院士数学讲座专辑

张景中◎著

数学家的眼光

——张景中院士献给中学生的礼物

[典藏版]

中国少年儿童新闻出版总社
中国少年儿童出版社

数学家的
眼光

——张景中院士献给
中学生的礼物

[典藏版]

张景中◎著

中国少年儿童新闻出版总社
中国少年儿童出版社
北京

图书在版编目（C I P）数据

数学家的眼光（典藏版）/ 张景中著. —北京：中国少年儿童出版社，2011. 7
（中国科普名家名作·院士数学讲座专辑）
ISBN 978-7-5148-0201-6

Ⅰ. ①数… Ⅱ. ①张… Ⅲ. ①数学－少儿读物 Ⅳ. ①01-49

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2011）第 062314 号

SHUXUEJIA DE YANGUANG (DIANCANGBAN)
（中国科普名家名作·院士数学讲座专辑）

出版发行：中国少年儿童新闻出版总社
中国少年儿童出版社
出 版 人：李学谦
执行出版人：赵恒峰

策　　划：薛晓哲　　著　　者：张景中
责任编辑：许碧娟　　责任校对：杨　宏
装帧设计：缪　惟　刘豪亮　　责任印务：杨顺利

社　　址：北京市东四十二条 21 号　　邮政编码：100708
总 编 室：010-64035735　　传　　真：010-64012262
发 行 部：010-84037667
h t t p：//www. ccppg. com. cn
E-mail：zbs@ccppg. com. cn

印刷：北京友谊印刷有限公司　　出版发行：中国少年儿童新闻出版总社

开本：880mm × 1230mm　1/32　　印张：7.5
2011 年 7 月第 1 版　　2011 年 7 月北京第 1 次印刷
字数：94 千字　　印数：9100 册

ISBN 978-7-5148-0201-6　　定价：15.00 元

图书若有印装问题，请随时向印务部退换。（010-57350028）

目 录

SHUXUEJIADEYANGUANG Content

数学家的眼光

温故知新

正反辉映

巧思妙解

青出于蓝

目录

偏题正做

见微知著

温故知新

三角形的内角和

美籍华人陈省身教授是当代举世闻名的数学家，他十分关心祖国数学科学的发展。人们称赞他是“中国青年数学学子的总教练”。

1980 年，陈教授在北京大学的一次讲学中语惊四座：

“人们常说，三角形内角和等于 180°。但是，这是不对的！”

大家愕然。怎么回事？三角形内角和是 180°，这不是数学常识吗？

接着，这位老教授对大家的疑问作了精辟的解答：

说“三角形内角和为180°”不对，不是说这个事实不对，而是说这种看问题的方法不对，应当说“三角形外角和是360°”！

把眼光盯住内角，只能看到：

三角形内角和是180°；

四边形内角和是360°；

五边形内角和是540°；

…………

n边形内角和是（$n-2$）×180°。

这就找到了一个计算内角和的公式。公式里出现了边数n。

如果看外角呢？

三角形的外角和是360°；

四边形的外角和是360°；

五边形的外角和是360°；

…………

任意n边形外角和都是360°。

这就把多种情形用一个十分简单的结论概括

起来了。用一个与 n 无关的常数代替了与 n 有关的公式，找到了更一般的规律。

设想一只蚂蚁在多边形的边界上绕圈子（图 1－1）。每经过一个顶点，它前进的方向就要改变一次，改变的角度恰好是这个顶点处的外角。爬了一圈，回到原处，方向和出发时一致了，角度改变量之和当然恰好是360°。

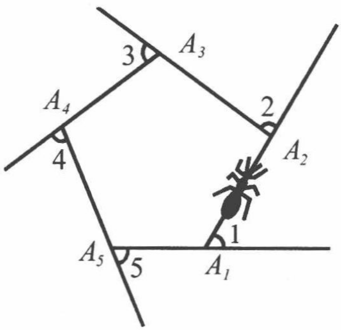

图 1－1

这样看问题，不但给“多边形外角和等于360°”这条普遍规律找到了直观上的解释，而且立刻把我们的眼光引向了更宽广的天地。

一条凸的闭曲线——卵形线，谈不上什么内

角和与外角和。可是蚂蚁在上面爬的时候，它的方向也在时时改变。它爬一圈，角度改变量之和仍是 360°（图 1－2）。

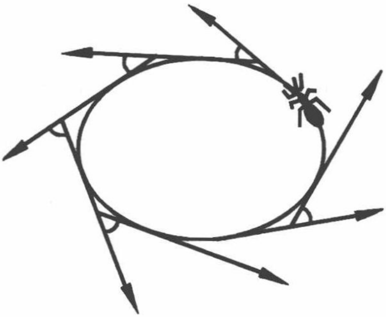

图 1－2

“外角和为 360°”，这条规律适用于封闭曲线！不过，叙述起来，要用“方向改变量之和”来代替“外角和”罢了。

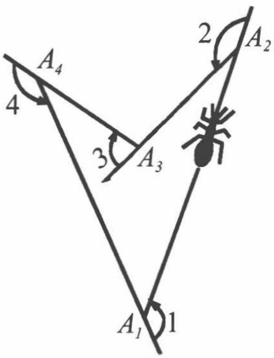

图 1－3

对于凹多边形，就要把“方向改变量总和”改为“方向改变量的代数和”（图 1－3）。不妨约定：逆

时针旋转的角为正角，顺时针旋转的角为负角。当蚂蚁在图示的凹四边形的边界上爬行的时候，在 A_1、A_2、A_4 处，由方向的改变所成的角是正角：$\angle 1$、$\angle 2$、$\angle 4$；而在 A_3 处，由方向的改变所成的角是负角：$\angle 3$。如果你细细计算一下，这 4 个角正负相抵，代数和恰是 $360°$。

上面说的都是平面上的情形，曲面上的情形又是怎样呢？地球是圆的。如果你沿着赤道一直向前走，可以绕地球一圈回到原地。但在地面上测量你前进的方向，却是任何时刻都没有变化。也就是说：你绕赤道一周，方向改变量总和是 $0°$！

圈子小一点，你在房间里走一圈，方向改变量看来仍是 $360°$。

不大不小的圈子又怎么样呢？如果让蚂蚁沿着地球仪上的北回归线绕一圈，它自己感到的（也就是在地球仪表面上测量到的）方向的改变量应当是多少呢？

用一个圆锥面罩着北极，使圆锥面与地球仪表面相切的点的轨迹恰好是北回归线（图 1－4）。这样，蚂蚁在球面上的方向的改变量和在锥面上方向的改变量是一样的。把锥面展开成扇形，便可以看出，蚂蚁绕一圈，方向改变量的总和，正好等于这个扇形的圆心角（图 1－5）：

$$\theta = \frac{180°}{\pi} \times \frac{2\pi r}{l} = \frac{180°}{\pi} \times \frac{2\pi l \sin 23.5°}{l}$$

$$\approx 143.5° \left(圆锥侧面展开成扇形的圆心角\ \theta = \frac{2\pi r}{l} \right)$$

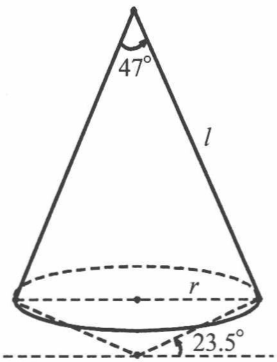

图 1－4

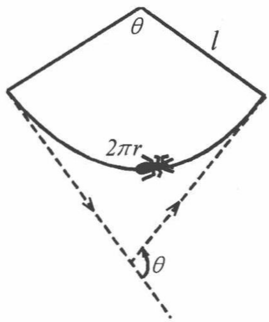

图 1－5

要弄清这里面的奥妙，不妨看看蚂蚁在金字塔上沿正方形爬一周的情形（图 1－6）。它的方向在拐角

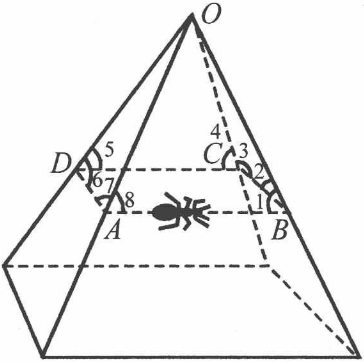

图 1－6

处改变了多大角度？把金字塔表面摊平了一看便知：在 B 处改变量是 $180°-(\angle 1+\angle 2)$；绕一圈，改变量是

$$4\times 180°-(\angle 1+\angle 2+\angle 3+\angle 4+\angle 5+\angle 6+\angle 7+\angle 8)$$

$$=\angle AOB+\angle BOC+\angle COD+\angle DOA$$

这个和，正是锥面展开后的“扇形角”（图 1－7）！

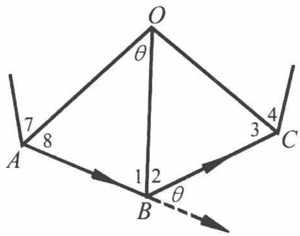

图 1－7

早在2000多年前，欧几里德时代，人们就已经知道三角形内角和是180°。到了19世纪，德国数学家、被称为“数学之王”的高斯，在对大地测量的研究中，找到了球面上由大圆弧构成的三角形内角和的公式。又经过几代数学家的努力，直到1944年，陈省身教授找到了一般曲面上封闭曲线方向改变量总和的公式（高斯—比内—陈公式），把几何学引入了新的天地。由此发展出来的“陈氏类”理论，被誉为划时代的贡献，在理论物理学上有重要的应用。

从普通的、众所周知的事实出发，步步深入、推广，挖掘出广泛适用的深刻规律。从这里显示出数学家透彻、犀利的目光，也表现了数学家穷追不舍、孜孜以求的探索真理的精神。

了不起的密率

提起中国古代的数学成就，都会想起南北朝时期的祖冲之。提起祖冲之，大家最熟悉的是他在计算圆

周率 π 方面的杰出贡献，他推算出：

$$3.1415926 < \pi < 3.1415927$$

他是世界上第一个把 π 值准确计算到小数点后第七位的人。

祖冲之还提出用 $\frac{355}{113}$ 作为 π 的近似分数。人们早一些时候已经知道 π 的一个近似分数是 $\frac{22}{7}$，但误差较大。祖冲之把 $\frac{22}{7}$ 叫“约率”，把 $\frac{355}{113}$ 叫“密率”。$\frac{355}{113}$ 传到了日本，日本人把它叫“祖率”。

很多人都知道用 $\frac{355}{113}$ 表示 π 的近似值是一项了不起的贡献。但是，它的妙处，却有不少人说不出来，或者说不全。

首先，它相当精确：

$$\frac{355}{113} = 3.14159292035\cdots$$

而

$$\pi = 3.1415926535897\cdots$$

所以，误差不超过0.000000267。也就是说：

$$\left|\frac{355}{113}-\pi\right|<0.000000267$$

也许你觉得，精确固然好，但精确并不是$\frac{355}{113}$的唯一功劳。只要把π算得精确了，用个分数代表π还不容易吗？比方说，祖冲之既然把π算到小数点后7位，那么自然可以用分数

$$\frac{314159265}{100000000}=\frac{62831853}{20000000}=3.14159265$$

来作为π的近似值，误差不超过0.000000005，岂不更精确？

但是，这个分数的分母比113大得多。分母大了，就不便写、不便记。

在数学家看来，好的近似分数，既要精确，分母最好又不太大。这两个要求是矛盾的。于是就要定下分子和分母怎么比法。

我们不妨看看分母大小相同的时候，谁更精确一点。这有点像举重比赛，按运动员的体重来分级：轻

量级和轻量级比，重量级和重量级比。这样一比，$\frac{355}{113}$的好处就显出来了。

如果你再耐着性子算一算，就又会发现：在所有分母不超过 113 的分数当中，和 π 最接近的分数就是 $\frac{355}{113}$。所以，人们把它叫做 π 的一个“最佳近似分数”。

如果允许分母再大一些，允许分母是一个 3 位数，能不能找到比$\frac{355}{113}$更接近 π 的分数呢？答案仍然是否定的：任何一个分母小于 1000 的分数，不会比$\frac{355}{113}$更接近 π。

再放宽一点，分母是 4 位数呢？使人惊奇的是，在所有分母不超过 10000 的分数当中，仍找不到比$\frac{355}{113}$更接近 π 的分数。

事实上，在所有分母不超过 16500 的分数当中，要问谁最接近 π，$\frac{355}{113}$是当之无愧的冠军！祖冲之的

密率之妙，该令人叹服了吧！

也许你会问：有谁一个一个地试过？如果没试过，这冠军是如何产生的呢？

数学家看问题，有时候虽然也要一个一个地检查，但更多的是从逻辑上推断，一览无遗地弄个明明白白。要说明分母不超过 16500 的分数不会比$\frac{355}{113}$更接近π，道理并不难：

已经知道 $\pi = 3.1415926535897\cdots$，而 $\frac{355}{113} = 3.14159292035\cdots$，所以

$$0 < \frac{355}{113} - \pi < 0.00000026677 \qquad (1)$$

如果有一个分数$\frac{q}{p}$比$\frac{355}{113}$更接近π，一定有

$$-0.00000026677 < \pi - \frac{q}{p} < 0.00000026677 \qquad (2)$$

把（1）与（2）相加，得到

$$-0.00000026677 < \frac{355}{113} - \frac{q}{p} < 2 \times 0.00000026677 \qquad (3)$$