

现代控制理论

MODERN CONTROL THEORY

主 编 吴立成

副主编 杨国胜 郅新凯



中国水利水电出版社

www.waterpub.com.cn

中央民族大学“985工程”、“信息技术在民族地区发展中
应用研究科技创新平台”建设项目
北京市教育委员会共建项目——科学研究与科研基地建设项目

现代控制理论

主 编 吴立成

副主编 杨国胜 邹新凯



中国水利水电出版社
www.waterpub.com.cn

内 容 提 要

本书主要讨论现代控制理论中最核心的内容,包括控制理论的发展概况、状态空间描述、线性系统的运动分析、能控性与能观测性、李亚普诺夫稳定性、状态反馈与观测器、基于状态反馈的伺服系统设计和二次型最优控制。本书提供所有相关的 MATLAB 程序及 Simulink 结构图文件。

本书可作为高等院校自动化和机电一体化等专业本科生与大专生,以及非自动化专业硕士研究生(包括工程硕士研究生)的教材,也可作为科技人员的培训与自学教材。

图书在版编目(C I P)数据

现代控制理论 / 吴立成主编. — 北京 中国水利
水电出版社, 2011. 1
ISBN 978-7-5084-8128-9

I. ①现… II. ①吴… III. ①现代控制理论 IV.
①0231

中国版本图书馆CIP数据核字(2010)第232873号

策划编辑: 周益丹 责任编辑: 杨元泓 加工编辑: 周益丹 封面设计: 李 佳

书 名	现代控制理论
作 者	主 编 吴立成 副主编 杨国胜 郅新凯
出版发行	中国水利水电出版社 (北京市海淀区玉渊潭南路 1 号 D 座 100038) 网址: www.waterpub.com.cn E-mail: mchannel@263.net (万水) sales@waterpub.com.cn 电话: (010) 68367658 (营销中心)、82562819 (万水)
经 售	全国各地新华书店和相关出版物销售网
排 版	北京万水电子信息有限公司
印 刷	北京市天竺颖华印刷厂
规 格	184mm×260mm 16 开本 11 25 印张 273 千字
版 次	2011 年 1 月第 1 版 2011 年 1 月第 1 次印刷
印 数	0001—1000 册
定 价	22.00 元

凡购买我社图书, 如有缺页、倒页、脱页的, 本社营销中心负责调换
版权所有·侵权必究

前 言

随着现代科技，尤其是计算机技术的高速发展，MATLAB 等应用软件越来越多地应用于控制算法设计和控制系统仿真与分析的实践。为反映学科发展的最新动态，本书试图在系统、完整地阐述现代控制理论核心内容的基础上，注重针对现代控制理论涉及的各类问题，提供基于 MATLAB 的解法程序、说明及仿真结果。

本书以编者于 2004~2008 年在清华大学计算机系讲授《现代控制理论》课程所编的讲义为基础，经过多次座谈和讨论，广泛采纳了一线教师、本领域专家和本课程学生的意见，整理加工而成。

本书将现代控制理论的核心内容分为系统的描述、分析与综合三个层次，由简入深地进行讨论。本书内容选择和编写不片面强调理论深度，而是在保证内容的系统性和完整性的前提下，注重在高校教学中的实用性。本书涵盖相关专业教学所要求的所有知识点，同时提供一定深度的参考内容。可作为高等院校相关专业教材，也可作为相关科技人员的培训与自学教材。

本书由吴立成、杨国胜和郅新凯共同编写，并由吴立成负责主编和统稿。

由于编者的能力和水平有限，虽谨慎而为，仍恐书中缺点、错误在所难免，恳请广大同仁和读者多加批评指正，以便今后不断改进为盼。

编者

2010 年 12 月

目 录

前言

绪论	1
----------	---

第 1 章 状态空间描述	5
--------------------	---

1.1 引言	5
--------------	---

1.2 状态空间描述的相关概念	5
-----------------------	---

1.3 系统状态空间方程的建立	7
-----------------------	---

1.4 状态空间方程的一般形式和特点	9
--------------------------	---

1.5 微分方程化为状态空间描述	10
------------------------	----

1.5.1 微分方程中不含输入函数的导数项	10
-----------------------------	----

1.5.2 微分方程中包含输入函数的导数项	11
-----------------------------	----

1.6 传递函数化为状态空间描述	13
------------------------	----

1.6.1 传递函数极点互不相同	13
------------------------	----

1.6.2 传递函数的极点有重根	15
------------------------	----

1.7 离散系统的状态空间描述	17
-----------------------	----

1.7.1 将标量差分方程化为状态空间描述	17
-----------------------------	----

1.7.2 将脉冲传递函数化为状态空间描述	19
-----------------------------	----

1.8 状态方程的规范型式	20
---------------------	----

1.8.1 系统的特征值及其性质	20
------------------------	----

1.8.2 将状态方程化为对角线标准型	21
---------------------------	----

1.9 基于 MATLAB 的模型转换	25
---------------------------	----

习题	27
----------	----

第 2 章 线性系统的运动分析	29
-----------------------	----

2.1 引言	29
--------------	----

2.2 线性系统状态方程的解	29
----------------------	----

2.3 状态转移矩阵	30
------------------	----

2.4 矩阵指数函数 e^{At} 的计算	33
-------------------------------	----

2.4.1 直接算法 (矩阵指数函数)	33
---------------------------	----

2.4.2 对角线标准型与 Jordan 标准型法	33
---------------------------------	----

2.4.3 拉氏变换法	34
-------------------	----

2.4.4 化 e^{At} 为 A 的有限项法	35
------------------------------------	----

2.4.5 求解 e^{At} 的 MATLAB 函数	40
-------------------------------------	----

2.5 离散时间系统状态方程的解	40
------------------------	----

2.5.1 迭代法	40
-----------------	----

2.5.2 Z 变换法 (适用于定常离散系统)	41
-------------------------------	----

2.6 线性连续系统的离散化	43
----------------------	----

2.6.1 时变系统状态方程的离散化	44
--------------------------	----

2.6.2 定常系统状态方程的离散化	45
--------------------------	----

习题	49
----------	----

第 3 章 能控性与能观测性	51
----------------------	----

3.1 引言	51
--------------	----

3.2 线性连续系统的能控性	51
----------------------	----

3.2.1 定常系统状态能控性的代数判据	51
----------------------------	----

3.2.2 状态能控性条件的标准型判据	53
---------------------------	----

3.2.3 用传递函数矩阵表达的状态能 控性条件	55
-----------------------------------	----

3.2.4 线性时变系统的能控性	56
------------------------	----

3.2.5 输出能控性	57
-------------------	----

3.2.6 能控子空间	57
-------------------	----

3.3 线性连续系统的能观测性	58
-----------------------	----

3.3.1 定常系统状态能观测性的代数判据	59
-----------------------------	----

3.3.2 用传递函数矩阵表达的能 观测性条件	60
----------------------------------	----

3.3.3 状态能观测性条件的标准型判据	61
----------------------------	----

3.3.4 线性时变系统的能观性	63
------------------------	----

3.3.5 不能观子空间	64
--------------------	----

3.4 线性离散系统的能控性和能观测性	64
---------------------------	----

3.4.1 定常离散系统的能控性	64
------------------------	----

3.4.2 线性离散定常系统的能观测性	65
---------------------------	----

3.4.3 离散化 (采样周期) 对能控与能观性 的影响	66
---------------------------------------	----

3.5 能控规范型和能观规范型	67
-----------------------	----

3.6 对偶原理	70
----------------	----

3.7 结构分解	71
----------------	----

3.7.1 线性定常系统按能控性的结构分解	71
-----------------------------	----

3.7.2 线性定常系统按能观性的结构分解	73
-----------------------------	----

3.7.3 能控与能观性规范分解	74
------------------------	----

习题	75
----------	----

第4章 李亚普诺夫稳定性	79	5.4.1 全维状态观测器结构	118
4.1 引言	79	5.4.2 全维状态观测器的误差方程	118
4.2 Lyapunov 意义下的稳定性问题	79	5.4.3 对偶问题	119
4.2.1 平衡状态、给定运动与扰动方程之原点	79	5.4.4 可观测条件	120
4.2.2 Lyapunov 意义下的稳定性定义	80	5.4.5 全维状态观测器的极点配置算法	120
4.2.3 预备知识	82	5.4.6 最小阶观测器	127
4.3 Lyapunov 稳定性理论	83	5.4.7 系统设计的分离性原理: 观测器的引入对闭环系统的影响	132
4.3.1 Lyapunov 第二法	84	5.4.8 控制器—观测器的传递函数	134
4.3.2 非线性系统的稳定性	87	5.4.9 利用 MATLAB 设计状态观测器	134
4.4 线性系统的 Lyapunov 稳定性分析	89	习题	135
4.4.1 线性定常系统的 Lyapunov 稳定性分析	89	第6章 基于状态反馈的伺服系统设计	139
4.4.2 线性定常离散系统稳定性分析	94	6.1 引言	139
4.4.3 线性时变系统的稳定性分析	94	6.2 被控系统具有积分器的 I 型闭环伺服系统	139
4.5 基于 Lyapunov 稳定性理论的模型参考控制系统设计	95	6.3 被控系统中不含积分器时的 I 型闭环伺服系统的设计	143
习题	97	6.4 带最小阶观测器的 I 型闭环伺服系统的设计	152
第5章 状态反馈与观测器	99	习题	157
5.1 引言	99	第7章 二次型最优控制	158
5.1.1 问题的提法	99	7.1 引言	158
5.1.2 性能指标的类型	100	7.2 问题的提法	158
5.1.3 综合问题的主要研究内容	101	7.3 参数最优问题的 Lyapunov 第二法的解法	159
5.2 极点配置问题	101	7.4 终点时间无限的线性调节器问题	162
5.2.1 状态反馈极点配置问题定义	101	7.5 二次型最优控制问题的 MATLAB 解法示例	166
5.2.2 可配置条件	102	习题	172
5.2.3 极点配置的算法	105	参考文献	174
5.2.4 利用 MATLAB 求解极点配置问题	111		
5.3 利用极点配置法设计调节器型系统	111		
5.4 状态重构问题与伦伯格 (Luenberger) 状态观测器	117		

绪 论

绪论部分主要介绍控制理论的发展概况，并简单对比一下现代控制理论与经典控制理论的异同点。帮助读者在学习现代控制理论的基本内容之前，对它的产生、发展和特点有一个初步的了解，为以后各章的学习打下基础。

一、控制理论的发展概况

控制理论从早期的萌芽，到形成理论体系，经历了几个不同的发展阶段。本节将控制理论分为控制理论的萌芽、经典控制（古典控制）、现代控制、大系统理论与智能控制几个阶段，下面逐一进行介绍。

1. 控制理论的萌芽

人类利用自动控制技术的历史，可以追溯到几千年前。比如两千多年前，我国先人发明了一种开环自动调节系统——指南车。北宋时期的 1086—1089 年间，我国发明建造的水运仪象台，则已经是一种闭环自动调节系统。这些装置比更晚出现的西方装置更为复杂、精密。但由于缺乏理论总结和进一步的研究，以及西方人对中国古代科技缺乏了解等原因，这些古老的智慧结晶并没有成为公认的自动化装置。

到了 18 世纪，随着现代工业的发展，欧洲出现了代表性的古代自动化装置：1765 年，俄国的巴尔祖诺夫（Polzunov）发明的蒸汽锅炉水位调节器（如图 0.1 所示）；1769 年，英国人瓦特（James Watt）发明的蒸汽机离心式调速器。

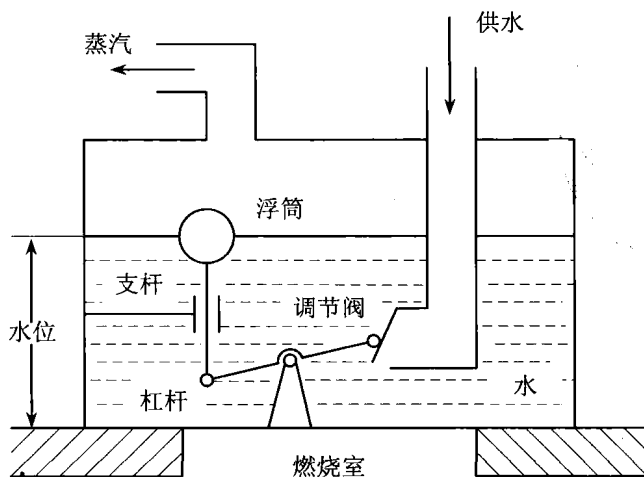


图 0.1 蒸汽锅炉水位调节系统

巴尔祖诺夫和瓦特的工作直接推动了自动控制理论的形成与发展。19 世纪末，自动控制理论开始萌芽，其中有代表性的工作包括：1868 年麦克斯韦尔（J. C. Maxwell）发表了《On

Governors》。1873 年劳斯 (Routh) 提出了 5 阶以下微分方程的判别方法, 并于 1877 年全面解决了微分方程稳定性的判别问题。1895 年, 捷克人赫尔维茨 (Hurwitz) 提出了稳定判别的赫尔维茨法。此外维什聂格拉茨基于 1877 年发表了“调节器的一般理论”。

2. 经典控制

随着自动控制理论的萌芽和发展, 控制理论的发展就进入了第二阶段, 即经典控制 (古典控制) 阶段。二次大战前后是自动控制理论形成的萌芽和准备时期。由于战争的需要, 促使人们发明了自动跟踪目标的雷达、火炮、飞机自动驾驶仪等自动化装置。到了 20 世纪中叶, 自动控制理论就成为一门独立的学科。

二战之前的 1927 年, 伯德 (H. W. Bode) 分析并总结了电子反馈放大器的原理。1932 年, 奈魁斯特 (H. Nyquist) 研制出电子管振荡器, 并研究出了系统稳定性的分析方法, 形成了 Nyquist-Bode 图。伯德、奈魁斯特等人的成果和著作为自动控制理论的形成奠定了基础。

二战之后的 1947 年, 尼柯尔斯 (James Nichols) 提出了根据开环对数频率特性得到系统闭环频率特性的方法。1949 年, 伊万斯 (Evans) 提出了根轨迹法, 可在平面上直观地进行问题的分析与设计。1948 年, 美国数学家和哲学家诺伯特·维纳 (Norbert Wiener) 发表了著名的《Cybernetics, on Control and Communication in the Animal and Machine》一书, 标志着控制论的诞生, 维纳也被称为是控制论的奠基人。维纳指出控制论是研究动物 (包括人类) 和机器内部的控制与通信的一般规律的学科, 着重研究上述过程的数学关系, 而不涉及过程内在的物理、化学、生物等具体现象。控制论涉及信息论、计算机、自动控制理论、现代数学和神经系统等学科。

我国著名学者钱学森于 1954 年出版了用英文写作的《工程控制论》, 全面总结了当时自动控制理论的成就, 同时提出了多变量控制问题。该书于 1956 年译成俄文, 1957 年译成德文, 1958 年译成中文。对控制理论的发展与应用, 特别是在控制理论的工程实践方面做出了卓越的贡献。

对反馈理论、频率响应理论的总结和发展, 形成了建立在频率法和根轨迹法基础上的经典 (古典) 控制理论。20 世纪 50 年代末, 经典控制理论逐渐发展成熟, 并开始分化和发展: 从单变量控制向多变量控制发展, 从连续系统向离散系统发展, 从传统的反馈控制向最优化、自适应、鲁棒控制发展。开始进入现代控制阶段。

3. 现代控制

20 世纪 50 年代初和 60 年代末, 空间技术蓬勃发展:

1957 年 10 月 4 日, 前苏联制造出世界第一颗人造卫星。

1958 年 1 月 31 日, 美国人将“探险 1 号”送入太空。

1959 年 9 月 12 日, 人类第一颗月球火箭发射成功。

1961 年 4 月 12 日, 前苏联第一艘载人飞船送入月球轨道。

1969 年 7 月 16 日, “阿波罗 11 号”登上月球。

由于空间系统结构复杂, 存在严重的非线性、不确定性, 对控制系统的精度较高, 经典控制无法解决相关问题, 受到严重的挑战。随着现代数学 (泛函分析、矩阵理论、现代代数等) 和电子计算机技术的发展, 1960 年前后, 控制理论有了重大的突破和创新: 1957 年, 贝尔曼 (Bellman) 提出动态规划理论, 可用于求解最优控制问题。使最优控制受到越来越多的重视,

用微分方程分析控制系统的时域法掀起了高潮。这一时期克拉索夫斯基将李雅普诺夫函数用于分析控制系统获得成功。1960 年美国自动控制第一届联合会上首次提出了“现代控制”这一名词,并指出其控制对象是航空、航天、航海、国防、工业过程中的多输入/输出系统。1960 年,卡尔曼(Kalman)在莫斯科召开的第一届 IFAC 大会上,提出状态空间法及能控性和能观性的新概念。1961 年,庞德里亚金证明了极大值原理。这些方法构成了现代控制理论的发展起点和基础,并使现代控制理论在 20 世纪 60 年代迅速地发展起来。到 1970 年又发展了多变量模型和最优控制,1980 年鲁棒控制系统设计得到广泛研究。目前现代控制理论的主要内容包括:线性系统理论、最优控制、估计、辨识、自适应、鲁棒、现代频域法、分布参数系统、变结构控制、非线性控制等。

目前,国内外在空间技术、飞行控制和工业生产等许多方面都已广泛采用现代控制理论,促进了生产力的发展。另一方面,新技术的发展又不断向控制理论提出了新的要求,推动现代控制理论的分化和分化。

4. 大系统理论与智能控制

进入 20 世纪 70 年代以来,控制理论向着“大系统理论”和“智能控制”两个方向发展。大系统:是指规模庞大、结构复杂、变量众多的信息与控制系统,如生产过程、交通运输、空间技术等方面的控制与信息处理问题。“大系统理论”运用控制和信息的观点,研究各种大系统的结构方案、总体设计中的分解方法和协调等问题。

智能控制研究及模拟人类智能活动的规律,研制具有人类智能的控制及信息处理系统。目前主要包括:模糊控制(Fuzzy Control)、神经网络控制(Neural Networks Control)、专家控制(Expert Control)、递阶智能控制(Hierarchically Intelligent Control)、仿人智能控制、学习控制、进化控制、集成/混合智能控制等。

二、现代控制与经典控制对比

经典控制以传递函数为数学模型,以单输入单输出的线性定常系统为主要研究对象,以根轨迹法和频率响应法等频域法为基本方法,控制系统设计的目标是确定控制器的结构和参数。其优点是物理概念清楚,便于手工计算,对数学模型要求不高。缺点是使用范围较窄,主要适应于单变量系统,并且很大程度上依赖人的经验。

现代控制以状态方程为数学模型,其研究对象可以是多变量、非线性、时变、离散的系统,以状态空间法为基本方法,控制系统设计的目标是实现系统在一定意义下的最优化等。其优点是理论分析严格,适合计算机计算,适用范围宽,如航天、航空、航海、兵器、机器人,以及经济学、社会学、生物学、生态学等。缺点是对系统的数学模型要求较高;全数值求解,有时计算过于复杂难以实现。

现代控制理论要求使用控制对象的精确数学模型,但复杂系统的精确模型往往难以建立,导致现代控制方法无法实现。而智能控制方法可以不依赖于系统精确模型实现复杂系统的控制,这也是控制理论向智能控制的方向发展的原因之一。

三、关于 MATLAB 的说明

MATLAB 是 MATrix 和 LABoratory 两词的组合,意为矩阵工厂。1984 年 MathWorks 公

司把 MATLAB 正式推向市场，其基本数据结构是矩阵，可以以命令行或编程方式运行。MATLAB 具有一般数学处理所需的各种功能，包括高效的数值计算、矩阵运算、动态系统仿真和图形生成等。

目前，MATLAB 已成为科研工作者必须掌握的基本工具。在国际学术界，MATLAB 已经被认为是准确、可靠的科学计算标准软件之一。从 2002 年初夏所推 6.5 版开始，其运算速度向前迈进了一大步。近年来版本不断更新，并提供越来越多的各种专业工具箱。

本书以及所附课件的一些例题及作业将基于 MATLAB 来进行。因此希望读者在学习本书的同时掌握 MATLAB 的基本操作、编程方法，并能运用 Simulink 进行控制系统仿真。

第 1 章 状态空间描述

1.1 引言

一个复杂系统可能有多个输入和多个输出，并且以某种方式相互关联或耦合。为了分析这样的系统，必须简化其数学表达式，转而借助于计算机来进行各种大量而乏味的分析与计算。从这个观点来看，状态空间法对于系统分析是最适宜的。

经典控制理论是建立在系统的输入—输出关系或传递函数的基础之上的，而现代控制理论以 n 个一阶微方程来描述系统，这些微分方程又组合成一个一阶向量—矩阵微分方程。应用向量—矩阵表示方法，可极大地简化系统的数学表达式。状态变量、输入或输出数目的增多并不增加方程的复杂性。事实上，分析复杂的多输入—多输出系统，仅比分析用一阶纯量微分方程描述的系统在方法上稍复杂一些。

本书将依次讨论基于状态空间方程的控制系统的描述、分析与设计。本章讨论系统的状态空间描述方法。首先给出状态空间描述的相关概念，讨论系统状态空间方程的建立方法和过程，以及状态空间方程的一般形式和特点。然后讨论由微分方程和传递函数转换得到状态空间描述的方法，以及状态空间方程的对角线和约当(Jordan)规范型。最后讨论如何利用 MATLAB 进行系统模型的转换（从传递函数变换为状态空间模型）。

1.2 状态空间描述的相关概念

以如图 1.1 所示的 RLC 网络为例， u 为输入变量， u_C 为输出变量，则由电路原理有

$$\begin{cases} \dot{u}_C = \frac{du_C}{dt} = \frac{1}{C}i \\ i = \frac{di}{dt} = -\frac{1}{L}u_C - \frac{R}{L}i + \frac{1}{L}u \end{cases} \quad (1.1)$$

这就是系统的一阶微分方程组。

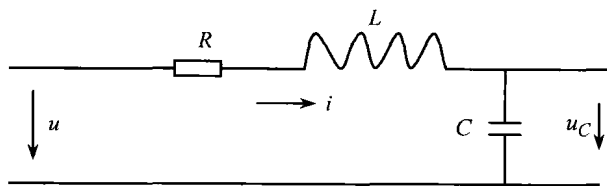


图 1.1 RLC 网络

消去中间变量 i 得

$$LC \frac{d^2 u_C}{dt^2} + RC \frac{du_C}{dt} + u_C = u \quad (1.2)$$

上式进行拉氏变换可得系统的传递函数为

$$\frac{U_C(s)}{U(s)} = \frac{1}{LCS^2 + RCS + 1} \quad (1.3)$$

把系统的一阶微分方程组 (1.1) 写成向量矩阵方程形式有

$$\begin{bmatrix} \dot{u}_C \\ \dot{i} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{C} \\ -\frac{1}{L} & -\frac{R}{L} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_C \\ i \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{L} \end{bmatrix} u \quad (1.4)$$

这其实就是状态空间描述中的状态方程 (参见下文定义)。

状态空间描述的一些相关概念可以如下定义:

(1) 状态变量。动力学系统的状态变量是指能够完全描述系统时域行为的任意一个最小变量组。以如图 1.1 所示的 RLC 网络为例, 如果已知 $t=t_0$ 时刻 u_C 和 i 的值, 和 $t \geq t_0$ 时输入 u_C 的时间函数, 那么, 系统在 $t \geq t_0$ 的任何瞬间的行为就完全确定了, 这组变量 (u_C 和 i) 就称为状态变量。

(2) 状态向量。以状态变量为元组成的向量, 称为状态向量。以如图 1.1 所示的 RLC 网络为例, 状态向量为 $x(t) = \begin{bmatrix} u_C \\ i \end{bmatrix}$ 或 $x(t) = (u_C, i)^T$ 。一般而言, 若 $x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)$ 是系统

的一组状态变量, 则状态向量为 $x(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \dots \\ x_n(t) \end{bmatrix}$ 或 $x^T = [x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)]$ 。

(3) 状态空间。分别以状态变量 $x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)$ 为坐标, 组成的 n 维正交空间称为状态空间。相平面就是一种两维的状态空间。状态空间中的每一点都代表了状态变量唯一的、特定的一组值, 对应于系统的某一特定状态。反之, 系统任何时刻的状态都可以用状态空间的一个点来表示。

(4) 状态方程。表示系统状态变量组和输入变量组之间因果关系的表达式, 如式 (1.4)。

(5) 输出方程。表示系统输出变量组与内部变量组以及输入变量组之间转换关系的表达式, 是一个代数表达式。以如图 1.1 所示的 RLC 网络为例, 输出方程为 $u_C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_C \\ i \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix} u$ 。

显然, 系统的一阶微分方程组 (1.1)、传递函数 (1.3) 和状态方程 (1.4) 都描述了系统的动态, 都可作为系统的数学模型。但其中传递函数只描述了系统的输入和输出之间的关系, 是所谓的外部描述, 或称为输入—输出描述, 即描述的前提是把系统视为一个“黑箱”, 不表征系统的内部结构和内部变量, 只是反映外部变量间的因果关系, 即输入—输出之间的因果关系。而一阶微分方程组和状态方程则是属于所谓的内部描述, 即基于系统内部分析的一类数学模型。不过, 一阶微分方程组 (1.1) 和状态方程 (1.4) 都没有包含输出 u_C 的显性表示式, 因此应结合输出方程共同构成描述系统的完整模型。

1.3 系统状态空间方程的建立

对于任何控制系统,可根据物理化学原理来建立不同形式的数学模型以描述其动力学行为。建立状态空间方程的一般步骤如下:

- (1) 确定系统的输入变量、输出变量及状态变量;
- (2) 根据物理化学定律,列出系统动态特性的微分方程;
- (3) 化为关于状态变量的一阶微分方程组和代数方程;
- (4) 整理为标准形式的状态方程和输出方程。

以如图 1.2 所示的 RLC 网络为例,其状态空间描述方程的确定过程如下。

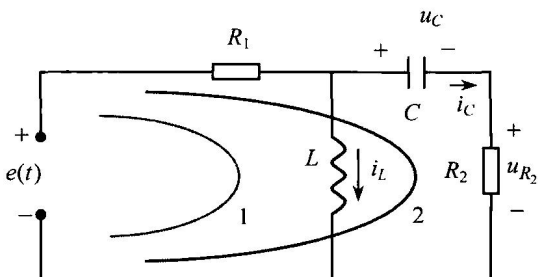


图 1.2 RLC 网络

(1) 确定输入、输出及状态变量。 u_C 和 i_L 可构成完全描述系统状态的最小变量组,选择 u_C 和 i_L 为状态变量,组成状态向量 $x = [i_C \ i_L]^T$ 。输入与输出变量一般根据对系统的研究角度来确定,本例取 $e(t)$ 、 $u_{R_2}(t)$ 分别为输入与输出变量。

(2) 列写系统动态特性的微分方程。分别取如图 1.2 所示的回路 1 和 2,列写网络方程有

$$\begin{cases} R_1(i_C + i_L) + L \frac{di_L}{dt} = e(t) \\ R_1(i_C + i_L) + u_C + R_2 i_C = e(t) \end{cases} \quad (1.5)$$

这就得到了描述系统动态特性的微分方程。

(3) 推导关于状态变量的一阶微分方程组和代数方程。 i_C 不是状态变量,应消去,将 $i_C = C \frac{du_C}{dt}$ 代入 (1.5) 得

$$\begin{cases} R_1 i_L + R_1 C \frac{du_C}{dt} + u_C + R_2 C \frac{du_C}{dt} = e(t) \\ R_1 i_L + R_1 C \frac{du_C}{dt} + L \frac{di_L}{dt} = e(t) \end{cases} \quad (1.6)$$

整理得到状态变量与输入之间的关系为

$$\begin{cases} \frac{du_C}{dt} = -\frac{1}{(R_1 + R_2)C}u_C - \frac{R_1}{(R_1 + R_2)C}i_L + \frac{1}{(R_1 + R_2)C}e(t) \\ \frac{di_L}{dt} = \frac{R_1}{(R_1 + R_2)L}u_C - \frac{R_1 R_2}{(R_1 + R_2)L}i_L + \frac{R_2}{(R_1 + R_2)L}e(t) \end{cases} \quad (1.7)$$

另一方面, 状态变量与输出之间的关系为

$$u_{R_2} = R_2 i_C = R_2 C \frac{du_C}{dt} = -\frac{R_2}{R_1 + R_2}u_C - \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}i_L + \frac{R_2}{R_1 + R_2}e(t) \quad (1.8)$$

这就推导得到了关于状态变量的一阶微分方程组 (1.7) 和代数方程 (1.8)。

(4) 整理为标准形式的状态方程和输出方程。把关于状态变量的一阶微分方程组 (1.7) 和代数方程 (1.8) 写为关于状态变量的向量形式有

$$\begin{bmatrix} \dot{u}_C \\ \dot{i}_L \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{(R_1 + R_2)C} & -\frac{R_1}{(R_1 + R_2)C} \\ \frac{R_1}{(R_1 + R_2)L} & -\frac{R_1 R_2}{(R_1 + R_2)L} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_C \\ i_L \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{(R_1 + R_2)C} \\ \frac{R_2}{(R_1 + R_2)L} \end{bmatrix} e(t) \quad (1.9)$$

$$\begin{bmatrix} u_{R_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{R_2}{R_1 + R_2} & -\frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_C \\ i_L \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{R_2}{R_1 + R_2} \end{bmatrix} [e(t)] \quad (1.10)$$

这就得到了系统的状态空间描述方程, 即系统的状态方程 (1.9) 和输出方程 (1.10)。

令状态向量及其导数为 $x(t) = \begin{bmatrix} u_C \\ i \end{bmatrix}$, $\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} \dot{u}_C \\ \dot{i} \end{bmatrix}$, 输入 $u=e(t)$, 输出 $y=u_{R_2}(t)$ 。并令

$$\begin{aligned} A &= \begin{bmatrix} -\frac{1}{(R_1 + R_2)C} & -\frac{R_1}{(R_1 + R_2)C} \\ \frac{R_1}{(R_1 + R_2)L} & -\frac{R_1 R_2}{(R_1 + R_2)L} \end{bmatrix}_{2 \times 2} \\ B &= \begin{bmatrix} \frac{1}{(R_1 + R_2)C} \\ \frac{R_2}{(R_1 + R_2)L} \end{bmatrix}_{2 \times 1} \\ C &= \begin{bmatrix} -\frac{R_2}{R_1 + R_2} & -\frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} \end{bmatrix}_{1 \times 2} \\ D &= \begin{bmatrix} \frac{R_2}{R_1 + R_2} \end{bmatrix}_{1 \times 1} \end{aligned}$$

则最终可得标准形式的状态空间描述方程为

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx + Du \end{cases} \quad (1.11)$$

1.4 状态空间方程的一般形式和特点

一般而言, n 维线性定常系统的状态空间描述为

$$\begin{cases} \dot{x} = A_{n \times n}x + B_{n \times r}u \\ y = C_{m \times n}x + D_{m \times r}u \end{cases} \quad (1.12)$$

其中状态向量 x 为 n 维, 输入向量 u 为 r 维, 输出向量 y 为 m 维。 A 为状态矩阵, B 为输入矩阵, C 为输出矩阵, D 为直通矩阵。

对于线性时变系统, 系数矩阵也将随时间变化, 因此有

$$\begin{cases} \dot{x} = A(t)x + B(t)u \\ y = C(t)x + D(t)u \end{cases} \quad (1.13)$$

对于非线性系统, 状态方程为非线性函数形式, 为

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x, u) \\ y = g(x, u) \end{cases} \quad (1.14)$$

对于非线性时变系统, 则为

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x, u, t) \\ y = g(x, u, t) \end{cases} \quad (1.15)$$

根据式 (1.12), 可将一般线性系统的结构图画为如图 1.3 所示的图。

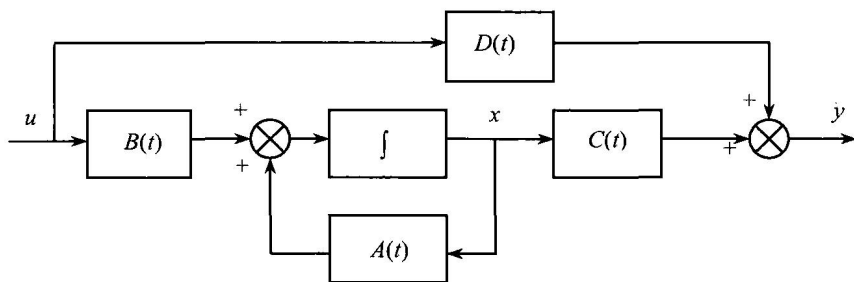


图 1.3 一般线性系统的方框图

状态空间描述方程的特点有:

- (1) 状态空间方程揭示了动态系统的本质, 即输入引起状态变化, 而状态决定了输出, 属于内部描述。
- (2) 输入引起的状态变化是一个动态的运动过程, 因此状态方程为向量微分方程。状态决定输出则是一个变换过程, 因此输出方程为代数方程。
- (3) 对于给定系统, 状态变量的选择不是唯一的。如果 x 是一个状态向量, 则其满秩变换 $\hat{x} = P^{-1}x$ 也是。
- (4) 状态变量可以不是物理上可测量/可观察的量。但为便于控制系统的分析, 往往把状态变量选为可测量或可观察的量。
- (5) 系统的状态空间方程本质上就是一阶微分方程组, 是时域内的一种矩阵运算方法。
- (6) 模型表示简洁, 形式统一, 便于计算机求解。

1.5 微分方程化为状态空间描述

在经典控制理论中, 控制系统的一般时域模型为高阶微分方程

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1} \dot{y} + a_n y = b_0 u^{(n)} + b_1 u^{(n-1)} + \cdots + b_{n-1} \dot{u} + b_n u \quad (1.16)$$

对比线性定常系统的状态空间表达式

$$\begin{cases} \dot{x} = A_{n \times n} x + B_{n \times r} u \\ y = C_{m \times n} x + D_{m \times r} u \end{cases}$$

可知选取适当的状态变量 x , 并根据时域模型导出相应的系数矩阵 A 、 B 、 C 、 D , 即可得到相应的状态空间方程。下面分两种情况来讨论。

1.5.1 微分方程中不含输入函数的导数项

此时方程形式为

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1} \dot{y} + a_n y = b_n u \quad (1.17)$$

转化步骤如下。

(1) 选择状态变量。 n 阶系统应选择 n 个独立的状态变量, 显然 $y, \dot{y}, \ddot{y}, \dots, y^{(n-1)}$ 可以确定系统的状态, 可以选为系统的一组状态变量。即令

$$x_i = y^{(i-1)}, \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (1.18)$$

原则上状态变量可以有其他无穷多种选法, 但上述选法便于推导状态空间方程。

(2) 将高阶微分方程化为关于状态变量的一阶微分方程组。对式 (1.18) 求导, 并将式 (1.17) 代入可得

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = \dot{y} = x_2 \\ \dot{x}_2 = \ddot{y} = x_3 \\ \vdots \\ \dot{x}_{n-1} = y^{(n-1)} = x_n \\ \dot{x}_n = y^{(n)} = -a_n x_1 - a_{n-1} x_2 - \cdots - a_1 x_n + b_n u \end{cases} \quad (1.19)$$

(3) 写出输出关系式。输出关系式显然为

$$y = x_1 \quad (1.20)$$

(4) 化为标准形式。由式 (1.19) 可得状态方程为

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \vdots \\ \dot{x}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & & \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & & & 1 \\ -a_n & -a_{n-1} & \cdots & -a_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ b_n \end{bmatrix} u \quad (1.21)$$

由式 (1.20) 可得输出方程为

$$y = [1 \quad 0 \quad \cdots \quad 0] x \quad (1.22)$$

其中 $x^T = [x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)]$ 。

例 1.1 设系统输入—输出微分方程为

$$\ddot{y} + 5\dot{y} + 6y = 8u$$

试求状态空间表达式。

解 系统为 3 阶系统, $n=3$ 。首先取状态变量 $x_1 = y$, $x_2 = \dot{y}$, $x_3 = \ddot{y}$, 对应于式 (1.17) 可知 $a_1 = 5$, $a_2 = 6$, $a_3 = 7$, $b_3 = 8$ 。

因此由式 (1.21) 和式 (1.22) 可得状态空间表达式为

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -7 & -6 & -5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 8 \end{bmatrix} u$$

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

1.5.2 微分方程中包含输入函数的导数项

此时方程形式为

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1} \dot{y} + a_n y = b_0 u^{(n)} + b_1 u^{(n-1)} + \cdots + b_{n-1} \dot{u} + b_n u \quad (1.23)$$

方程右边存在 u 的导数项时, 系统的状态就可能出现无穷大跳变, 破坏解的存在性和唯一性。解决的方法可以通过状态变量的特定选择, 使导出的一阶微分方程组右边不再出现 u 的导数项。这可以将状态变量取为 y 和 u 的各阶导数的某种线性组合来实现, 而合适的组合系数通过待定系数法来确定。转化步骤如下。

(1) 选择状态变量。

令

$$\begin{cases} x_1 = y - \beta_0 u \\ x_2 = y^{(1)} - \beta_0 u^{(1)} - \beta_1 u \\ x_3 = y^{(2)} - \beta_0 u^{(2)} - \beta_1 u^{(1)} - \beta_2 u \\ \dots \\ x_n = y^{(n-1)} - \beta_0 u^{(n-1)} - \beta_1 u^{(n-2)} - \cdots - \beta_{n-2} u^{(1)} - \beta_{n-1} u \\ x_{n+1} = y^n - \beta_0 u^{(n)} - \beta_1 u^{(n-1)} - \cdots - \beta_{n-1} \dot{u} - \beta_n u \end{cases} \quad (1.24)$$

其中 x_{n+1} 用于辅助推导, $\beta_0, \beta_1, \dots, \beta_n$ 为待定系数, 其求解方法如下。

用 $a_n, a_{n-1}, \dots, a_1, 1$ 分别乘以 (1.24) 式中相应方程两端, 并移项, 得

$$\begin{cases} a_n y = a_n x_1 + a_n \beta_0 u \\ a_{n-1} y^{(1)} = a_{n-1} x_2 + a_{n-1} \beta_0 u^{(1)} + a_{n-1} \beta_1 u \\ \dots \\ a_1 y^{(n-1)} = a_1 x_n + a_1 \beta_0 u^{(n-1)} + a_1 \beta_1 u^{(n-2)} + \cdots + a_1 \beta_{n-2} u^{(1)} + a_1 \beta_{n-1} u \\ y^n = x_{n+1} + \beta_0 u^{(n)} + \beta_1 u^{(n-1)} + \cdots + \beta_{n-1} \dot{u} + \beta_n u \end{cases} \quad (1.25)$$

显然式 (1.25) 中各方程左端相加等于线性微分方程 (1.23) 的左端, 因此右端也应相等, 即