那么两个人同时投中的概率就大；反过来，如果两个人投中的概率都很小，那么他们同时投中的概率就很小．作为两种特殊情况，我们下面讨论必然事件和不可能事件跟其他随机事件的独立性．从直觉上看，必然事件和不可能事件是在每次试验中都发生的事件，它们与任何随机事件的发生是没有关系的．对必然事件而言，因为它在每次试验中都发生，也就是无论其他随机事件是否发生，必然事件总是发生的，这时任意随机事件与必然事件同时发生的概率取决于该随机事件发生的概率．该随机事件发生的可能性大，那么它们同时发生的可能性就大；反之，该随机事件发生的可能性小，那么它们同时发生的可能性就小．正如在上面的例子中，假设甲队员在每次投篮中都能投中，是一个必然事件，那么甲乙两人同时投中就取决于乙队员是否投中．公式表示就是

$$P(\Omega B)=P(\Omega)\cdot P(B)=P(B)$$

同理，对不可能事件来说，因为不可能事件在每次试验中都不可能发生，所以直观上，无论其他随机事件发生的可能性怎样，该随机事件和不能事件都不可能同时发生的．在上例中，如果假设甲队员在每次投篮投中的概率是零，即是不可能事件，这时甲乙两个人同时投中的概率是零．因为这时有

$$P(\phi B)=P(\phi)=P(\phi)\cdot P(B)=0$$

又如，分别抛甲、乙两枚均匀的硬币，令

$A=\{$硬币甲出现正面$\}$

$B=\{$硬币乙出现正面$\}$

试问随机事件 A 和 B 是否独立？

对于上述问题，如果从概率论随机事件的独立性的定义去验证，则首先应确定试验的样本空间，这时样本空间为 $\Omega=\{(1、0),(1、1),(0,1),(0,0)\}$，其中 1 表示出现正面，0 表示出现反面．这时随机事件

$$A=\{(1、1),(1、0)\},B=\{(1、1),(0、1)\},AB=\{(1,1)\}$$

根据古典概率模型

$$P(A)=P(B)=\frac{1}{2},P(AB)=\frac{1}{4}$$

$$P(AB)=P(A)\cdot P(B)=\frac{1}{4}$$

由概率论独立性的定义得出随机事件 A 与 B 是独立的. 当我们用定义去论证上述两个随机事件的独立性时,总觉得有点多余. 事实上,抛两枚硬币,从直观上看,硬币甲出现正面和反面与硬币乙出现正面和反面根本是互相不受影响的. 这就是直觉上的直观性. 因为用直觉或直观来理解随机事件的独立性的概念时,一定要强调随机事件的"彼此没有关系"和"互不影响"的直观性,正如你明天"是否穿雨衣出门(事件 A)"取决于明天是否下雨,跟美国总统明天早餐"是否吃鸡蛋(事件 B)"是无关的,因为直观上这两事件是彼此没有关系的,它们可能同时发生,也可能都不发生,也有可能只有一个发生. 于是就很容易理解 $P(A/B)=P(A)$ 这一独立性概念. 事实上,在概率统计的实际应用过程中,人们常常利用这种直观感觉来肯定事件间的独立性,从而使问题和计算都得到简化.

总而言之,随机事件独立性的数学含义 $P(AB)=P(A)\cdot P(B)$ 是从直觉中演绎出来的,来源于"彼此没有关系"和"互不影响"的直观性.

二、全概率公式和贝叶斯公式的直观性

全概率公式是概率论中最常用的公式之一,特别是求解复杂随机事件的概率时,我们通常利用全概率公式把复杂事件分解成若干个互不相容的简单随机事件的和,然后通过计算简单事件的概率来得出复杂事件的概率.

设 $A_1,A_2,\cdots\cdots,A_n$ 是一列互不相容的随机事件,对任一随机事件 B,如果满足

$$P(A_i)>0,B\subset\bigcup_{i=1}^{n}A_i,i=1,2,\cdots,n$$

则对任一随机事件 B,有

$$P(B) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i)P(B/A_i)$$

从图 1.1 所示的框架理解全概率公式的直观性是容易的. 这就相当于把随机事件 B 分解成互不相容的 n 个随机事件 $A_1B, A_2B, \cdots, A_nB$ 的并(和). 在图中,大的长方形表示的随机事件 $\bigcup_{i=1}^{n} A_i$,椭圆表示的是任一随机事件 B. 由概率的性质容易得到,随机事件 B 满足

$$A_1B + A_2B + \cdots + A_nB = (A_1 + A_2 + \cdots + A_n)B = B$$

这时

$$P(B) = P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_iB\right) = \sum_{i=1}^{n} P(A_iB)$$

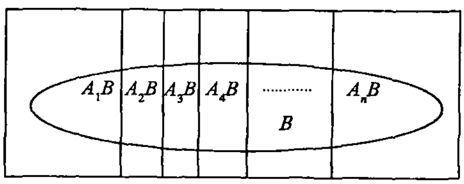

图 1.1　全概率公式的直观分解图

正如某工厂有生产同一种产品的三条生产线,该三条生产线的产量分别占总产量的 25%、45%和 30%,又这三条生产线的次品率依次为 5%、3%和 2%. 现从该厂的产品中随机收取一件产品,问抽到的产品为次品的概率是多少?

令

B={任取一件,抽到次品}

A_i={任取一件,抽到第 i 条生产线的产品} $i=1,2,3$

直观上,抽取一件产品是次品,这次品可能是第一条生产线生产的,也可能是第二、第三条生产线生产的,而每条生产线生产的产品的次品率是不同的. 试想,假设三条生产线生产的产品的次品率是相同的,都是 5%,那么计算

上述事件 B 的概率就很简单了,就是 $P(B)=5\%$. 因为三条生产线生产的产品次品率不同,所以我们所抽到的产品是次品就变得复杂了,也就是如果抽到第 i 条生产线生产的产品,次品率都是不同的. 又因为任一产品,只能是由唯一的一条生产线生产的,所以直观上我们可以把事件 B 分解成

$$B=A_1B+A_2B+A_3B$$

于是利用上述全概率公式就可得到随机事件 B 概率.

本质上,全概率公式相当于把一个随机试验中的复杂随机事件分解成若干个互不相容的简单随机事件的和,然后利用概率加法原理计算复杂事件的概率,这在直觉上是容易理解的.

贝叶斯公式又称全概率公式的"逆概率"(inverse probability). 通俗的说它就是"概率的概率":假设一个随机事件的概率为 P,由此可以计算,在重复试验中出现的种种结果的概率,此为"正概率". 反之,如果已知多次重复试验结果,理应可以计算概率 P 取种种值的概率如何,此即逆概率. 又如,已知误差分布,则由被测量的真值 δ,可以计算实地测量结果 X 取种种值的概率如何,此为正概率. 反之,若已有了实地测量结果 X,理应可以计算真值 δ 取种种值的概率如何,此为逆概率. 由上述可知,正概率是由原因推结果,而逆概率是由结果推原因. 大而化之,可以说正概率是概率论而逆概率是数理统计. 下面我们从贝叶斯公式的内容就可看出.

设 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 是一列互不相容的随机事件,对任一随机事件 B,如果满足

$$P(A_i)>0,B\subset\bigcup_{i=1}^{n}A_i,i=1,2,\cdots,n$$

则对任一事件 B,有

$$P(A_i/B)=\frac{P(A_i)P(B/A_i)}{P(B)}=\frac{P(A_i)P(B/A_i)}{\sum_{i=1}^{n}P(A_i)P(B/A_i)}$$

从现实的例子中直观理解贝叶斯公式也是容易的. 正如在上面的例子中,

该厂为了加强产品质量管理，经常对产品进行抽查检验，如果在某次的产品质量检验中，抽查出次品，为了追究各生产线的责任，应如何对各生产线进行处罚. 这时就相当于计算各个概率 $P(A_i/B)$，那个概率大，则对它的处罚就相对大. 这是容易理解的，因为这与直觉是一致的.

这种先验概率和后验概率在医学上也有广泛的应用. 假如有一个病人去看病，在诊断前医生会假定该病人可能患有 n 种病 $A_1,A_2,\cdots,A_n$，为了确定病人患有那种病，医生会通过检验病人的某些生理指标（比如血液、心率、体温等），如果通过检验病人的某些指标偏离正常值，用概率论表示就是 B 发生了. 这时医生会根据各种病 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 的发病率（先验概率）并结合偏离正常值的生理指标 B，来确定病人会患那种病，用概率论表示就是计算那个概率 $P(A_i/B)$（后验概率），理论上那个 $P(A_i/B)$ 的值大，那么病人就患那种病 A_i. 而在现实中，医生会根据各种病的发病率及自己的经验估计出 $P(A_i/B)$ 的大小，从而确诊病人患那种病.

贝叶斯公式本质上是全概率公式的逆向公式. 正如在全概率公式中，我们是通过各个事件 A_i 的概率来计算试验结果 B 的概率，因为任一个随机事件 A_i 都与事件 B 有关. 所以贝叶斯公式就是当已知事件 B 发生时，我们最想知道那一个随机事件 A_i 对事件 B 的发生所起的作用最大. 正因为如此，贝叶斯公式的这个特点在管理学及其他学科中有大量的应用.

第二节　概率论的定义及定理的直观性

一、概率和频率

定义：随机事件 A 发生的可能性大小的度量（数值），称为 A 发生的概率，记作 $P(A)$.

我们知道，概率性质满足三条性质：

(1)非负性：对任意的随机事件 A，有 $P(A)>0$；

(2)规范性：即若 Ω 是必然事件，则 $P(\Omega)=1$；

(3)有限可加性，即若随机事件 A、B 互不相容(即 $AB=\phi$)，则

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)$$

概率的上述三条性质我们常常称为概率的三条公理化定义，它有着直观的背景.概率的直观背景含义就是频率，频率的本质是概率，因而我们有理由要求频率的这些性质也是概率所应该具有的.事实上，假设 n_A 为随机事件 A 在 n 次试验中发生的次数，$f_n(A)$表示事件 A 在 n 次试验中的频率，那么上述概率的三条性质分别对应于频率的三条性质：

(1)非负性：对任意的随机事件 A，因为 $n_A\geq 0$，所以 $f_n(A)=\frac{n_A}{n}>0$；

(2)规范性：即若 Ω 是必然事件，因为 $n_\Omega=n$，所以 $f_n(\Omega)=1$；

(3)有限可加性，即若随机事件 A、B 互不相容(即 $AB=\phi$)，因为 $A\cup B$ 发生的次数一定是 A 发生的次数和 B 发生的次数之和($n_{A\cup B}=n_A+n_B$)，所以

$$f_n(A\cup B)=f_n(A)+f_n(B)$$

对比上述两个定义，我们不难发现，它们是非常相似的，也是非常直观的.在现实世界中，我们将客观概率区分为“古典概率”和“统计概率”这两种情况，而上述概率的三条性质是基于统计概率来定义的，这种统计概率必须通过大量观察后才能算出来，而这一点正好符合频率的统计性质.对于任意随机事件，它发生可能性大小的度量(概率)是由它自身决定的，并且是客观存在的.相对于频率而言，就好比一根木棍有长度一样，概率是随机事件发生可能性大小的度量，是随机事件自身的一个属性.它们的关系就好像“测量值”和“真实值”一样，给定一根木棍，谁都不怀疑它有自身的真实长度，长度为多少，无论我们用多么优良的测量工具来测量它，测得的数值总是稳定在木棍真实值附近.于是，人们往往把测量所得的测量值当作木棍的真实值.再回到随机试验中，设有随机事件 A，尽管每作一串(n 次)试验，所得到的频率 $f_n(A)$可以各

不相同，但是只要实验次数 n 相当大，$f_n(A)$（测量值）与 $P(A)$（真实值）会非常接近. 因此概率是可以通过频率来测量的，或者说是对概率的一个近似. 所以，通过频率的性质来定义概率的性质也就不足为奇了.

对随机事件发生的可能性，我们往往通过它的概率的大小来表示. 在理论上随机事件发生的概率 $P(A)$ 是客观的，大小是确定的. 但在现实生活中，我们有时候在讨论某个随机事件发生的大小时，并不依照随机事件的概率 $P(A)$ 的值为来讨论的. 有时候我们说的概率的大小是相对于我们的直觉来讨论的，例如某个随机事件的概率 $P(A)=0.9$，从概率的数值上来看，这应该是一个大概率事件，但在某种情况下，我们会觉得上述事件也是个小概率事件. 为什么呢？如果随机事件 A 表示的是“火箭发动机在发射过程中能正常工作”，那么事件 A 的概率虽然达到 0.9，从数值的大小来说，是一个不折不扣的大概率事件，但在科学家的眼里，事件 A 还是一个“小概率”事件. 这主要跟我们的心里作用有很大的关系，在现实中我们只允许事件 A 发生，事件 A 如果不发生，对我们损失巨大，因为火箭的每次发射需要的资金，少则几千万，多则上亿的人民币，所以事件 A 发生的概率为 0.9 对我们来说，还是很小的，因为我们不能承受那么大的损失. 我们所要求的火箭发动机能正常工作的概率应非常接近于 1. 同理，如果随机事件 B 发生的概率是 $P(B)=0.01$，从数值上来看，这是一个小概率事件，但在某种情况下，我们会觉得这是一个大概率事件. 如果令 B 表示的是“在跳伞过程中，伞绳断开”，这时对于随机事件 B 的概率 0.01 来说，我们也会觉得这是一个大概率事件，因为对于该概率来说，意味着 100 个人跳伞就可能有一个人会死，这对很多人来说，是不能接受的，也是很危险的. 所以在现实生活中，概率的大小在很多时候取决于我们的心里直觉的作用.

二、古典概率模型

古典概率模型是概率论中最重要也是最基本的模型，它满足下述两个特