高等学校计算机类课程应用型人才培养规划教材

离散数学

Discrete Mathematics

张 辉　张 瑜　孙宪坤　编著

中国铁道出版社
CHINA RAILWAY PUBLISHING HOUSE

高等学校计算机类课程应用型人才培养规划教材

离 散 数 学

张 辉 张 瑜 孙宪坤 编著

中国铁道出版社
CHINA RAILWAY PUBLISHING HOUSE

内 容 简 介

离散数学是计算机科学基础理论的核心课程，也是现代数学的一个重要分支。本教材包含了集合论、图论、数理逻辑、组合数学、代数系统等内容。在介绍离散数学主要内容的同时，对相关知识的专业应用也做了实用性介绍。

本书适合作为计算机和相关专业本科生“离散数学”的教学用书，也可以作为对离散数学感兴趣的学生的参考书。

图书在版编目（CIP）数据

离散数学/张辉，张瑜，孙宪坤编著. — 北京：中国铁道出版社，2011.7

高等学校计算机类课程应用型人才培养规划教材

ISBN 978-7-113-13034-3

Ⅰ. ①离… Ⅱ. ①张… ②张… ③孙… Ⅲ. ①离散数学—高等学校—教材 Ⅳ. ①0158

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2011)第 098005 号

书　　名：**离散数学**

作　　者：张　辉　张　瑜　孙宪坤　编著

策划编辑：严晓舟　周海燕

责任编辑：周海燕　鲍　闻　　**读者热线**：400-668-0820

封面设计：付　巍　　**封面制作**：白　雪

责任印制：李　佳

出版发行：中国铁道出版社（北京市宣武区右安门西街 8 号　邮政编码：100054）

印　　刷：三河兴达印务有限公司

版　　次：2011 年 7 月第 1 版　　2011 年 7 月第 1 次印刷

开　　本：787mm×1092mm　1/16　**印张**：14.5　**字数**：345 千

印　　数：3 000 册

书　　号：ISBN 978-7-113-13034-3

定　　价：24.00 元

丛书序

当前，世界格局深刻变化，科技进步日新月异，人才竞争日趋激烈。我国经济建设、政治建设、文化建设、社会建设以及生态文明建设全面推进，工业化、信息化、城镇化和国际化深入发展，人口、资源、环境压力日益加大，调整经济结构、转变发展方式的要求更加迫切。国际金融危机进一步凸显了提高国民素质、培养创新人才的重要性和紧迫性。我国未来发展关键靠人才，根本在教育。

高等教育承担着培养高级专门人才、发展科学技术与文化、促进现代化建设的重大任务。近年来，我国的高等教育获得了前所未有的发展，大学数量从 1950 年的 220 余所已上升到 2008 年的 2200 余所。但目前高等教育与社会经济发展不相适应的问题越来越凸显，诸如学生适应社会以及就业和创业能力不强，创新型、实用型、复合型人才紧缺等。2010 年 7 月发布的《国家中长期教育改革和发展规划纲要（2010—2020 年）》提出了高等教育要“建立动态调整机制，不断优化高等教育结构，重点扩大应用型、复合型、技能型人才培养规模”的要求。因此，新一轮高等教育类型结构调整成为必然，许多高校特别是地方本科院校面临转型、准确定位的问题。这些高校立足于自身发展和社会需要，选择了应用型发展道路。应用型本科教育虽早已存在，但近几年才开始大力发展，并根据社会对人才的需求，补充了新的教育理念，现已成为我国高等教育的一支重要力量。发展应用型本科教育，也已成为中国高等教育改革与发展的重要方向。

应用型本科教育既不同于传统的研究型本科教育，又区别于高职高专教育。研究型本科培养的人才将承担国家基础型、原创型和前瞻型的科学研究，它应培养理论型、学术型和创新型的研究人才。高职高专教育培养的是面向具体行业岗位的高素质、技能型人才，通俗地说，就是高级技术“蓝领”。而应用型本科培养的是面向生产第一线的本科层次的应用型人才。由于长期受“精英”教育理念的支配，脱离实际、盲目攀比，高等教育普遍存在重视理论型和学术型人才培养的偏向，忽视或轻视应用型、实践型人才的培养。在教学内容和教学方法上过多地强调理论教育、学术教育而忽视实践能力的培养，造成我国“学术型”人才相对过剩，而应用型人才严重不足的被动局面。

应用型本科教育不是低层次的高等教育，而是高等教育大众化阶段的一种新型教育层次。计算机应用型本科的培养目标是：面向现代社会，培养掌握计算机学科领域的软硬件专业知识和专业技术，在生产、建设、管理、生活服务等第一线岗位，直接从事计算机应用系统的分析、设计、开发和维护等实际工作，维持生产、生活正常运转的应用型本科人才。计算机应用型本科人才有较强的技术思维能力和技术应用能力，是现代计算机软、硬件技术的应用者、实施者、实现者和组织者。应用型本科教育强调理论知识和实践知识并重，相应地其教材更强调“用、新、精、适”。所谓“用”，是指教材的“可用型”、“实用型”和“易用型”，即教材内容要反映本学科基本原理、思想、技术和方法在相关现实领域的典型应用，介绍应用的具体环境、条件、方法和效果，培养学生根据现实问题选择合适的科学思想、概念、理论、技术和方法去分析、解决实际问题的能力。所谓“新”，是指教材内容应及时反映本学科的最新发展和最新技术成就，以及这些新知识和新成就在行业、生产、管理、服务等方面的最新应用，从而有效地保证学生

“学以致用”。所谓“精”，不是一般意义的“少而精”。事实常常告诉我们“少”与“精”是有矛盾的，数量的减少并不能直接导致质量的提高。而且，“精”又是对“宽与厚”的直接“背叛”。因此，教材要做到“精”，教材的编写者对教材的内容，要在“用”和“新”的基础上再进行去伪存真的精练工作，精选学生终身受益的基础知识和基本技能，力求把含金量最高的知识传承给学生。“精”是最难掌握的原则，是对编写者能力和智慧的考验。所谓“适”，是指各部分内容的知识深度、难度和知识量要适合应用型本科的教育层次、适合培养目标的既定方向、适合应用型本科学生的理解程度和接受能力。教材文字叙述应贯彻启发式、深入浅出、理论联系实际、适合教学实践，使学生能够形成对专业知识的整体认识。以上四个方面不是孤立的，而是相互依存的，并具有某种优先顺序。“用”是教材建设的唯一目的和出发点，“用”是“新”、“精”、“适”的最后归宿。“精”是“用”和“新”的进一步升华。“适”是教材与计算机应用型本科培养目标符合度的检验，是教材与计算机应用型本科人才培养规格适应度的检验。

中国铁道出版社同高等学校计算机类课程应用型人才培养规划教材编审委员会经过近两年的前期调研，专门为应用型本科计算机专业学生策划出版了理论深入、内容充实、材料新颖、范围较广、叙述简洁、条理清晰的系列教材。本系列教材在以往教材的基础上大胆创新，在内容编排上努力将理论与实践相结合，尽可能反映计算机专业的最新发展；在内容表达上力求由浅入深、通俗易懂；编写的内容主要包括计算机专业基础课和计算机专业课；在内容和形式体例上力求科学、合理、严密和完整，具有较强的系统性和实用性。

本系列教材是针对应用型本科层次的计算机专业编写的，是作者在教学层次上采纳了众多教学理论和实践的经验及总结，不但适合计算机等专业本科生使用，也可供从事 IT 行业或有关科学研究工作的人员参考，适合对该新领域感兴趣的读者阅读。

在本系列教材出版过程中，得到了计算机界很多院士和专家的支持和指导，中国铁道出版社多位编辑为本系列教材的出版做出了很大贡献，本系列教材的完成不但依靠了全体作者的共同努力，同时也参考了许多中外有关研究者的文献和著作，在此一并致谢。

应用型本科是一个日新月异的领域，许多问题尚在发展和探讨之中，观点的不同、体系的差异在所难免，本系列教材如有不当之处，恳请专家及读者批评指正。

“高等学校计算机类课程应用型人才培养规划教材”编审委员会

2011 年 1 月

前　言

FOREWORD

物理、化学等诸多学科处理的对象都是连续量，它们的发展离不开微积分；与连续量相对应的是离散量，现代数字电子计算机的软硬件结构决定了它更适于离散量的处理，连续量也是通过数字化为离散量来进行处理的。以离散量的结构及其相互关系为研究对象的离散数学，就是计算机学科的“微积分”，它是计算机科学与技术及相关专业的核心课程。

离散数学所涉及的概念、方法和理论，大量地应用在计算机科学与技术专业的数字电路、编译原理、数据结构、算法分析与设计、操作系统、数据库系统、人工智能、多媒体技术、计算机网络等专业课程以及数字信号处理、图形图像处理、编码和信息安全等相关课程中。因此，作为计算机数学基础的离散数学，课程的主旨是训练学生的概括抽象能力、逻辑思维能力和归纳构造能力，培养学生严谨、完整、规范的科学态度，这对于无论是今后从事计算机软硬件开发还是技术管理工作的学生，都是不可缺少的。

随着计算机科学技术的飞速发展及其在生产生活各个方面的广泛应用，离散数学所包括的领域也由经典的数理逻辑、集合论、代数系统和图论等内容，扩展到包括组合数学、数论、有限自动机、计算几何等多个领域。同时，由于我国的高等教育已正式步入大众化阶段，应用型本科院校的任务定位是培养面向生产第一线的本科层次的应用型人才，以培养分析问题、解决问题能力为出发点，强调“学以致用”。本书正是参照教育部高等学校计算机科学与技术教学指导委员会制定的《**高等学校计算机科学与技术专业发展战略研究报告暨专业规范（试行）**》中对离散结构知识体系的要求，并结合应用型大学计算机科学与技术专业本科学生的特点而编写的。本书涵盖了经典的离散数学课程的主要内容，包括集合论、图论、数理逻辑、组合数学、代数系统等五篇共 9 章，确保读者能够获得应有的离散数学知识和解决问题的能力。

本书具有以下特色：

- 注重应用，理论知识与后继课程中相关应用的介绍结合紧密，使学生充分领略离散数学的重要作用；
- 内容讲述力求严谨，推演和求解务求详尽，注重培养学生的数学思维能力和分析、解决问题的能力；
- 取材和组织注重传统与新颖的结合，基础理论的介绍突出重点，以“够用”为限，淡化繁琐、特殊的证明技巧；
- 通过丰富多样的典型例题分析，使学生对所学知识的掌握更加系统化和条理化，更易于对所学知识融会贯通和举一反三；
- 注重巩固学生所学知识，培养学生的实践能力，书中每一章都安排了一定量的习题。

本书不仅为计算机专业的学生学习专业后继课程打下扎实的理论基础，也为他们未来的专业发展提供必要的理论储备。

本书适合作为计算机和相关专业本科生“离散数学”的教学用书，也可作为对离散数学感兴趣的学生的参考书。

选用本书可根据不同需要，考虑删选带“*”标记的小节或知识点及相应习题。全书包含了大约可在 80 学时内讲授的内容；如果删除标记“*”的内容，可以在 60 学时内完成教学计划。

本书由上海工程技术大学计算机系的张辉担任主编，负责第一、二、三篇的编写及全书的统稿，上海工程技术大学计算机系的张瑜和孙宪坤分别编写了本书的第四篇和第五篇。

南京大学徐洁磐教授不辞辛劳审阅了本书，对本书的编写给予了极大的支持和帮助，提出了许多宝贵的意见和建议，编者在此表示衷心的感谢。同时，感谢上海海事大学周广声教授的精心组织，感谢上海工程技术大学电子电气工程学院领导和计算机系老师们的大力支持和协助。

由于编者水平有限，书中不妥之处在所难免，望广大读者不吝赐教。

编　者

2011 年 2 月

CONTENTS

目 录

第一篇 集 合 论

第 1 章 集合 2
1.1 集合的概念与表示 2
1.1.1 集合及其表示 3
1.1.2 子集与幂集 5
1.2 集合的运算 8
1.2.1 集合的交、并、补、差 8
1.2.2 集合运算的性质 10
*1.3 容斥原理 12
本章小结 15
习题一 15
第 2 章 关系 18
2.1 关系的概念与表示 19
2.1.1 笛卡儿积 19
2.1.2 关系的概念 21
2.1.3 关系的表示 23
2.2 关系的基本性质 24
2.2.1 自反 24
2.2.2 对称 26
2.2.3 传递 27
2.3 关系的运算 30
2.3.1 关系的交、并、补、差 30
2.3.2 关系的复合 30
2.3.3 关系的逆 32
2.3.4 关系的闭包 33
2.4 等价关系与序关系 36
2.4.1 等价关系与划分 36
2.4.2 序关系 39
本章小结 43
习题二 44
第 3 章 函数 47
3.1 函数的概念与分类 48
3.1.1 函数的概念 48
3.1.2 函数的分类 50
3.2 函数的运算 54

3.2.1 函数的复合......54
3.2.2 函数的逆......56
*3.3 计算机科学中常用的两类函数......57
3.3.1 取整函数......57
3.3.2 哈希函数......58
*3.4 基数......59
3.4.1 基数的概念......59
3.4.2 可数集与不可数集......61
本章小结......63
习题三......64

第二篇 图 论

第4章 图......68
4.1 图的概念与表示......69
4.1.1 图的基本概念......69
4.1.2 图的矩阵表示......76
4.2 路径与连通性......78
4.2.1 路径与回路......78
4.2.2 图的连通性......80
4.3 欧拉图与汉密尔顿图......83
4.3.1 欧拉图......84
4.3.2 汉密尔顿图......86
*4.4 图的应用......89
4.4.1 最短路径问题......89
4.4.2 支配集与通信系统建站问题......90
本章小结......91
习题四......91
第5章 树......95
5.1 树与图的生成树......95
5.1.1 树的概念与性质......96
5.1.2 图的生成树......98
5.2 根树......101
5.2.1 根树的基本概念......101
5.2.2 二叉树......102
5.2.3 二叉树的遍历......104
*5.3 树的应用......105
5.3.1 决策树......105
5.3.2 二叉搜索树......106
5.3.3 最优二叉树与哈夫曼编码......107
本章小结......109
习题五......109

第三篇 数 理 逻 辑

第 6 章 命题逻辑 114
6.1 命题与命题公式 115
6.1.1 命题的概念与表示 115
6.1.2 命题联结词 116
6.1.3 命题公式 119
6.2 命题公式的真值赋值与分类 120
6.2.1 真值表 120
6.2.2 重言式、矛盾式与可满足式 122
6.2.3 逻辑等价与逻辑蕴涵 123
6.3 范式 128
6.3.1 合取范式与析取范式 128
6.3.2 主析取范式与主合取范式 129
*6.3.3 联结词的完备集 132
6.4 命题逻辑的推理理论 133
6.4.1 推理的形式结构 134
6.4.2 推理规则 135
本章小结 137
习题六 138
第 7 章 谓词逻辑 140
7.1 谓词与谓词公式 141
7.1.1 个体、谓词与量词 141
7.1.2 项与谓词公式 143
7.1.3 变元的约束 145
7.2 谓词逻辑的语义 147
7.2.1 真值与解释 147
7.2.2 永真式、矛盾式与可满足式 148
7.2.3 逻辑等价与逻辑蕴涵 149
*7.3 前束范式 152
7.4 谓词逻辑的推理理论 152
本章小结 156
习题七 156

第四篇 组 合 数 学

第 8 章 组合数学 160
8.1 基本计数原理 161
8.1.1 加法原理 161
8.1.2 乘法原理 161
8.2 排列与组合 163

8.2.1 排列 163
8.2.2 组合 164
*8.2.3 广义的排列与组合 166
8.3 二项式系数与组合恒等式 168
8.3.1 二项式系数 168
8.3.2 组合恒等式 169
*8.4 鸽笼原理 171
8.4.1 鸽笼原理的简单形式 171
8.4.2 鸽笼原理的一般形式 173
*8.5 递归关系及其解法 174
8.5.1 递归关系的定义 174
8.5.2 逆向代换法 177
8.5.3 常系数齐次线性递归关系 177
8.5.4 常系数非齐次线性递归关系 179
本章小结 180
习题八 180

第五篇 代数系统

第9章 代数系统 184
9.1 代数系统的概念及运算性质 185
9.1.1 代数系统的概念 185
9.1.2 二元运算的性质 187
9.2 代数系统的同态与同构 190
9.2.1 同态与同构 190
9.2.2 同态的性质 191
9.3 群 193
9.3.1 半群与独异点 193
9.3.2 群及其基本性质 194
9.3.3 子群与陪集 195
9.3.4 循环群与置换群 200
9.4 环与域 203
9.4.1 环与域的概念 203
*9.4.2 环与域的性质 204
9.5 格与布尔代数 205
9.5.1 格的概念与性质 205
9.5.2 分配格、有补格 206
9.5.3 布尔代数 208
本章小结 210
习题九 210
附录A 213
参考文献 221

第一篇

集合论

研究集合的数学理论在现代数学中称为集合论，其创始人是德国数学家康托（Georg Cantor），他从 1874 年到 1897 年发表了一系列关于集合论研究的论文，提出了基数、序数和良序集等理论，奠定了集合论的深厚基础。20 世纪初，由集合论漏洞导致的悖论使绝对严密的数学陷入了自相矛盾之中。1908 年，德国数学家策梅洛（Ernst Zermelo）提出公理化集合论，使原本直观的集合概念建立在严格的公理基础之上，从而避免了悖论的出现。相应的，康托创立的集合论被称为朴素集合论。

从康托提出集合论至今，数学发生了极其巨大的变化，集合论已成为现代数学大多数分支的基础，并且已经渗透到自然科学和人文科学的众多领域。在计算机科学领域，计算机处理的数值、文字、符号、图形、图表、图像和声音等各类信息，构成了各种数据类型的集合。不仅如此，集合论还在数据结构、编译原理、形式语言、数据库和知识库、人工智能等领域得到了广泛的应用。因此，集合论也是计算机科学的重要理论基础。

本篇对公理化集合论不作探讨，主要介绍集合、关系、函数的基本概念、表示方法、运算、性质等集合论基础知识。

第1章 集　　合

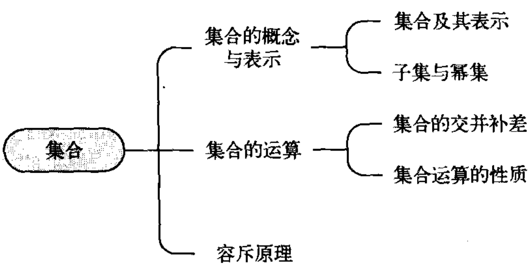
本章导读

本章主要介绍集合的基本概念及其表示，集合与其元素、集合与集合之间的关系，集合的各种运算及其性质，以及有限集的容斥原理。

本章内容要点：

- 集合的相关概念与表示；
- 集合的运算与性质；
- 容斥原理。

内容结构



学习目标

本章内容是本篇后续各章的基础，尤其是集合的概念与运算，通过学习学生应该能够：

- 对集合相关概念及表示方法、集合与元素、集合与集合的各种关系有深入的理解；
- 熟练掌握集合的基本运算及性质，能根据定义证明一些基本性质，对导出运算有清楚的认识；
- 了解有限集上的容斥原理。

1.1　集合的概念与表示

集合和元素是集合论最基本的概念，它们及其相关概念满足集合论的一些最基本的原理和性质。

1.1.1 集合及其表示

日常生活中，我们经常接触到各式各样的集合，例如，学校全体学生构成了一个集合，图书馆的所有藏书构成了一个集合，计算机专业的核心课程构成了一个集合，所有自然数构成了一个集合，所有素数也构成了一个集合等，这类例子不胜枚举。

集合，是集合论中最基本的概念，但如同几何中的点、线、面等概念，集合也是一个无法精确定义的原始概念，但它是容易理解和掌握的。直观地说，若干确定的、可区别的（不论是具体的或抽象的）事物合并起来构成的一个整体，就称为一个集合，其中各事物称为该集合的元素，即集合由元素所组成。

习惯上，用大写字母 A、B、X、Y、…标记集合，用小写字母 a、b、x、y、…标记集合的元素。因为某个集合的一个元素有可能是另一个集合，所以这种约定不是绝对的。若 a 是集合 A 的元素，我们也说 a 属于集合 A，记作 $a\in A$；若 a 不是 A 的元素，我们也说 a 不属于 A，记作 $a\notin A$。

如果一个集合中元素的个数是有限的，这样的集合称为有限集。如果一个集合不是有限集，则称为无限集。

对于有限集 X，我们通常以 $|X|$ 表示 X 中元素的个数。

习惯上，我们用下列字母标记一些常用的无限集：

N：自然数集。

Z：整数集。

Q：有理数集。

R：实数集。

此外，我们用 Z_+ 标记正整数集，Z_- 标记负整数集，R_+ 标记正实数集，R_- 标记负实数集。

表示集合有两种方法，即，枚举法和描述法。

1. 枚举法

枚举法是指，将集合中的所有元素按照某种方式一一列举出来，这类方法适用于有限集或具有某种规律的无限集。通常，将集合的所有元素置于一对花括号{、}之间，各元素之间以逗号分隔。

【例 1.1】 地球上的所有大洲构成了一个集合，如果称这个集合为 A，则 A = {亚洲，欧洲，非洲，北美洲，南美洲，大洋洲，南极洲}，$|A| = 7$。

【例 1.2】 所有小于 10 的素数构成了一个集合，如果称这个集合为 B，则 $B = \{2，3，5，7\}$，$|B| =4$。

【例 1.3】 方程 $x^4-17x^3+101x^2-247x+210=0$ 的所有实数解也构成了一个集合，如果我们称这个集合为 C，通过求解方程，即可以得出方程的解为 2、3、5、7，即 $C = \{2，3，5，7\}$，$|C| = 4$。

【例 1.4】 自然数集 $N = \{0，1，2，3，\cdots\}$，由于 N 是个无限集，省略号省去了无穷多个元素，我们很清楚，它们是 4、5、6、7 等。

在【例 1.1】、【例 1.2】和【例 1.3】中的集合都是有限集，并且集合中的元素不多，使用枚举法很方便。对于无限集或者包含较多元素的集合，如【例 1.4】中自然数集 N，用枚举法列举其中元素时，可以使用省略号，但是省略的元素应该可以由已列出的元素合理推出。例如，集合 $\{1，2，3，\cdots，100\}$。

显然，枚举法是一种最直观的表示集合的方法。但是存在大量的集合，用枚举法表示并不方便或者根本无法表示，例如，前面介绍的无限集 Z、Q 和 R 等。

2．描述法

由【例 1.1】、【例 1.2】和【例 1.3】的陈述，可看到集合的另一种表示方法，即通过文字或公式刻画集合中元素的性质来描述集合，这就是描述法，它采用

$$\{x \mid x\text{具有的性质}\}$$

的形式，表示该集合由所有满足该性质的元素 x 组成。这种表示法更加通用，尤其是在枚举法表示难以实现的时候。

采用描述法，【例 1.1】中的集合 $A = \{x \mid x$ 是地球上的一个大洲$\}$，【例 1.2】中的集合 $B = \{x \mid x$ 是小于 10 的素数$\}$，【例 1.3】中的集合 $C = \{x \mid x$ 是方程 $x^4-17x^3+101x^2-247x+210=0$ 的实数解$\}$，【例 1.4】中的自然数集 N = $\{x \mid x$ 是一个自然数$\}$。

【例 1.5】 名著《西游记》中出现的所有汉字构成了一个集合，如果我们称这个集合为 T，虽然集合 T 也可以采用枚举法表示，但显然采用描述法表示更方便，$T = \{x \mid x$ 是《西游记》中出现的汉字$\}$。

集合也可以用文氏图这一辅助手段形象化地表示出来，这是英国数学家 John Venn 于 1881 年介绍的表示方式。在文氏图中，以矩形、圆、椭圆或其他几何形状来表示集合，其中的点表示集合中的元素，有时不明确说明集合的元素时，点也可以不显示。用文氏图表示【例 1.1】中的集合 A，如图 1-1 所示。

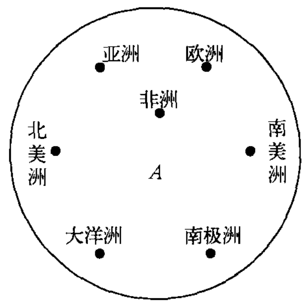


图 1-1 【例 1.1】的文氏图

文氏图不仅可以表示集合，后面我们还将看到，它还可以表示集合之间的关系。

文氏图以图解的方式表示集合及集合与集合间的关系，非常直观，并且易于理解。但需要注意的是，它只是帮助我们形象地理解集合与元素、集合与集合间的关系，一般不作为一种证明方法。因此只能用于说明，不能用于证明。

由【例 1.2】、【例 1.3】我们还发现，【例 1.2】中的集合 B 与【例 1.3】集合 C 包含相同的元素，我们称它们是相等的，或者说它们是同一个集合。这是由集合的外延性原理定义的。

外延性原理 两个集合相等，当且仅当它们包含相同的元素。

由外延性原理，两个集合 X 与 Y 相等，记作 $X=Y$，意味着对任意元素 a，$a\in X$ 当且仅当 $a\in Y$；否则，这两个集合不等，记作 $X\neq Y$，这意味着存在 X 中的某个元素 a，$a\notin Y$，或者，存在 Y 中的某个元素 b，$b\notin X$。

【例 1.6】 集合{2，3，{5，7}}包含三个元素 2、3 和{5，7}，其中元素{5，7}本身也是一个集合，集合{5，7}与其包含的元素 5、7 并不相同，因此，虽然集合{2，3，5，7}与集合{2，3，{5，7}}有相同的元素 2 和 3，但是也有不同的元素，因此由外延性原理，两者并不相等。

【例 1.7】 集合{2，2，3，5，7}与【例 1.2】中的集合 B、【例 1.3】中的集合 C 都包含相同的元素 2、3、5、7，虽然元素 2 在集合{2，2，3，5，7}中出现了两次，但是同一元素不能加以区分，即使列举多次，表示的集合并没有改变。因此，由外延性原理，集合{2，2，3，5，7}和集合 B、C 都相等。

【例 1.8】 集合$\{7, 5, 3, 2\}$与集合$\{5, 3, 7, 2\}$也都和【例 1.2】中的集合 B、【例 1.3】中的集合 C 包含相同的元素，因而由外延性原理，它们都相等，虽然它们列举元素的顺序不同。

集合的元素之间可以有某种关联，如【例 1.2】集合 B 中的元素同为小于 10 的素数，【例 1.5】集合 T 中的元素同在《西游记》中出现；也可以彼此毫无关系，如，{桌子，老虎，2，3}也构成了一个集合。不过，集合通常是由一些具有共同目标的事物构成的整体。

由集合的概念和外延性原理，可以得出集合概念的一些基本性质：

（1）集合与元素的相异性

集合与组成该集合的各个元素必定是不同的，虽然一个集合可以作为另外一个集合的元素，但是任何集合不能是其自身的元素。

如【例 1.6】中，集合$\{2, 3, \{5, 7\}\}$包含集合$\{5, 7\}$作为元素，但是集合$\{5, 7\}$不同于其元素 5、7，也不会有 $A=\{A\}$。

（2）集合元素的相异性

集合中的元素应该是彼此不同、可以相互区分的，因而将集合中重复出现的元素删减至一个并不改变集合。

如【例 1.7】中，$\{2, 2, 3, 5, 7\}=\{2, 3, 5, 7\}$。

（3）集合元素的无序性

组成集合中的各个元素没有先后顺序，因而集合的相等与其元素的列举顺序无关。

如【例 1.8】中，$\{7, 5, 3, 2\}=\{5, 3, 7, 2\}=\{2, 3, 5, 7\}$。

（4）集合元素的确定性

任意事物是否属于某集合，回答是确定的，它或者是该集合的元素，或者不是该集合的元素，两者必居其一，不能模棱两可。

如【例 1.6】中，$\{5, 7\}\in\{2, 3, \{5, 7\}\}$，但 $5\notin\{2, 3, \{5, 7\}\}$。

又如，对任一实数 x，或者 x 是有理数，即 $x\in Q$，或者 x 不是有理数，即，$x\notin Q$；而不可能有 x，x 既是有理数又不是有理数。

【例 1.9】 理发师悖论。

在某城市中有一位理发师，他宣称，他为该城所有不给自己刮脸的人刮脸，并且也只给这些人刮脸。来找他刮脸的人自然都是那些不给自己刮脸的人，但是有一天，这位理发师从镜子里看见自己的胡子长了，那么他能不能给他自己刮脸呢？

设 $A=\{x \mid x$ 是不给自己刮脸的人$\}$，a 是这位理发师，则该问题的集合论表示为“$a\in A$?”由集合元素的确定性，该问题的回答只能有两种可能的结果：

（1）$a\in A$，则 a 是不给自己刮脸的人。按照他的宣称，a 就要给自己刮脸，因而 $a\notin A$；

（2）$a\notin A$，则 a 是给自己刮脸的人。按照他的宣称，a 就不能给自己刮脸，因而 $a\in A$。

由上我们可以看到，无论哪种情形，都有 $a\in A$ 和 $a\notin A$ 这两个互相矛盾的结果同时成立。这就是悖论。

上述理发师悖论是 1903 年英国数学家罗素提出来的。理发师悖论及后来发现的一些悖论动摇了集合论乃至数学的基础，导致了第三次数学危机。1908 年，德国数学家策梅洛提出的公理化集合论，成功排除了集合论中出现的悖论，从而比较圆满地解决了第三次数学危机。

1.1.2 子集与幂集

在【例 1.2】中，集合 B 中的元素 2、3、5、7 每个都是自然数集 $\mathbf{N}$ 的元素，我们说，集合 B 是集合 $\mathbf{N}$ 的子集，具体定义如下：

定义 1.1 设 X 和 Y 是两个集合，如果对任意 $x \in X$，均有 $x \in Y$，则称 X 是 Y 的子集，记作 $X \subseteq Y$ 或 $Y \supseteq X$。

集合 X 是集合 Y 的子集，可用文氏图表示，如图 1-2 所示。

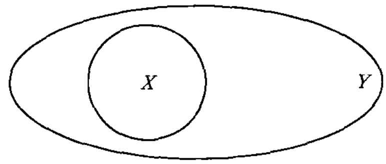


图 1-2 $X \subseteq Y$ 的文氏图表示

【例 1.10】 如果集合 $A=\{2, 3, 5, 7\}$，集合 $B=\{2, 3\}$，集合 $C=\{3, 5, 7\}$，则 $B \subseteq A$，$C \subseteq A$，但 C 不是 B 的子集，B 也不是 C 的子集。

【例 1.11】 如果集合 $A=\{x \mid x$ 是小于 10 的自然数$\}$，集合 $B=\{2, 3, 5, 7\}$，则 $B \subseteq A$，并且 $A \subseteq \mathbf{N}$，$B \subseteq \mathbf{N}$。

【例 1.12】 对无限集 N、Z、Q、R，显然有，$\mathbf{N} \subseteq \mathbf{Z}$，$\mathbf{Z} \subseteq \mathbf{Q}$，$\mathbf{Q} \subseteq \mathbf{R}$，而且，我们还可以得出 $\mathbf{N} \subseteq \mathbf{Q}$，$\mathbf{N} \subseteq \mathbf{R}$，$\mathbf{Z} \subseteq \mathbf{R}$。

由子集定义，我们可以得出下列性质：

(1) 对任意集合 X 和 Y，如果 $X \subseteq Y$ 并且 $Y \supseteq X$，则 $X=Y$。

该性质其实是外延性原理另一种形式的表述，【例 1.2】、【例 1.3】也说明了这一点，我们可用此性质证明两集合相等。

(2) 任意集合 X 是它自身的子集，即，$X \subseteq X$。

该性质描述的是集合 X 的一个平凡事实，前面我们列举的所有例子都可以说明这一事实。因此，我们也说，集合 X 是它自身的一个平凡子集。

(3) 对任意集合 X、Y 和 Z，如果 $X \subseteq Y$ 并且 $Y \subseteq Z$，则 $X \subseteq Z$。

该性质反映了"$\subseteq$"的传递性，如【例 1.11】中，$B \subseteq A$，$A \subseteq \mathbf{N}$，就有 $B \subseteq \mathbf{N}$，【例 1.12】则更好地说明了该性质。

定义 1.2 如果集合 X 和 Y 满足 $X \subseteq Y$，但 $X \neq Y$，则称 X 是 Y 的真子集，记作 $X \subset Y$。

【例 1.10】与【例 1.11】中的"$\subseteq$"改为"$\subset$"同样成立。

同理，【例 1.12】无限集 N、Z、Q 和 R 之间的"$\subseteq$"改为"$\subset$"也成立，即，$\mathbf{N} \subset \mathbf{Z} \subset \mathbf{Q} \subset \mathbf{R}$。

由真子集定义，我们可以得出下列性质：

(1) 如果 $X \subset Y$，那么必有 $X \subseteq Y$。

这是由真子集定义直接得出的，但是由 $X \subseteq Y$ 并不一定有 $X \subset Y$，因为有可能 $X=Y$。

(2) 如果 $X \subset Y$，那么一定没有 $Y \subset X$。

因为由真子集定义，$X \subset Y$ 意味着 $X \neq Y$，即，Y 中至少存在一个元素 y，$y \notin X$，因此，Y 不可能是 X 的真子集。

同理，X 也不可能是自身的真子集，因为 X 中没有不属于 X 的元素，即，关于子集的性质 (2) 对于真子集不成立。

(3) 对任意集合 X、Y 和 Z，如果 $X \subset Y$ 并且 $Y \subset Z$，则 $X \subset Z$。即，"$\subset$"也具有传递性。

【例 1.11】、【例 1.12】也同样说明了"$\subset$"的该性质。

在集合中有一个经常用到的特殊集合，它不包含任何元素，这个集合称为空集，记作 $\varnothing$。显然，$|\varnothing|=0$。

【例 1.13】 在实数集 R 中，方程 $x^2+1=0$ 无解，因此它的解集为空集。

【例 1.14】 在自然数集 N 中，$x^2=2$ 无解，因此它的解集是空集。

【例 1.15】 直角坐标系中，由抛物线 $y=x^2$ 与直线 $y=x-1$ 所包围的封闭区域中的点所构成的集合是空集。