北京工业大学研究生创新教育系列教材

# 弹性与塑性理论基础

秦飞 吴斌 编著

科学出版社

# 内 容 简 介

本书分为预备知识、弹性理论基础和塑性理论基础三部分。预备知识主要讲解指标符号与张量分析基础；弹性理论基础部分包括应力理论、应变理论、弹性应力-应变关系、弹性力学问题的微分提法与解法、平面问题、能量原理和微分方程近似计算的基本原理；塑性理论基础部分包括塑性力学基本概念、屈服准则与硬化法则、弹塑性应力-应变关系和简单弹塑性问题。每章均有例题、复习思考题和习题，在弹性理论基础和塑性理论基础两部分的最后，还安排了计算机作业。

本书重视基本概念与基础理论，力学概念清晰，论述严谨；内容取舍适当，以期满足当前学术界和工程界对力学工作者最基本的理论素养需求。

本书可作为高等学校力学专业高年级本科生、研究生教材，以及机械工程、土木工程等专业弹塑性力学课程的教材，同时也可作为高等学校、研究机构等从事力学问题研究和力学分析的研究人员和工程技术人员的参考书。

**图书在版编目(CIP)数据**

弹性与塑性理论基础/秦飞，吴斌编著. —北京：科学出版社，2011
(北京工业大学研究生创新教育系列教材)
ISBN 978-7-03-032203-6

Ⅰ. ①弹… Ⅱ. ①秦…②吴… Ⅲ. ①弹性理论-研究生-教材②塑性理论-研究生-教材 Ⅳ. ①O34

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2011)第 175324 号

责任编辑：匡 敏 朱晓颖 于 红 / 责任校对：刘亚琦
责任印制：张克忠 / 封面设计：迷底书装

科学出版社 出版
北京东黄城根北街 16 号
邮政编码：100717
http://www.sciencep.com

源海印刷有限责任公司 印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

*

2011 年 8 月第 一 版 开本：787×1092 1/16
2011 年 8 月第一次印刷 印张：16 1/4
印数：1—3 000 字数：400 000

**定价：36.00 元**

(如有印装质量问题，我社负责调换)

# 前　言

作者从2001年开始为力学和机械工程等专业的研究生和高年级本科生讲授弹性理论和塑性理论课程。本书是作者根据近十年教学过程中学生的反馈以及工程技术界对力学相关专业学生的知识结构需求，经过不断修订形成的。

力学作为工程科学的先导和基础，可以为新的工程领域提供概念和理论，为越来越复杂的工程设计与分析提供有效的方法。在多年的力学教学和科研过程中，作者深深体会到经典弹性理论和塑性理论在培养学生的力学素养、培养学生针对实际工程问题的力学建模与分析能力，以及奠定学生从事力学研究所必备的理论基础等方面，均具有不可替代的作用。

经典的弹性和塑性理论体系严密、内容丰富，要在有限的学时内全面讲授十分困难。因此，必须对讲授的内容进行取舍。本书在内容取舍上主要考虑以下因素。

(1)基础性：本书编写的目标定位在固体力学入门性教材，因此应该包含一些最基本的内容。第一篇中的第1章“应力理论”、第2章“应变理论”和第3章“弹性应力-应变关系”属于弹性理论部分的基础内容，是教学的重点。第二篇中的第8章“塑性力学基本概念”、第9章“屈服准则与硬化法则”和第10章“弹塑性应力-应变关系”则是塑性理论部分的基础内容。

(2)前沿性：指标符号与张量分析基础知识已成为从事力学研究不可或缺的工具，其重要性日益显现。为此，本书专门增加张量分析的基础内容，并安排在全书的最前面作为学习本书的预备知识。本书绝大部分章节也采用指标符号和张量表述。

(3)针对性：有限元分析方法在各专业领域的应用越来越广泛，已成为工程设计和工程问题分析的最主要工具之一。掌握好这一强有力的工具，对于从事工程设计与分析的技术人员和力学工作者来说十分重要。而要真正掌握有限元分析技术，做到正确建立工程问题的力学模型和有限元模型，并能对计算结果进行分析、甄别，不但需要掌握弹性和塑性理论基础，还需要了解数值计算的基本原理。本书第6章“能量原理”和第7章“微分方程近似计算的基本原理”就是专门为这个目标安排的。

本书是作为教材编写的，因此在每章都安排了若干典型例题，并配有复习思考题和习题。在附录部分给出了常用力学名词的中英文对照表，以方便读者查阅。本书共分两篇，每篇自成体系，可根据需要分开讲授。书中带*号的章节为教师选讲内容。考虑到材料力学为学习本书的先导课程，因此，本书省略了连续性假设、小变形假设等属于绪论部分的内容。

本书可作为力学、机械工程、土木工程等专业高年级本科生和研究生的教材，也可作为从事工程问题力学分析的科技工作者的参考书。

在本书编写过程中，得到了许多人的鼓励和支持，在此作者对他们表示衷心的感谢。特别要感谢使用过本书讲义的同学们，他们在使用过程中提出了宝贵的修改意见和建议，使得本书能以更高的质量与读者见面。

本书得到了北京工业大学研究生院研究生课程建设基金的资助。

由于作者水平有限，书中难免存在疏漏和不足之处，希望读者批评指正。

作　者

2011年5月

# 目　录

## 第二篇 塑性理论基础

# 第0章　预备知识——指标符号与张量分析基础

## 0.1 引　　言

在力学、几何学和物理学中，有各种各样的量。例如，温度是标量，速度、加速度以及力是矢量。和标量相比，矢量不仅要表示出量的大小，而且要表示出方向。另外，还有一些更复杂的量，仅仅给出大小和方向不足以完全确定这个量。例如，材料力学中我们用应力描述一点的应力状态时，不仅要指明该应力是在过该点的哪一个截面上，而且要指明是在该截面的法向或是切向。表征一点应力状态和应变状态时分别用应力张量和应变张量，在曲面几何中表征曲面几何性质时用曲率张量等。张量比矢量更为复杂。

一个量是不是张量，要用一定的规则来判定。判定的方法本章后面会讲到。

张量的提出最早可以追溯到高斯(Gauss F.)、黎曼(Riemann G. F. B.)和克里斯托费尔(Christoffel E. B.)在绝对微分几何学方面的研究工作。1892年意大利数学家里奇(Ricci G.)发表了一篇系统阐述绝对微分方法和紧凑表示方法的报告。1901年里奇和他的学生，另一位意大利数学家莱维-齐维塔(Levi-Civita T.)对张量的运算方法给出了进一步阐述。1916年，爱因斯坦(Einstein A.)将它命名为“张量分析”。在此之前，张量分析看起来相当烦琐，很少得到应用。1915年爱因斯坦发表了广义相对论，从数学工具角度看，里奇的张量算法起了基本作用。爱因斯坦从1908年发表狭义相对论到1915年发表广义相对论经历了七年的时间，在谈到这个问题时他写到：“为什么还需要七年才能建立广义相对论呢？主要的原因在于不那么容易从坐标必须有一个直接的尺度这一概念中解脱出来。”可见，正是张量分析这一有力工具极好地描述了这一新的思路。从那时起，人们对张量研究重新产生兴趣，从而促进了张量分析的进一步发展。此后，张量分析对理论物理的发展起了重要作用。

张量的英文名称为tensor，首先由物理学家沃伊特(Voigt W.)给出。这个名字表明它来源于弹性力学。但是在很长一段时间内，张量在弹性力学中却用得很少，多数情况下只是出现一下张量这个名词。在1960年左右，一方面张量分析学科本身发生了明显变化，另一方面力学学科的发展需要张量分析这个有效的工具。目前，物理学、力学的书籍文献中大量使用张量分析和指标符号表示法。正如美国普林斯顿大学爱林根(Eringen A. C.)教授所指出的：“今日，如果你对张量分析没有一定程度的通晓，你就不能攻读大部分文献。”张量分析这门数学工具对力学工作者是不可或缺的。

张量的应用在某种程度上是为了把方程写得简洁、紧凑，但绝不仅仅如此。自然规律在本质上是不依赖于坐标系的，或者说应该存在着在各种坐标系都成立的描述物理规律的基本方程式，而张量形式写出的方程正好有不依赖于某一特定坐标系的特点。这种不依赖于坐标系的方程式非常有利于人们对物理本质的把握。

本章从指标符号表示法开始，主要介绍张量分析的最基本内容，包括张量代数、张量的微分和积分、正交曲线坐标系和张量场论等内容。

## 0.2 指标符号与求和约定

### 0.2.1 指标符号

一个物理量按其性质可以分为三类。

(1) **标量**:只有大小没有方向的量,如速率 $v$、温度 $T$、密度 $\rho$、时间 $t$ 等。

(2) **矢量**:既有大小又有方向性的量。矢量常用黑体或加箭头表示,如速度 $\boldsymbol{v}$(或 $\vec{v}$)、力 $\boldsymbol{F}$(或 $\vec{F}$)、位移 $\boldsymbol{u}$(或 $\vec{u}$)、矢径 $\boldsymbol{r}$(或 $\vec{r}$)等。

(3) **张量**:具有多重方向性的、比矢量更为复杂的物理量。张量常用黑体或加下横线表示,如应力张量 $\boldsymbol{\sigma}$(或$\underline{\sigma}$)。

一般情况下,在印刷时常用黑体记法表示矢量或张量。

一个矢量 $\boldsymbol{u}$ 在任何参考坐标系中,其大小和方向都是不变的。当选定参考坐标系后,可以把 $\boldsymbol{u}$ 分解。例如,在笛卡儿坐标系($x_1,x_2,x_3$)中,$\boldsymbol{u}$ 可以分解为

$$\boldsymbol{u}=u_1\boldsymbol{e}_1+u_2\boldsymbol{e}_2+u_3\boldsymbol{e}_3=\sum_{i=1}^{3}u_i\boldsymbol{e}_i \tag{0-1}$$

式中,$u_1$、$u_2$、$u_3$ 是 $\boldsymbol{u}$ 在三个坐标轴 $x_1$、$x_2$、$x_3$ 上的分量;$\boldsymbol{e}_1$、$\boldsymbol{e}_2$、$\boldsymbol{e}_3$ 分别是坐标轴 $x_1$、$x_2$、$x_3$ 的基矢量。可见,矢量 $\boldsymbol{u}$ 可以用实体记法记为 $\boldsymbol{u}$,也可以用分解式记法记为 $\sum\limits_{i=1}^{3}u_i\boldsymbol{e}_i$,还可以用分量记法记为 $u_i$($i=1,2,3$),$i$ 称为指标符号,1、2、3 规定了指标 $i$ 的取值范围。

采用分量记法,在 $n$ 维空间中,一个矢量 $\boldsymbol{a}$ 的 $n$ 个分量 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 可表示为 $a_i$($i=1,2,3,\cdots,n$)。利用指标符号和分量记法,三维空间中一点的坐标($x,y,z$)可表示为 $x_i$($i=1,2,3$)。$x_i=0$ 表示矢量 $\boldsymbol{x}$ 的每个分量 $x_1$、$x_2$、$x_3$ 均为零。类似地,函数 $f(x_1,x_2,x_3)$ 可表示为

$$f(x_1,x_2,x_3)=f(\boldsymbol{x})=f(x_i)=f(x_j)$$

进一步,引进爱因斯坦**求和约定**:如果在表达式的某项中,某指标重复地出现两次,则表示要把该项在该指标的取值范围内遍历求和。该重复出现的指标称为**哑指标**或简称**哑标**。

在式(0-1)中,如果将 $\sum\limits_{i=1}^{3}u_i\boldsymbol{e}_i$ 写成 $u_i\boldsymbol{e}_i$,按照爱因斯坦求和约定,则两者含义完全相同,即

$$u_i\boldsymbol{e}_i\equiv\sum_{i=1}^{3}u_i\boldsymbol{e}_i \tag{0-2}$$

爱因斯坦求和约定也可以理解为在式(0-1)中省略求和符号"$\sum$",而用重复出现的指标表示求和运算,求和的范围由该重复指标(即哑标)的取值范围规定。于是,式(0-1)可以写成

$$\boldsymbol{u}=u_1\boldsymbol{e}_1+u_2\boldsymbol{e}_2+u_3\boldsymbol{e}_3=u_i\boldsymbol{e}_i$$

或更为简洁地写成

$$\boldsymbol{u}=u_i\boldsymbol{e}_i \tag{0-3}$$

式(0-3)中,由于哑标仅代表要遍历求和,因此可以**成对地任意换标**,如

$$\boldsymbol{u}=u_i\boldsymbol{e}_i=u_k\boldsymbol{e}_k=u_m\boldsymbol{e}_m$$

只要指标 $k$、$m$ 的取值范围与指标 $i$ 相同即可。

矢量 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$ 的点积为

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3=a_ib_i=b_ia_i$$

则 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$ 可简洁地写成

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=a_ib_i$$

同样有

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=a_ib_i=a_jb_j=a_mb_m$$

采用指标符号和求和约定，线性变换可表示为

$$\begin{cases}x_1'=a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3=a_{1j}x_j\\x_2'=a_{21}x_1+a_{22}x_2+a_{23}x_3=a_{2j}x_j\\x_3'=a_{31}x_1+a_{32}x_2+a_{33}x_3=a_{3j}x_j\end{cases}\tag{0-4}$$

进一步，三个式子可以仅用一个式子统一写成

$$x_i'=a_{ij}x_j\tag{0-5}$$

式(0-5)中，右端项除了指标 $i$，还有重复指标 $j$，显然 $j$ 为哑标。左端项只有一个不重复指标 $i$，$i$ 称为**自由指标**。自由指标表示：将自由指标轮流取取值范围内的任何值，关系式始终成立。由于指标 $i$ 的取值范围为 1、2、3，所以式(0-5)实际上表示和式(0-4)相同的三个方程。

在表达式或方程中，自由指标可以出现在多个项中，但不能在同一项内重复出现两次。自由指标仅表示轮流取值，因此也可以换标。例如，在式(0-5)中，可以将自由指标 $i$ 换为 $k$，有

$$x_k'=a_{kj}x_j$$

只要 $k$ 和 $i$ 取值范围相同，上式同样表示式(0-4)中的三个方程。也可以将自由指标和哑标同时换掉，但是应注意以下两点。

1）防止重名

例如，将式子$(a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3)(c_1d_1+c_2d_2+c_3d_3)$用指标符号表示，可以写成

$$(a_ib_i)(c_jd_j)=a_ib_ic_jd_j$$

而不能写成 $(a_ib_i)(c_id_i)=a_ib_ic_id_i$，因为

$$a_ib_ic_id_i=a_1b_1c_1d_1+a_2b_2c_2d_2+a_3b_3c_3d_3$$

可见，在同一项中，哑标与哑标也要避免重名。

注意：上式虽然使用了求和约定，但是在等式或表达式中只有在同一项中出现两次的指标，求和约定才有效。像 $u_iv_{ii}$ 这样的表达式没有特别意义。当需要对两个以上指标求和时，应加上求和符号，所以，严格讲上式应写成

$$a_1b_1c_1d_1+a_2b_2c_2d_2+a_3b_3c_3d_3=\sum_{i=1}^{3}a_ib_ic_id_i$$

再如，公式 $x_{ij}'=a_{ijkl}x_kx_l$ 中的自由指标可以换标。例如，可以将 $i$ 换为 $m$

$$x_{mj}'=a_{mjkl}x_kx_l$$

如果将 $i$ 换为 $j$

$$x_{jj}'=a_{jjkl}x_kx_l$$

上式中，指标 $j$ 在同一项中出现两次，成了哑标，显然与原式含义不同，所以这种换标是错误的。错在所换的自由指标与另一个自由指标($j$)重名了。为避免重名，可以将指标 $j$ 同时换掉，如换为 $i$

$$x_{ji}'=a_{jikl}x_kx_l$$

或者将 $i$、$j$ 同时换为其他指标

$$x_{st}'=a_{stkl}x_kx_l$$

2）自由指标要整体换，哑标可以局部成对换

以 $x'_{ij}=a_{ijkm}x_kx_m+b_{ijst}\varepsilon_{st}$ 为例，在对自由指标换标时，必须将每一项中的该自由指标都换为新标。以只替换自由指标 $i$ 为例，将 $i$ 换为 $l$，原式成为

$$x'_{lj}=a_{ljkm}x_kx_m+b_{ljst}\varepsilon_{st}$$

如果仅对右端第二项中的哑标换标，原式成为

$$x'_{ij}=a_{ijkm}x_kx_m+b_{ijuv}\varepsilon_{uv}$$

指标替换是公式推导时常用的方法，也很容易出错，但只要注意区分自由指标和哑标，注意"让同时取值的指标同名、独立取值的指标不重名"即可避免错误。

现在把指标符号的使用规则总结如下。

规则 1：如果在一个方程或表达式的一项中，一种指标只出现 1 次，则称为"自由指标"。自由指标在一个方程或表达式的每一项中只出现 1 次。

规则 2：如果在一个方程或表达式的一项中，一种指标正好出现 2 次，则称为"哑标"。哑标表示从 1 到 3 进行求和。哑标在其他任何项中可以刚好出现 2 次，或者不出现。

规则 3：如果在一个方程或表达式的一项中，一种指标出现多于 2 次，则是错误的。

### 0.2.2 微分运算中的指标符号

三维空间中线元长度 $\mathrm{d}s$ 及其三个分量之间的关系为

$$(\mathrm{d}s)^2=(\mathrm{d}x_1)^2+(\mathrm{d}x_2)^2+(\mathrm{d}x_3)^2$$

采用指标符号可以写成

$$\mathrm{d}s^2=\mathrm{d}x_i\mathrm{d}x_i$$

多变量函数 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 的全微分可写成

$$\mathrm{d}f=\frac{\partial f}{\partial x_i}\mathrm{d}x_i \quad (i=1,2,\cdots,n)$$

### 0.2.3 多重求和的指标符号表示

多重求和可以用一项内出现多对哑标来表示，例如

$$\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3}a_{ij}x_ix_j=a_{ij}x_ix_j(=a_{kl}x_kx_l)$$

上式右端项中 $i$、$j$ 均为哑标。

## 0.3 符号 $\delta_{ij}$ 与 $e_{rst}$

### 0.3.1 符号 $\delta_{ij}$ 和 $e_{rst}$ 的定义与性质

符号 $\delta_{ij}$ 和 $e_{rst}$ 是张量分析中最常用的两个符号。符号 $\delta_{ij}$ 称为"Kronecker delta"符号，其定义为

$$\delta_{ij}=\begin{cases}1, & i=j\\ 0, & i\neq j\end{cases} \quad (i,j=1,2,3) \tag{0-6}$$

显然 $\delta_{ij}$ 对于指标 $i$、$j$ 具有对称性，即

$$\delta_{ij}=\delta_{ji} \tag{0-7}$$

$\delta_{ij}$ 的分量集合对应单位矩阵。例如，在三维空间中

$$[\delta]=\begin{bmatrix}\delta_{11} & \delta_{12} & \delta_{13}\\ \delta_{21} & \delta_{22} & \delta_{23}\\ \delta_{31} & \delta_{32} & \delta_{33}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

符号 $\delta_{ij}$ 具有换标作用，有时也称为**换标符号**。例如，线元平方 $ds^2=dx_i dx_i$ 可以利用 $\delta_{ij}$ 改写成

$$ds^2=dx_i dx_i=\delta_{ij}dx_i dx_j \tag{0-8}$$

类似地，有

$$\delta_{ij}a_{jk}=a_{ik}, \quad \delta_{ij}a_{ik}=a_{jk}, \quad \delta_{ij}a_{kj}=a_{ki}, \quad \delta_{ij}a_{ki}=a_{kj}, \quad \delta_{ij}a_{ij}=a_{ii}=a_{jj} \tag{0-9}$$

$$\delta_{ij}\delta_{jk}=\delta_{ik}, \quad \delta_{ij}\delta_{jk}\delta_{kl}=\delta_{il} \tag{0-10}$$

符号 $e_{rst}$ 称为**排列符号或置换符号**(the permutation symbol)，也称为莱维-齐维塔符号或里奇符号。其定义为

$$e_{rst}=\begin{cases}1 & (r、s、t\ 正序排列)\\ -1 & (r、s、t\ 逆序排列)\\ 0 & (r、s、t\ 有两个指标相同时)\end{cases}$$

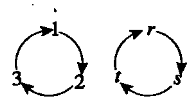



图 0-1 $e_{rst}$ 指标的正序排列

$r、s、t$ 取值范围均为 1、2、3。图 0-1 所示为 $r、s、t$ 的正序排列。例如，$e_{123}$、$e_{231}$ 和 $e_{312}$ 的指标均为正序排列，它们取值为 1；$e_{132}$、$e_{321}$ 和 $e_{213}$ 的指标均为逆序排列，它们取值为 $-1$；而当有两个指标相同时，取值为零，如 $e_{113}$、$e_{221}$ 等。当将 $e_{rst}$ 的任意两个指标对调时，则原来的正序排列即变为逆序排列，原来的逆序排列变为正序排列。所以，$e_{rst}$ 对任何两个指标都是反对称的，即

$$e_{rst}=-e_{srt}=-e_{rts}=-e_{tsr} \tag{0-11}$$

如果调换两次指标，其值不变，即

$$e_{rst}=e_{str}=e_{trs} \tag{0-12}$$

$e_{rst}$ 共有 27 个元素，其中只有 6 个非零元素(3 个 1 和 3 个 $-1$)，其余均为零。

符号 $\delta_{ij}$ 和 $e_{rst}$ 在矢量代数、张量分析和场论中有广泛的应用。

### 0.3.2 正交标准化基

三个互相正交的单位基矢量 $e_i$、$e_j$、$e_k$ 构成一个**正交标准化基**，如直角坐标系的三个基矢量即组成一个正交标准化基。正交标准化基具有如下性质：

(1) $\boldsymbol{e}_i\cdot\boldsymbol{e}_j=\delta_{ij}$，即任意两个基矢量的点积等于 Kronecker delta 符号。

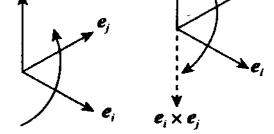
(2) $\boldsymbol{e}_i\times\boldsymbol{e}_j=e_{ijk}\boldsymbol{e}_k=e_{kij}\boldsymbol{e}_k$。

当三个基矢量 $e_i$、$e_j$、$e_k$ 构成右手坐标系时，对应指标 $i、j、k$ 的正序排列(图 0-2(a))，所以有

$$\boldsymbol{e}_i\times\boldsymbol{e}_j=e_{ijk}\boldsymbol{e}_k=e_{kij}\boldsymbol{e}_k=\boldsymbol{e}_k \tag{0-13}$$

指标 $i、j、k$ 的逆序排列对应左手系(图 0-2(b))，有

$$\boldsymbol{e}_i\times\boldsymbol{e}_j=e_{ijk}\boldsymbol{e}_k=e_{kij}\boldsymbol{e}_k=-\boldsymbol{e}_k$$




(a)右手系　(b)左手系

图 0-2 正交标准化基的叉积

### 0.3.3 矢量的点积(标量积)

矢量 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 的点积为

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=(a_j\boldsymbol{e}_j)\cdot(b_k\boldsymbol{e}_k)=a_jb_k\delta_{jk}=a_jb_j=a_kb_k \tag{0-14}$$

或写为

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{a}|\,|\boldsymbol{b}|\cos\theta$$

式中，$|\boldsymbol{a}|$为矢量$\boldsymbol{a}$的绝对长度；$\theta$为矢量$\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$在包含它们的平面内的夹角。点积的几何意义是表示矢量$\boldsymbol{a}$在矢量$\boldsymbol{b}$上投影的长度再乘以矢量$\boldsymbol{b}$的长度。如果$\boldsymbol{b}$为单位矢量，则$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{a}|\cos\theta$，即为矢量$\boldsymbol{a}$在$\boldsymbol{b}$方向上投影的长度。

### 0.3.4 矢量的叉积(矢量积)

$$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=(a_j\boldsymbol{e}_j)\times(b_k\boldsymbol{e}_k)=a_jb_k\boldsymbol{e}_j\times\boldsymbol{e}_k=a_jb_ke_{ijk}\boldsymbol{e}_i$$

$$\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{a}=(b_j\boldsymbol{e}_j)\times(a_k\boldsymbol{e}_k)=a_kb_j\boldsymbol{e}_j\times\boldsymbol{e}_k=a_kb_je_{ijk}\boldsymbol{e}_i$$

由于上式中$k$、$j$为哑标，可以将$k$换成$j$、$j$换成$k$，得

$$\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{a}=a_jb_ke_{ikj}\boldsymbol{e}_i=-a_jb_ke_{ijk}\boldsymbol{e}_i=-\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b} \tag{0-15}$$

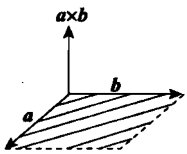


图 0-3　叉积的几何意义

可见，叉积不满足交换律。叉积的几何意义是“面元矢量”，其大小等于由矢量$\boldsymbol{a}$和$\boldsymbol{b}$构成的平行四边形的面积(即图 0-3 中阴影部分面积)，方向为该面元的法线方向(按右手定则)。

一般情况下，叉积中会出现符号$e_{ijk}$，而点积项中会出现符号$\delta_{ij}$。

### 0.3.5 矢量的混合积

矢量$\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$和$\boldsymbol{c}$的混合积为

$$[\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}]=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}$$

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}=(a_m\boldsymbol{e}_m)\cdot(e_{ijk}b_jc_k\boldsymbol{e}_i)=a_mb_jc_ke_{ijk}\delta_{mi}=a_ib_jc_ke_{ijk} \tag{0-16}$$

当交换混合积中相邻两个矢量的顺序时，混合积的值反号。当矢量$\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$和$\boldsymbol{c}$构成右手系时，其混合积的几何意义是这三个矢量构成的平行六面体的体积，如图 0-4 所示。

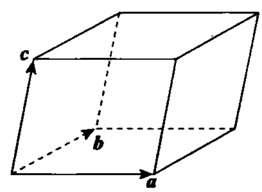


图 0-4　混合积的几何意义

### 0.3.6 三阶行列式的值

一个三阶行列式的展开形式为

$$|a_{ij}|=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$=a_{11}a_{22}a_{33}+a_{21}a_{32}a_{13}+a_{31}a_{12}a_{23}-a_{31}a_{22}a_{13}-a_{21}a_{12}a_{33}-a_{11}a_{32}a_{23}$$

如果使用排列符号，可以简洁地表示为

$$|a_{ij}|=e_{rst}a_{r1}a_{s2}a_{t3}=e_{rst}a_{1r}a_{2s}a_{3t} \tag{0-17}$$

### 0.3.7 $e$-$\delta$ 恒等式

矢量分析中，矢量$\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$、$\boldsymbol{c}$之间存在如下恒等式关系：

$$\boldsymbol{a}\times(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})=(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c})\boldsymbol{b}-(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})\boldsymbol{c} \tag{0-18}$$

设$\boldsymbol{a}=a_k\boldsymbol{e}_k$，$\boldsymbol{b}=b_s\boldsymbol{e}_s$，$\boldsymbol{c}=c_t\boldsymbol{e}_t$，则式(0-18)的左端项为

$$\boldsymbol{a}\times(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})=(a_k\boldsymbol{e}_k)\times(e_{ist}b_sc_t)\boldsymbol{e}_i=(e_{ist}a_kb_sc_t)\boldsymbol{e}_k\times\boldsymbol{e}_i$$

$$=(e_{kij}e_{ist}a_kb_sc_t)\boldsymbol{e}_j=[(e_{ijk}e_{ist})a_kb_sc_t]\boldsymbol{e}_j$$　(将$e_{kij}$指标互调两次成$e_{ijk}$，其值不变)

式(0-18)右端为

$$(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c})\boldsymbol{b}-(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})\boldsymbol{c}=(a_kc_k)b_j\boldsymbol{e}_j-(a_kb_k)c_j\boldsymbol{e}_j=(a_kc_kb_j-a_kb_kc_j)\boldsymbol{e}_j$$
$$=(a_kb_sc_t\delta_{js}\delta_{kt}-a_kb_sc_t\delta_{ks}\delta_{jt})\boldsymbol{e}_j=[(\delta_{js}\delta_{kt}-\delta_{ks}\delta_{jt})a_kb_sc_t]\boldsymbol{e}_j$$

根据式(0-18),令左、右两端相等,得

$$(e_{ijk}e_{ist})a_kb_sc_t=(\delta_{js}\delta_{kt}-\delta_{ks}\delta_{jt})a_kb_sc_t$$

由于式(0-18)为恒等式,即对任意的 $a_k$、$b_s$、$c_t$ 均成立,所以有

$$e_{ijk}e_{ist}=\delta_{js}\delta_{kt}-\delta_{ks}\delta_{jt} \tag{0-19}$$

式(0-19)称为 $e$-$\delta$ 恒等式。其更一般的形式为

$$e_{ijk}e_{rst}=\begin{vmatrix}\delta_{ir} & \delta_{is} & \delta_{it}\\ \delta_{jr} & \delta_{js} & \delta_{jt}\\ \delta_{kr} & \delta_{ks} & \delta_{kt}\end{vmatrix} \tag{0-20}$$

当有一对指标相同时,如 $i=r$,式(0-20)简化为式(0-19);当有两对指标相同时,式(0-20)成为

$$e_{ijk}e_{rjk}=2\delta_{ir},\quad e_{ijk}e_{ijm}=2\delta_{km} \tag{0-21}$$

当有三对指标相同时,有(读者可自行证明)

$$e_{ijk}e_{ijk}=6 \tag{0-22}$$

## 0.4 坐标转换

同一个物理量或物理规律在不同的参考坐标系中描述时,其数学表达形式有什么联系与区别呢?要回答这个问题,需要首先了解不同的坐标系之间的转换关系。以最常用的笛卡儿坐标系为例,如图 0-5 所示,画出了新、老两个笛卡儿坐标系 $x_i'$ 和 $x_i$。

点 $P$ 的空间位置可以用新、老两个坐标系中的坐标表示为 $P(x_i')$ 和 $P(x_i)$,也可以用 $P$ 点在新、老两个坐标系中的矢径 $\boldsymbol{r}'$ 和 $\boldsymbol{r}$ 表示。$\boldsymbol{r}_O'$ 表示老坐标系原点 $O$ 在新坐标系中的矢径。矢径 $\boldsymbol{r}'$、$\boldsymbol{r}_O'$ 和 $\boldsymbol{r}$ 的表达式分别为

$$\boldsymbol{r}'=x_i'\boldsymbol{e}_i',\quad \boldsymbol{r}_O'=(x_i')_O\boldsymbol{e}_i',\quad \boldsymbol{r}=x_j\boldsymbol{e}_j \tag{0-23}$$

式中,$\boldsymbol{e}_i'$、$\boldsymbol{e}_j$ 分别为新、老坐标系的正交标准化基;$(x_i')_O$ 为老坐标系原点 $O$ 在新坐标系的坐标值,如图 0-5 所示。正交标准化基具有如下性质:

$$\boldsymbol{e}_i'\cdot\boldsymbol{e}_j'=\delta_{ij},\quad \boldsymbol{e}_i\cdot\boldsymbol{e}_j=\delta_{ij} \tag{0-24}$$

把新基 $\boldsymbol{e}_i'$ 看做一个矢量,设它在老坐标系中的 3 个分量分别是 $\beta_{i'1}$、$\beta_{i'2}$ 和 $\beta_{i'3}$,则它在老基 $\boldsymbol{e}_j$ 中的分解式为

$$\boldsymbol{e}_i'=\beta_{i'1}\boldsymbol{e}_1+\beta_{i'2}\boldsymbol{e}_2+\beta_{i'3}\boldsymbol{e}_3=\beta_{i'j}\boldsymbol{e}_j \tag{0-25}$$

类似地,把老基在新坐标系中分解,有

$$\boldsymbol{e}_j=\beta_{i'j}\boldsymbol{e}_i'$$

式中

$$\beta_{i'j}=\cos(\boldsymbol{e}_i',\boldsymbol{e}_j)=\boldsymbol{e}_i'\cdot\boldsymbol{e}_j=\boldsymbol{e}_j\cdot\boldsymbol{e}_i'=\beta_{ji'} \tag{0-26}$$

其中,$\beta_{i'j}$ 和 $\beta_{ji'}$ 含义相同,新坐标轴 $i'$ 和老坐标轴 $j$ 之间的夹角余弦称为**转换系数**。注意式(0-26)并不表明 $\beta_{i'j}$ 是对称的。事实上,$\beta_{i'j}$ 所形成的矩阵也不对称。它的 9 个元素组成的矩阵称为**转换矩阵**

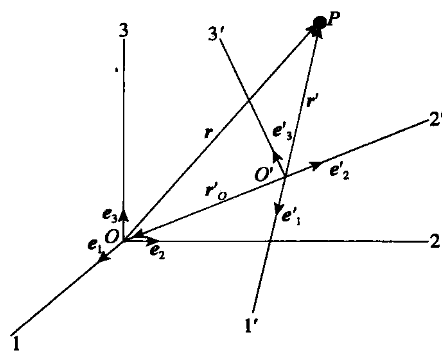


图 0-5 新、老两个笛卡儿坐标系 $x_i'$ 和 $x_i$

$$[\beta]=\begin{bmatrix}\beta_{1'1} & \beta_{1'2} & \beta_{1'3}\\ \beta_{2'1} & \beta_{2'2} & \beta_{2'3}\\ \beta_{3'1} & \beta_{3'2} & \beta_{3'3}\end{bmatrix} \tag{0-27}$$

转换矩阵$[\beta]$有如下性质：

$$[\beta]^{\mathrm{T}}=[\beta]^{-1},\quad [\beta][\beta]^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{I} \tag{0-28}$$

可见$[\beta]$为正交矩阵，其行列式值为

$$|\beta_{i'j}|=1 \tag{0-29}$$

用转换矩阵可以表示新、老坐标系间的转换关系。由$\boldsymbol{r}'=\boldsymbol{r}+\boldsymbol{r}'_O$得

$$x'_i\boldsymbol{e}'_i=\beta_{i'j}x_j\boldsymbol{e}'_i+(x'_i)_O\boldsymbol{e}'_i$$

于是，新坐标用老坐标表示的关系式为

$$x'_i=\beta_{i'j}x_j+(x'_i)_O \tag{0-30}$$

式(0-30)的矩阵形式为

$$\begin{bmatrix}x'_1\\ x'_2\\ x'_3\end{bmatrix}=[\beta]\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}(x'_1)_O\\ (x'_2)_O\\ (x'_3)_O\end{bmatrix} \tag{0-31}$$

老坐标用新坐标表示，其关系式为

$$x_j=\beta_{i'j}x'_i+(x_j)_{O'} \tag{0-32}$$

式中，$(x_j)_{O'}$为新坐标系原点$O'$在老坐标系的坐标值。矩阵形式为

$$\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{bmatrix}=[\beta]\begin{bmatrix}x'_1\\ x'_2\\ x'_3\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}(x_1)_{O'}\\ (x_2)_{O'}\\ (x_3)_{O'}\end{bmatrix} \tag{0-33}$$

如果新、老坐标系的坐标原点重合，式(0-30)、式(0-32)及其矩阵形式分别变为

$$x'_i=\beta_{i'j}x_j,\quad \{x'\}=[\beta]\{x\} \tag{0-34}$$

$$x_j=\beta_{i'j}x'_i,\quad \{x\}=[\beta]\{x'\} \tag{0-35}$$

式(0-34)和式(0-35)的第一式可以写成更一般的形式，表示任意新、老坐标系间的转换关系

$$x'_i=x'_i(x_j)\quad (i,j=1,2,3) \tag{0-36}$$

$$x_j=x_j(x'_i)\quad (i,j=1,2,3) \tag{0-37}$$

式(0-36)表示老坐标到新坐标的坐标转换，称为**正转换**；式(0-37)称为**逆转换**。将式(0-36)微分，得到

$$\mathrm{d}x'_i=\frac{\partial x'_i}{\partial x_j}\mathrm{d}x_j \tag{0-38}$$

式(0-38)给出了由老坐标微分$\mathrm{d}x_j$确定新坐标微分$\mathrm{d}x'_i$的线性变换。其系数行列式称为**雅可比行列式**，定义为

$$J\equiv\left|\frac{\partial x'_i}{\partial x_j}\right|=\begin{vmatrix}\dfrac{\partial x'_1}{\partial x_1} & \dfrac{\partial x'_1}{\partial x_2} & \dfrac{\partial x'_1}{\partial x_3}\\ \dfrac{\partial x'_2}{\partial x_1} & \dfrac{\partial x'_2}{\partial x_2} & \dfrac{\partial x'_2}{\partial x_3}\\ \dfrac{\partial x'_3}{\partial x_1} & \dfrac{\partial x'_3}{\partial x_2} & \dfrac{\partial x'_3}{\partial x_3}\end{vmatrix} \tag{0-39}$$

如果雅可比行列式的值$J$处处不为零，则存在相应的逆变换，即可以用$\mathrm{d}x'_i$唯一地确定