21世纪保险精算系列教材

Actuarial Science

21世纪保险精算系列教材
精算师考试用书
中国人民大学风险管理与精算中心主编

Financial Mathematics

金融数学（第三版）

孟生旺　编著

中国人民大学出版社

Actuarial Science

21世纪保险精算系列教材
精算师考试用书
中国人民大学风险管理与精算中心主编

Financial Mathematics

金融数学（第三版）

孟生旺 编著

中国人民大学出版社
· 北京 ·

图书在版编目（CIP）数据

金融数学/孟生旺编著．—3版．—北京：中国人民大学出版社，2011.8
21世纪保险精算系列教材
ISBN 978-7-300-14149-7

Ⅰ.①金… Ⅱ.①孟… Ⅲ.①金融-经济数学-教材 Ⅳ.①F830

中国版本图书馆CIP数据核字（2011）第159483号

21世纪保险精算系列教材
精算师考试用书
中国人民大学风险管理与精算中心主编
金融数学（第三版）
孟生旺 编著
Jinrong Shuxue

出版发行	中国人民大学出版社		
社　　址	北京中关村大街31号	**邮政编码**	100080
电　　话	010－62511242（总编室）		010－62511398（质管部）
	010－82501766（邮购部）		010－62514148（门市部）
	010－62515195（发行公司）		010－62515275（盗版举报）
网　　址	http://www.crup.com.cn		
	http://www.ttrnet.com(人大教研网)		
经　　销	新华书店		
印　　刷	北京市鑫霸印务有限公司	**版　　次**	2007年10月第1版
规　　格	185 mm×260 mm　16开本		2011年8月第3版
印　　张	21 插页1	**印　　次**	2011年8月第1次印刷
字　　数	443 000	**定　　价**	36.00元

总 序

从1775年英国公平人寿最早将运用数学工具为产品定价的专门人员命名为精算师以来，精算师职业在国际上已有200多年的发展历史。这一职业最早在人寿和养老金业务中发挥作用，之后逐步向非寿险、健康保险、社会保障等领域扩展。20世纪以后，精算师的职业进一步延伸到银行、投资、公司财务、金融工程等领域。精算师职业领域的扩展与精算职业组织的发展和精算教育水平的提高密切相关。1848年后欧美一些国家陆续成立的精算师协会以及国际精算师协会，为提高全球精算教育标准做出了贡献。例如，国际精算师协会早在1998年就公布了初级精算教育标准，要求2005年后加入国际精算师协会的成员在精算教育标准上符合国际教育标准。2007年，国际精算师协会再次公布了重新修订的初级精算教育标准及教育大纲。国际上著名的精算师职业组织，包括北美寿险精算师协会、北美非寿险精算师协会、英国精算师协会等，也从2000年后陆续对其精算教育标准和精算师考试体系进行改革，强调精算学与统计学、金融学、投资学、会计学、经济学等学科的融合，强调精算学科培养复合型风险管理人才的目标。

我国精算教育和精算师职业发展起步较晚，1992年后才陆续引入北美寿险精算师考试、英国精算师考试、日本精算师考试、北美非寿险精算师考试等，2000年后，中国精算师考试体系逐步建立起来。目前，中国精算师考试的考点已增加到15个。2006年12月，民政部批准中国精算师协会正式筹备成立。中国精算师协会的成立，必将进一步推动中国精算教育和精算师职业的发展，也迫切要求对当前的精算教育体系和精算师考试体系进行必要的改革，以尽快向国际精算师协会发布的精算教育标准看齐。

中国人民大学统计学院是国内较早开展风险管理与精算教育的大学之一。1992年统计学院就开始招收风险管理与精算专业方向的硕士研究生，1993年开始招收该方向的本科生，1996年招收了该专业方向的第一批博士研究生。2004年，经教育部批准备案，统计学院设立了独立的风险管理与精算学硕士学位点和博士学位点，标志着在风险管理与精算人才培养上，形成了学士、硕士、博士多层次、专业化的人才培养教育体系。其专业课程设置完全与国际接轨，涵盖了北美、英国和中国精算师初级课程考试的基本内容，教学大纲紧跟国际精算师协会公布的精算教育指南，同时根据学科发展的国际趋势，每年重新修订课程和教学大纲。在研究方面，设立了中国人民大学风险管理与精算中心。多年来，

在寿险风险管理与精算、非寿险特别是汽车保险风险管理与精算、养老金、社会保障等领域取得了很多有影响的成果，进一步促进了风险管理与精算教育的发展。为适应我国精算教育改革与发展的需要，并体现与国际精算师协会的精算教育标准接轨，中国人民大学风险管理与精算中心精心组织编写了一套精算学系列教材，分两个阶段完成。第一阶段涵盖精算师考试初级课程的全部专业课内容，包括《金融数学》、《风险理论》、《寿险精算学》、《非寿险精算学》、《精算中常用的统计模型》5本教材和配套的学习辅导书，共10本。第二阶段涵盖精算师考试高级课程的全部内容，分寿险、非寿险、养老金、健康保险、社会保障、投资等不同系列。这套教材一方面可以满足各高校精算专业的教学需求，另一方面也可以作为参加各类精算师资格考试学员的学习参考资料，同时，也可以作为对精算学科有兴趣的同仁了解和学习精算的参考书。

这套教材的特点，一是在内容上涵盖了北美寿险、北美非寿险、英国、中国精算师考试最新的内容，同时紧跟国际精算师协会提出的精算教育标准，涵盖了国际精算教育大纲的基本内容；二是为了便于读者自学和教师讲授，我们为第一部每本教材编写了学习辅导用书，辅导书中包括学习要点、教材习题解答和一部分补充练习题及其解答等；三是在写法上，力求把精算学的数理理论与实务结合起来，注意精算数学背后的实践意义，努力从实际意义上解释各种数学关系。

本套教材凝结了中国人民大学风险管理与精算中心全体教师的心血，特别是王晓军、孟生旺、黄向阳、王燕、肖争艳、肖雨谷等老师，他们为本套教材的编写付出了极大的艰辛，统计学院部分硕士研究生和本科生对辅导用书中的习题解答和答案进行了验证，感谢他们为本套教材做出的贡献，同时也感谢中国人民大学出版社的编辑们为本书的出版付出的辛勤劳动。

袁卫

前 言

精算师是一个令人羡慕的职业，也是一个充满挑战的职业，还是一个专业化程度很高的职业。不同国家对精算师的培养方法不尽相同，但要求都非常严格。其中许多国家采取了资格考试的方式，我国也不例外。

保险有寿险和非寿险之分，相应地，精算也包括寿险精算和非寿险精算。北美寿险精算师协会（SOA）和北美非寿险精算师协会（CAS）是国际上两个著名的精算师协会。尽管寿险精算与非寿险精算存在很大差别，但它们具有共同的基础。以 SOA 和 CAS 的资格考试为例，它们的基础课程非常接近，其中有三门基础课程完全相同，这三门基础课程是：

- 概率论（Probability）
- 金融数学（Financial Mathematics）
- 精算建模（Construction and Evaluation of Actuarial Models）

在不同的精算师资格考试中，虽然课程设置存在差异，但对基础课程的要求大体相同。因此，上述三门课程所包含的内容，在各类精算师资格考试中都应属于必考范围，也是一个合格的精算师必须掌握的基本知识。

随着保险业的发展，市场竞争日趋激烈，对精算师的要求越来越高，因此精算师资格考试的内容也在不断更新。2007 年，SOA 和 CAS 对部分课程的考核内容进行了较大调整，其中在金融数学中增加了对衍生产品的考核。这就使得过去出版的《利息理论》教材难以满足该门课程的要求，为此，编写一本内容更为全面的教材就显得很有必要。中国精算师资格考试从 2011 年开始实行新体系。在新体系中，原来的利息理论课程也更名为金融数学。

为了尽可能满足精算师资格考试的需要，我们在本书的编写过程中，主要参考了 SOA 和 CAS 关于金融数学的考试大纲，在内容取舍上基本与金融数学的考试范围相符。但是，为了本书内容的完整性和系统性，我们也增加了一些金融数学考试大纲之外的材料，如期权定价的 Black-Scholes 模型、二叉树模型、随机利率模型等。虽然在金融数学的考试中不会涉及这些内容，但它们有助于读者对其他后续课程的学习。

本书设计了较多的例题和习题，涉及大量计算和绘图。建议读者在使用本书时应用

Excel 完成有关的计算和绘图，尤其在衍生产品的学习过程中，Excel 是非常合适的学习工具。为了便于读者学习，本书附有所有习题的参考答案。

本书在编写过程中得到了许多人的大力支持和帮助，凝结了许多人的劳动成果。中国人民大学统计学院风险管理与精算专业的研究生王维参与了本书第 1、2、3 章初稿的编写，叶芳参与了第 4、5、10 章初稿的编写，钟桢参与了第 6、9、11 章初稿的编写，王晓静、王维、王博和贾文学参与了第 7、8 章习题的编写。宋丽、吴妮娜和刘寅嵩参与了本书参考答案的编写。秦强和郭致杰绘制了本书的许多图表，林俊对本书的初稿进行了认真校对。

在本书第三版的编写过程中，虽然我们尽了最大努力，力求不断完善，但由于水平所限，恐怕仍然存在疏漏，还请读者不吝赐教，我们将不胜感激。

本书得到了中国人民大学统计学院本科专业教材建设项目的资助，在此一并致谢。

作者联系方式与相关资源下载地址：http：//blog. sina. com. cn/mengshw。

孟生旺

目　录

第 1 章 利息的度量

Chapter 1

利息（interest）可以被定义为在一定时期内借款者为了使用一笔资金而向出借者给付的报酬。这可以从两个方面考虑：一方面从资金的拥有者角度出发，他希望从资金的出借中得到补偿；另一方面从资金的使用者角度出发，他必须付给出借者一定的报酬以获得使用资金的权利。在这种意义上，利息可视为借款者所缴纳的租金，用以补偿出借者因为不能使用这笔资金而蒙受的损失。

本章将介绍有关利息的各种度量工具，包括复利和单利、实际利率、名义利率、实际贴现率、名义贴现率、利息力和贴现力等。单利和单贴现率这类度量工具在庞大复杂的金融交易中应用较少，但是可能用于小范围的简单交易中。复利的应用最为广泛，经常在实际的金融交易中出现。而利息力则通常用于学术和理论方面的研究。

本章还将讨论累积函数和贴现函数。累积函数用于计算期初的本金在时刻 t 的累积值，而贴现函数正好相反，计算的是期末的资金在期初时的现值。这两种方法是现金流计算的基础。

1.1 累积函数与实际利率

1.1.1 累积函数

累积函数（accumulation function）是指期初的 1 元本金在时刻 t 的累积值。它是度量利率和利息的最基本工具，其他度量工具（如单利、复利、贴现率、利息力等）都是以累积函数为基础推导出来的。累积函数通常记为 $a(t)$ ，它具有以下性质：

(1) $a(0)=1$ (1—1)

(2) $a(t)$ 通常是递增函数，即利息是非负的。当然，负利息或利息为零的情况偶尔也会出现，如投资亏本或没有盈利时，累积函数即为递减函数或等于常数。

(3) 如果连续计息，则累积函数 $a(t)$ 为连续函数（这种情况较为常见）；反

之，则累积函数 $a(t)$ 为非连续函数。

当期初的本金金额不是 $a(0)=1$，而是 $A(0)$ 时，在时刻 t 的累积值可以表示为：

$$A(t)=A(0)\times a(t)$$

于是

$$a(t)=\frac{A(t)}{A(0)} \tag{1—2}$$

由此可见，$A(t)$ 和 $a(t)$ 可以互相表示。

若以 $I(t)$ 表示 $0\sim t$ 时期的利息额，则有

$$I(t)=A(t)-A(0) \tag{1—3}$$

【例 1—1】

已知累积函数为 $a(t)=kt^2+lt+m$ $(0\leqslant t\leqslant 2)$，如果 $a(0)=100$，$a(1)=110$，$a(2)=136$。求 $t=1$ 时刻投资的 100 元在 $t=10$ 时的累积价值。

【解】 由 $a(0)=100$，$a(1)=110$，$a(2)=136$ 可得下述方程组：

$$\begin{cases}100=m\\110=k+l+m\\136=4k+2l+m\end{cases}$$

解此方程组可得：

$$k=8，l=2，m=100$$

故累积函数为：

$$a(t)=8t^2+2t+100$$

从 $t=1$ 到 $t=10$，资金的增长比例为：

$$\frac{a(10)}{a(1)}=\frac{8\times 10^2+2\times 10+100}{8\times 1^2+2\times 1+100}=8.36$$

因此，在 $t=1$ 时刻投资的 100 元在 $t=10$ 时刻的累积价值为 836 元。

1.1.2 实际利率

所谓实际利率（effective rate of interest），是指 1 元本金在某个时期末赚取的利息。实际利率通常用百分数表示，如 $i=5\%$，这就意味着 1 元本金在期末赚取的利息是 0.05 元。

如果用累积函数表示实际利率，则有

$$i=a(1)-a(0)=a(1)-1 \tag{1—4}$$

$$a(1)=1+i \tag{1—5}$$

由式（1—1）和式（1—5）可知，累积函数 $a(t)$ 必然经过下述两点：$(0,1)$ 和 $(1,1+i)$。图 1—1 表示了这一结果。

用实际利率表示的利息只在期末支付一次，这是它与名义利率的根本区别。在后面我们将会看到，根据名义利率计算的利息在期内可以进行多次支付。

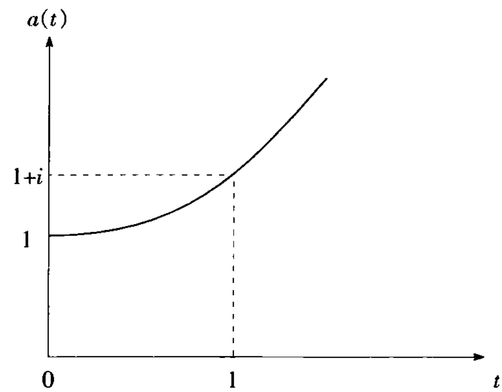

图 1—1　累积函数

实际利率也可以通过金额函数计算如下：

$$\begin{aligned} i &= a(1) - a(0) \\ &= \frac{a(1) - a(0)}{a(0)} \\ &= \frac{A(1) - A(0)}{A(0)} \\ &= \frac{I(1)}{A(0)} \end{aligned} \tag{1—6}$$

此式表明，实际利率 i 也可以表示为某个时期赚取的利息金额与期初的本金金额之比。

譬如，某人 2006 年 1 月 1 日在银行存入 2 000 元，在 2007 年 1 月 1 日时，账户余额为 2 100 元，则该账户在过去一年赚取的利息金额为：

$$2\ 100 - 2\ 000 = 100 \text{（元）}$$

该账户赚取的年实际利率为：

$$\frac{2\ 100 - 2\ 000}{2\ 000} = \frac{100}{2\ 000} = 5\%$$

1.2 单　利

1.2.1　单利的定义

所谓单利（simple interest），是指只对本金计算利息，而对前期已经产生的利息在后期不再计算利息。因此，在单利条件下，每期的利息都是常数。换言之，如果期初的本金为 1 元，那么在单利条件下，第 1 期的利息是 i，期末的累积值为$1+i$；第 2 期的利息也为 i，期末的累积值为$1+2i$，等等。

由此可见，当 t 为整数时，单利条件下的累积函数可表示为：

$$a(t) = 1 + it, \quad t = 0, 1, 2, \cdots \tag{1—7}$$

因此，单利的累积函数为一个线性函数，如图 1—2 所示。

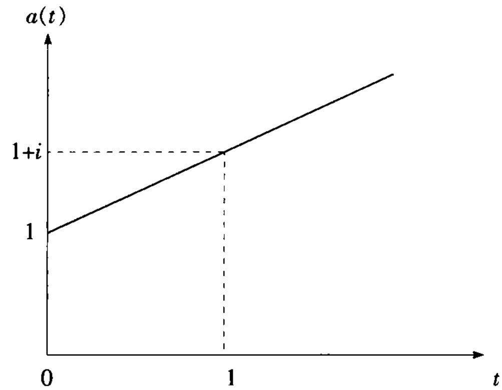

图 1—2 单利的累积函数

如前所述，式（1—7）给出了当 $t\geqslant 0$ 且为整数时单利的计算公式。如果 t 是大于零的任意实数，单利的累积函数仍然具有式（1—7）所示的形式，我们将在 1.4 节给予证明。

在单利的实际应用中，单利通常是年利率，因此累积函数中的时间 t 应以年为单位计量，即需要把 t 表示为年数。下面是实务中常见的几种计算时间 t 的方法：

（1）"实际/实际"规则，即投资天数按两个日期之间的实际天数计算，每年也按实际天数计算（正常年份按 365 天计算，闰年按 366 天计算）。

（2）"实际/365"规则，即投资天数按两个日期之间的实际天数计算，每年按 365 天计算。

（3）银行家规则（banker's rule），记为"实际/360"，即投资天数按两个日期之间的实际天数计算，而每年按 360 天计算。

（4）"30/360"规则，即在计算投资天数时，每月按 30 天计算，每年按 360 天计算。

在此规则下，两个给定日期之间的天数可按下述公式计算：

$$360(Y_2-Y_1)+30(M_2-M_1)+(D_2-D_1)$$

其中，支取日为 Y_2 年 M_2 月 D_2 日，存入日为 Y_1 年 M_1 月 D_1 日。

在应用"30/360"规则计算投资天数时，还需依次进行下述调整：

- 如果 D_1 和 D_2 都是 2 月的最后一天，则令 $D_2=30$；
- 如果 D_1 是 2 月的最后一天，则令 $D_1=30$；
- 如果 D_1 等于 30 或 31，D_2 等于 31，则把 D_2 改为 30；
- 如果 D_1 等于 31，则把 D_1 改为 30。

【例 1—2】

若在 1999 年 6 月 17 日存入1 000元，到 2000 年 3 月 10 日取款，年单利利率为 8%，试分别按下列规则计算利息金额：

(1)“实际/365”规则。

(2)“实际/360”规则。

(3)“30/360”规则。

【解】(1) 从 1999 年 6 月 17 日到 2000 年 3 月 10 日的精确天数为 267，因此在“实际/365”规则下，$t=267/365$，利息金额为：

$$1\ 000\times0.08\times\frac{267}{365}=58.52\text{(元)}$$

(2) 在“实际/360”规则下，实际天数为 267，因此 $t=267/360$，利息金额为：

$$1\ 000\times0.08\times\frac{267}{360}=59.33\text{(元)}$$

(3) 在“30/360”规则下，两个日期之间的天数为：

$$360\times1+30\times(3-6)+(10-17)=263$$

因此 $t=263/360$，利息金额为：

$$1\ 000\times0.08\times\frac{263}{360}=58.44\text{(元)}$$

可见，与精确结果相比，“实际/360”规则下的利息金额较大，而“30/360”规则下的利息金额较小。

在计算两个日期之间的精确天数时，可以应用 Excel 软件。譬如在本例中，在单元格 A1 中输入“2000-3-10”，在单元格 B1 中输入“1999-6-17”，在单元格 C1 中输入“=A1-B1”后回车，即可得到日期格式的结果“1900-9-23”，再将其转化为数值格式，即可得到两个日期之间的实际天数为 267 天。

【例 1—3】

假设银行账户按单利 6%计息，投资者 A 在银行存入 100 元，期限为 2 年，投资者 B 也存入 100 元，但是他在第 1 年末取回了累积值，紧接着又重新存入银行。请问在第 2 年末谁的累积值更大？

【解】在第 2 年末，投资者 A 的累积值为：

$$a(2)=100\times(1+2\times0.06)=112\text{(元)}$$

在第 1 年末，投资者 B 的累积值为：

$$a(1)=100\times(1+1\times0.06)=106\text{(元)}$$

投资者 B 在第 1 年末把 106 元取出，然后又将其重新存入银行，仍以 6%的单利计息，则在第 2 年末投资者 B 的累积值为：

$$a(2)=106\times(1+1\times0.06)=112.36\text{(元)}$$

可见，投资者 B 的累积值更大。这表明在单利条件下，分段投资可以产生更多的利息。

1.2.2 单利与实际利率的关系

在单利条件下，若令 i 为单利利率，在时点 t 的累积值为 $a(t)$，在时点 $t+1$

的累积值为 $a(t+1)$，则从时点 t 开始的一个单位时期内的实际利率 i_t 可表示为：

$$\begin{aligned} i_t &= \frac{a(t+1)-a(t)}{a(t)} \\ &= \frac{[1+i(t+1)]-(1+it)}{1+it} \\ &= \frac{i}{1+it} \end{aligned} \tag{1—8}$$

由此可见，在单利利率为常数的条件下，实际利率是时间的递减函数，即随着时间的推移，实际利率越来越低。这是容易理解的，因为越往后，积累的利息越多，而这些利息不再产生利息，所以实际利率越来越低。

1.3 复 利

1.3.1 复利的定义

单利的利息不再赚取额外的利息，而所谓复利（compound interest），是指前期赚取的利息在后期会继续赚取利息。这就意味着，前期的利息将自动进行再投资。

假设年实际利率为 i，那么 1 元本金在第 1 年末的累积值为（$1+i$）；这一累积值可作为第 2 年的本金进行投资，可赚取利息 $i(1+i)$，再加上年初的本金（$1+i$），则第 2 年末的累积值为（$1+i)^2$；第 2 年末的累积值作为第 3 年的本金进行投资，可赚取利息 $i(1+i)^2$，再加上年初的本金（$1+i)^2$，则第 3 年末的累积值为（$1+i)^3$。依此类推，可知第 t 年末的累积值为：

$$a(t) = (1+i)^t \tag{1—9}$$

式中，t 为非负的正整数。

由此可见，复利的累积值随时间呈几何方式增长，如图 1—3 所示。

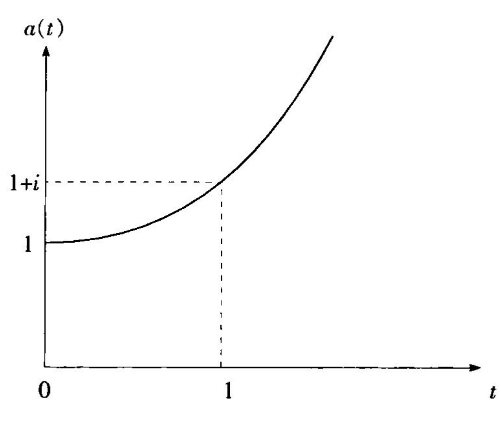

图 1—3 复利的累积函数

式（1—9）给出了复利条件下的累积函数公式，但其推导过程是基于整数年份的，也就是说，到目前为止，我们只知道式（1—9）对整数年份是成立的。如果 t 是任意时间，即包括非整数年份，那么复利条件下的累积函数是否也具有式（1—9）的形式呢？我们将在1.4节进行证明。

【例1—4】

若复利的年利率为5%，初始本金为2 000元，试计算：

（1）在9个月后的累积值；

（2）在2年零3个月后的累积值。

【解】（1）在9个月后的累积值为：

$$2\,000\times(1+0.05)^{0.75}=2\,074.54\text{（元）}$$

（2）在2年零3个月后的累积值为：

$$2\,000\times(1+0.05)^{2.25}=2\,232.06\text{（元）}$$

1.3.2 复利与实际利率的关系

在单利利率为常数的条件下，实际利率是时间的递减函数，即随着时间的延长，实际利率越来越低。那么在复利利率为常数的条件下，实际利率又是如何变化的呢？

在复利条件下，若令 i 为复利利率，在时点 t 的累积值为 $a(t)$，在时点 $t+1$ 的累积值为 $a(t+1)$，因此从时点 t 开始的一个单位时期内的实际利率 i_t 可表示为：

$$\begin{aligned} i_t &= \frac{a(t+1)-a(t)}{a(t)} \\ &= \frac{(1+i)^{t+1}-(1+i)^t}{(1+i)^t} \\ &= i \end{aligned}$$

由此可见，在复利条件下，复利利率等于实际利率。

需要注意的是，在上述复利计算公式中隐含着一个重要假设，即前期所产生利息是按原始本金的投资利率在后期进行再投资的。如果前期所产生的利息在进行再投资时利率有所变化，那么就必须对复利的计算公式进行相应调整。关于这一问题的完整讨论可参见本书后面各章的内容。

【例1—5】

某投资者从银行借款20 000元，4年后需要偿还25 249.54元，请计算该笔借款的年实际利率是多少。

【解】令年实际利率为 i，则根据题意有

$$20\,000(1+i)^4=25\,249.54$$

$$1+i=\left(\frac{25\,249.54}{20\,000}\right)^{1/4}$$