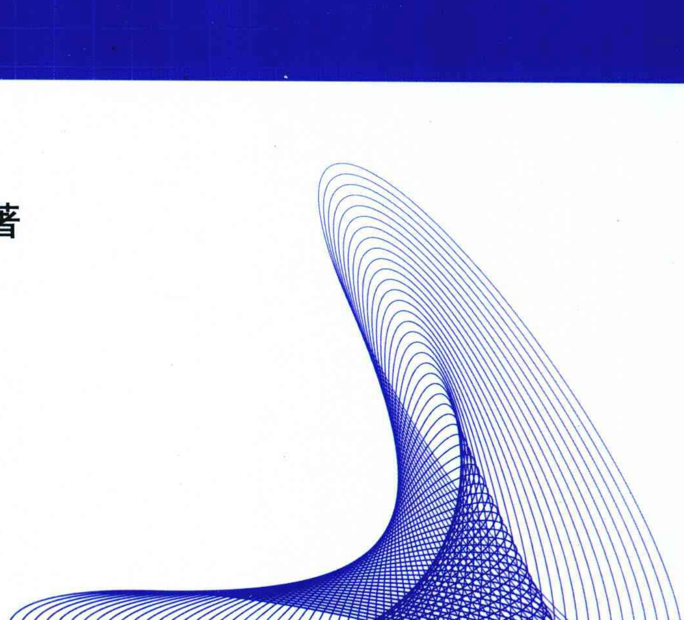
代数曲面拼接的理论与算法研究

厉玉蓉◎编著



科学出版社

代数曲面拼接的理论与算法研究

厉玉蓉　编著

科学出版社

北　京

内 容 简 介

本书利用构造性代数几何理论对代数曲面的拼接问题进行探讨和研究. 全书共 5 章. 第 1 章为绪论, 第 2 章为多个曲面光滑拼接的理论与算法, 第 3 章为具有齐次系数光滑拼接曲面的具体存在条件及拼接曲面, 第 4 章为分片代数曲面的构造, 第 5 章为两类具有"特殊"形式的五次拼接曲面的构造.

本书可作为从事代数几何与 CAGD 研究和应用的科技人员的参考书, 也可作为高等院校研究生学习代数几何与 CAGD 的教学参考书.

图书在版编目(CIP)数据

代数曲面拼接的理论与算法研究/厉玉蓉编著. —北京: 科学出版社, 2011

ISBN 978-7-03-032193-0

Ⅰ. ①代… Ⅱ. ①厉… Ⅲ. ①代数曲面-研究 Ⅳ. ①O187.1

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2011) 第 174420 号

责任编辑: 潘斯斯 / 责任校对: 包志虹

责任印制: 张克忠 / 封面设计: 迷底书装

科学出版社 出版

北京东黄城根北街 16 号

邮政编码: 100717

http://www.sciencep.com

骏杰印刷厂 印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

*

2011 年 8 月第 一 版 开本: 720×1000 1/16

2011 年 8 月第一次印刷 印张: 6 1/4

印数: 1—2 000 字数: 120 000

定价: 28.00 元

(如有印装质量问题, 我社负责调换)

前　言

计算机辅助几何设计 (computer aided geometric design, CAGD) 是计算机科学与技术的一个重要研究领域. 代数曲面拼接问题是 CAGD 中的基本问题之一. 它不仅有重要的理论意义, 而且有重要的应用价值. 例如, 目前已应用于磨角、倒棱、整流片设计、管道连接、肢体设计、隐形飞机隔合片设计等外形设计中. 多年来, 一般的代数曲面 (隐式代数曲面) 拼接问题始终是 CAGD 的热点.

本书主要利用构造性代数几何理论对代数曲面拼接问题的两个方面进行探讨和研究. 一方面, 就二次代数曲面的低次光滑拼接曲面问题进行研究; 另一方面, 针对代数曲面的重构问题进行探讨. 第 1 章为绪论; 第 2 章和第 3 章主要就多个二次代数曲面的最低次光滑拼接曲面的构造理论与算法进行了探讨; 第 4 章研究用分片代数曲面进行曲面重建的构造性理论, 得到了划分方法和三次分片代数曲面存在的条件; 第 5 章介绍两类具有特殊形式的五次代数曲面的构造, 一类是根据三次控制曲面的存在性来构造高光滑度的重建曲面, 另一类是具有组合形式的五次代数曲面的构造 —— 根据四次弱光滑度曲面的存在性来构造符合要求的五次代数曲面.

本书的研究工作得到国家自然科学基金 (60803048)、山东省自然科学基金 (Y2007A28) 等项目的资助.

另外, 要特别感谢冯果忱教授、张彩明教授、张树功教授等, 他们为本书的写作提供了帮助和支持.

由于撰写时间和作者水平有限, 书中疏漏和不足之处在所难免, 敬请读者批评指正.

作　者

2011 年 5 月

目　录

第1章　绪　　论

1.1　引　　言

在计算机辅助几何设计 (computer aided geometric design, CAGD) 领域中, 几何造型是其基本问题之一, 它有着广泛的用途. 为便于实际应用, 在几何造型中通常是以低次代数曲面为基本单元, 通过它们之间的光滑拼接, 实现所需的几何造型. 这样, 曲面拼接的数学原理就成为几何造型的理论基础.

代数曲面拼接是典型的代数几何问题, 由于古典代数几何缺乏构造性理论, 在很长一段时期内, 关于曲面拼接的理论研究多借助于多元插值与逼近理论加以处理, 所以仅能对若干特殊问题得到一些结果. 实际上, 如果不利用构造性的代数几何理论, 多元插值理论也是不完整的.

近 30 年来, 构造性代数几何有了突破性进展. 理论上, Groebner 基的发现及其在理想论及模论中的应用, 为构造性代数几何提供了理论基础. 由于 Groebner 基是可算的, 所以它已原则上给出了相关问题的算法. 然而, 由于多元或高次的代数几何问题的计算复杂度特别高, 实际的计算实现还需进一步研究与开发. 或者说与数值计算的理论和算法比较, 符号计算的理论和算法的研究才刚刚起步.

在构造性代数几何研究中, 我国著名数学家吴文俊先生提出的特征列方法 (现通称吴方法) 为构造性的解决代数几何问题提供一种有效工具. 迄今为止, 国际数学界公认, 吴方法是证明初等几何定理的最有效方法, 人们已用它证明了大量的几何定理. 相比之下, 虽然 Groebner 基方法原则上也可以处理几何定理证明问题, 但效果不好. 主要原因是吴方法可以用来计算多项式方程组的流形解, 而用 Groebner 基方法解决这类问题, 则遇到很大困难.

用吴方法处理几何问题的另一个范例是, 1994 年吴文俊对于两个轴

垂直的圆管在与轴垂直的平面截口处 C^1 光滑拼接问题得到了一个漂亮的公式. 该公式给出了用三次曲面 C^1 光滑拼接两个圆管的条件.

给定两个轴垂直且半径分别为 r_1, r_2 的圆管

$$\begin{cases} g_1 = y^2 + z^2 - r_1^2, \\ g_2 = x^2 + z^2 - r_2^2, \end{cases}$$

垂直于二圆管轴线的平面分别为

$$\begin{cases} h_1 = x - d_1, \\ h_2 = y - d_2, \end{cases}$$

d_1, d_2 分别为截距.

吴文俊证明: 存在三次曲面 f, 使之分别于 h_1, h_2 处与 g_1, g_2 C^1 光滑拼接的充分必要条件是半径 r_1, r_2 与截距 d_1, d_2 满足下列关系式 —— 吴文俊公式:

$$r_1^2 + d_1^2 = r_2^2 + d_2^2.$$

注意, 当上述公式成立时, 拼接曲面在其截口处微商也连续. 因此, 它实质是一个微分几何公式, 这就充分显示出吴方法处理几何问题的威力.

雷娜 (2002) 基本解决了任意两个二次曲面存在 C^1 拼接曲面的条件. 当增加所需拼接的二次曲面个数时, 是否仍可得到相应的吴文俊公式? 随着曲面个数的增多, 参数也随之增多, 由于计算复杂度过高, 直接用传统的方法已很难实现, 所以深入研究发展解决这类问题的理论与算法就变得十分有意义.

上述例子仅说明用构造性的代数几何方法解决一类曲面拼接问题的有效性. 实际上, 曲面拼接问题有很多种提法, 对各类方法给予恰当的数学描述并研究、开发相应解法是很有理论与应用价值的.

1.2 代数几何基本知识概述

1.2.1 多项式环

假设 K 是一特征为零的域, 如复数域 $\mathbf{C}$, 实数域 $\mathbf{R}$ 等, 本书一般在

实数域 $\mathbf{R}$ 中考虑问题.

用 K^n 表示 n 维 K 向量空间:

$$K^n = \{(a_1, a_2, \cdots, a_n) | a_i \in K, 1 \leqslant i \leqslant n\}. \tag{1.1}$$

K^n 中的元素称为向量空间中的点, 是一个 n 维向量.

$K[x_1, x_2, \cdots, x_n]$ 表示 n 元多项式环, 即所有以 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 为变元的多项式集合. 记 $X = (x_1, x_2, \cdots, x_n)$, $K[X] = K[x_1, x_2, \cdots, x_n]$. 单项式是一个形如 $x^\alpha = x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \cdots x_n^{\alpha_n}$ 的幂积 (其中, $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n)$ 为多重指标), 有时也将单项式称为单项. 单项式的全次数定义为 $|\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n$. 域 K 上关于 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 的多项式是一个形如 $f = \sum\limits_\alpha c_\alpha x^\alpha$ $(c_\alpha \in K)$ 的有限线性组合. f 的全次数定义为

$$\mathrm{tdeg}(f) = \max\{|\alpha| | c_\alpha \neq 0\}.$$

用 T 表示全体单项式集, 总假定 T 上某一单项式序 $\prec$ 已给定, 如全次序、字典序、分次字典序、分次反字典序等.

在给定序下, 有如下定义:

f 的多重次数: $\mathrm{multideg}(f) = \max\{i \in \mathbf{Z}^n_{\geqslant 0} | c_\alpha \neq 0\}$.

f 的领项系数: $LC(f) = c_{\mathrm{multideg}(f)} \in K$.

f 的领式: $LM(f) = x^{\mathrm{multideg}(f)}$.

f 的领项: $LT(f) = LC(f) \cdot LM(f)$.

又设 F 是多项式集合. $T(f)$ 表示 F 中所有多项式的首项组成的集合, 即

$$T(F) = \{LT(f) | f \in F\}.$$

1.2.2 理想、Groebner 基及代数簇

这里简要介绍一下多项式环 $K[x_1, x_2, \cdots, x_n]$ 中的理想、Groebner 基及代数簇的基本概念和一些性质.

定义 1.1 多项式集合

$$I \subset K[x_1, x_2, \cdots, x_n]$$

称为理想, 若

(1) $0 \in I$;

(2) $\forall f, g \in I,\ f+g \in I$;

(3) $\forall f \in I,\ h \in K[x_1, x_2, \cdots, x_n],\ h \cdot f \in I$.

定义 1.2 设 A 为 $K[x_1, x_2, \cdots, x_n]$ 的非空子集, 则 A 生成的理想定义为

$$\langle A\rangle = \{\textstyle\sum h_i f_i | h_i \in K[x_1, x_2, \cdots, x_n], f_i \in A\}.$$

如果 $A = \{f_1, f_2, \cdots, f_s\}$ 为一有限集, 则 A 生成的理想也可用 $\langle f_1, f_2, \cdots, f_s\rangle$ 来表示. 对任意多项式 f, 用 $(f)_{\langle A\rangle}$ 表示 f 模 $\langle A\rangle$ 的标准表达式.

定理 1.1 (Hilbert 基定理) 设 $I \subset K[x_1, x_2, \cdots, x_n]$ 为理想, 则存在有限个 $f_1, f_2, \cdots, f_s \in I$, 使得 $I = \langle f_1, f_2, \cdots, f_s\rangle$.

定义 1.3 对给定的单项式序 $\prec$, 称理想 I 的有限子集 $G=\{g_1, g_2, \cdots, g_s\}$ 为 Groebner 基, 如果

$$\langle LT(I)\rangle = \langle LT(g_1), LT(g_2), \cdots, LT(g_s)\rangle.$$

Cox(1992) 还定义了**最小 Groebner 基**和**约化 Groebner 基**.

定义 1.4 设 I, J 为理想, 则可定义

(1) 理想和 $I+J = \{a+b | a \in I, b \in J\}$;

(2) 理想交 $I \cap J = \{a | a \in I, a \in J\}$;

(3) 理想积 $I \cdot J = \langle a \cdot b | a \in I, b \in J\rangle$.

定义 1.5 称理想 I 为素理想, 若 $f \cdot g \in I$, 则必有 $f \in I$ 或者 $g \in I$.

定义 1.6 给定 $\langle f_1, f_2, \cdots, f_s\rangle \in K[x_1, x_2, \cdots, x_n]$ (s 有限或无限), 则称 $f_i (i = 1, 2, \cdots, s)$ 的公共零点集.

$$V(f_1, f_2, \cdots, f_s) = \{(a_1, a_2, \cdots, a_n) \in K^n | f_i(a_1, a_2, \cdots, a_n) = 0, 1 \leqslant i \leqslant s\}$$

为由 $f_1, f_2, \cdots, f_s$ 确定的代数簇.

引理 1.1 如果 $V, W \subset K^n$ 是代数簇, 则 $V \cup W, V \cap W$ 亦然.

定义 1.7 称代数簇 V 是不可约的, 如果 $V = V_1 \cup V_2$ $(V_i \subset V, i = 1,2)$ 成立, 则必有 $V = V_1$ 或 $V = V_2$. 否则, 称 V 为可约的.

命题 1.1 V 为不可约代数簇 $\Leftrightarrow I(V)$ 为素理想.

1.2.3 曲面拼接

对于限制在 $C[x,y,z]$ 情形, 用 $S(f)$ 表示代数方程 $f(x,y,z) = 0$ 所确定的代数曲面. 为简便计, 有时也用 f 来表示代数曲面 $S(f)$. 若 $f_1, f_2, \cdots, f_s \in C[x,y,z]$, 且其在 C 上的公共解集 $S(f_1, f_2, \cdots, f_s)$ 是一维的, 则称 $S(f_1, f_2, \cdots, f_s)$ 为空间曲线.

给定多项式 g_i, h_i, 求多项式 f, 使 $S(f)$ 与 $S(g_i)$ 于 $S(g_i, h_i)$ 处拼接, 即求 f 使

$$f = g_i, \quad \forall x \in S(g_i, h_i), \quad i = 1, 2, \cdots, n, \tag{1.2}$$

其中, $x = (x_1, x_2, x_3)$.

更进一步, 求 f, 使 $S(f)$ 与 $S(g_i)$ 在 $S(g_i, h_i)$ 处 C^1(代数的) 拼接, 即除有限个点以外, 有

$$\partial_j f = \partial_j g_i, \quad \forall x \in S(g_i, h_i), \quad j = 1, 2, 3, \tag{1.3}$$

其中, $\partial_j = \partial / \partial x_j$.

类似地, 可以定义 C^k(代数的) 拼接, 本书所论均指代数 C^k, 以后不再特别标出.

注意代数曲面 f 的曲率定义为

$$æ_f = \frac{v_f}{u_f^2}, \tag{1.4}$$

其中

$$u_f = \sum_{i=1}^{3} (\partial_i f)^2,$$

$$\begin{aligned} v_f = \sum_{i \neq j \neq k} & (\partial_i^2 f \partial_j^2 f (\partial_k f)^2 - 2\partial_i f \partial_j f \partial_{ij} f \partial_k^2 f \\ & + 2\partial_i f \partial_j f \partial_{ik} f \partial_{jk} f - (\partial_i f)^2 (\partial_{jk} f)^2). \end{aligned}$$

因此, 若除要求 C^1 拼接之外, 还要求保形, 则需满足下列关系:

$$\text{æ}_f = \text{æ}_{g_i}, \quad \forall x \in \langle g_i, h_i \rangle, \quad i = 1, 2, \cdots, n. \tag{1.5}$$

基于上述讨论, 求拼接曲面 $S(f)$ 的问题, 归结为在 $S(g_i, h_i)$ 上求解相应的方程组 (1.2), (1.3) 及 (1.5).

Warren(1989) 也曾利用理想论刻画了曲面拼接问题. 他把计算曲面拼接的问题化成计算理想交的成员问题.

定理 1.2 若代数曲面 $S(f)$ 与 $S(g_i)$ 分别在 $S(g_i, h_i)$ 处 C^k 光滑拼接, 则

$$f \in \langle g_1, h_1^{k+1} \rangle \cap \langle g_2, h_2^{k+1} \rangle \cap \cdots \cap \langle g_n, h_n^{k+1} \rangle, \tag{1.6}$$

其中, $\langle g_i, h_i^{k+1} \rangle$ 表示由 g_i, h_i^{k+1} 生成的理想.

此外, 据式 (1.6), f 可表示为

$$f = u_i g_i + a_i h_i^{k+1}, \quad i = 1, 2, \cdots, n, \tag{1.7}$$

(u_i, a_i 为多项式), 则当 $u_i (i = 1, \cdots, n)$ 在 $S(g_i, h_i)$ 上不恒为 0 时, 条件 (1.6) 也是充分的.

根据上述定理, 以理想论为工具, 求拼接曲面表达式 f, 归结为求理想交 $\bigcap\limits_i \langle g_i, h_i^{k+1} \rangle$ 的成员问题.

当 g_i, h_i 给定时, 理想交的成员可以给出一般表达式. 此外, 还有一些算法如混合曲面方法等, 计算上并不困难. 实际上, 直接利用理想 $\langle g_i, h_i^{k+1} \rangle$ 的生成元, 容易给出相应理想交的元素, 但次数也是很高的. 例如, 三个曲面拼接情形, $k = 0, \text{tdeg}(h_i) = 1, \text{tdeg}(g_i) = 2$ 时, 四次一定存在, $k = 1$ 时, 六次一定存在, 均可直接利用 g_i, h_i 给出相应表达式. 然而, 由于得到的多项式次数过高, 无实用价值, 所以**求拼接曲面问题实质上是求理想交的最低次数的成员问题**. 这是理想交计算的基本问题. 由于现有方法, 如 Groebner 基方法等, 计算复杂度过高, 必须研究可行的实用方法, 这也是曲面拼接研究的基本问题.

必须指出, 关于曲面拼接问题, 由于问题的提法不同, 计算复杂度差别也非常大. 这类问题大致可以分为下列几种.

(1) **正问题** 给定 $g_i, h_i, (i = 1, 2, \cdots, n)$, 求最低次数拼接曲面;

(2) **反问题** 给定 $g_i, (i = 1, 2, \cdots, n)$, 选取确定次数的 h_i(通常 h_i 是一次的), 使相应的拼接曲面的次数最低. 例如, $n = 2, \mathrm{tdeg}(g_i) = 2$, $\mathrm{tdeg}(h_i) = 1$, 求二次 C^0, 三次 C^1, $\cdots$ 拼接曲面.

(3) **加细剖分问题** 增加辅助拼接曲面, 以降低拼接曲面次数;

(4) **多元样条** 给定空间的一种剖分, 即给定 $h_1, \cdots, h_n$, 求最低次数的 $g_1, g_2, \cdots$, 使之与 $S(h_i)$ 光滑拼接. 这类问题通常限制 $S(h_i)$ 的维数比空间低一维. 这是一个插值问题, 是多元样条的基本内容.

曲面拼接问题中, 正问题与反问题, 其难度差别甚大, 因为前者 h_i 是给定的, 而后者是作为未知函数待求, 并且在反问题的研究中实际也包含了关于正问题的理论. 因此, 主要讨论反问题的相关理论, 重点研究可行算法, 并且仅限于 $\mathrm{tdeg}(h_i) = 1$, 即 $S(h_i)$ 是平面的情形.

1.3 曲面拼接的一种构造性理论

本节只讨论在平面截口处的二次曲面拼接问题, 所讨论方法可以推广到一般情形.

首先, 假定截平面与二次曲面交于不可约二次曲线, 此时称为完全交. 对于实际问题, 这种假设是必要的, 也是自然的.

定理 1.3 *设二次曲面 $S(g)$ 与平面 $S(h)$ 交于不可约二次曲线时, 则对任何与 $S(g)$ 在平面 $S(h)$ 处相交的代数曲面 $S(f)$, 满足条件*

$$f \in \langle g, h \rangle$$

并且有表达式

$$f = ug + ah, \tag{1.8}$$

其中, u, a 为多项式, 且满足条件:

$$\mathrm{tdeg}(u) \leqslant \mathrm{tdeg}(f) - 2, \tag{1.9}$$

$$\mathrm{tdeg}(a) \leqslant \mathrm{tdeg}(f) - 1. \tag{1.10}$$

反之, 当 f 满足条件 (1.8), 且 u 在 $S(g,h)$ 上不恒等于 0, 则 $S(f)$ 与 $S(g)$ 于 $S(h)$ 上相等.

代数中, 当条件 (1.8) 满足条件 (1.9) 和条件 (1.10) 时, 通常称生成元 g,h 具有 Groebner 基性质. 注意, g,h 未必是 Groebner 基.

推论 1.1　在定理 1.3 的条件下, 如果 $f^{(k)} \in \langle g, h^k \rangle$, 则有表达式

$$f^{(k)} = ug + bh^k \tag{1.11}$$

并且

$$\mathrm{tdeg}(u) \leqslant \mathrm{tdeg}(f^{(k)}) - 2, \tag{1.12}$$

$$\mathrm{tdeg}(a) \leqslant \mathrm{tdeg}(f^{(k)}) - k. \tag{1.13}$$

亦即 g, h^k 具有 Groebner 基性质.

定理 1.4　在 $S(g)$ 与 $S(f)$ 有完全交的假定下, 若 $S(f)$ 与 $S(g)$ 在 $S(h)$ 上 C^k 拼接, 则 f 具有表达式

$$f = ug + bh^{k+1}, \tag{1.14}$$

其中, u, b 为多项式, 它们满足条件

$$\mathrm{tdeg}(u) \leqslant \mathrm{tdeg}(f) - \mathrm{tdeg}(g), \tag{1.15}$$

$$\mathrm{tdeg}(a) \leqslant \mathrm{tdeg}(f) - (k+1). \tag{1.16}$$

反之, 形如式 (1.14) 的 f, 如果 u 在 $S(g,h)$ 上不恒等于 0, 则 $S(f)$ 与 $S(g)$ 在 $S(h)$ 上 C^k 光滑拼接.

将上述结论用于多个曲面在平面截口处 C^k 拼接问题, 相应地有:

定理 1.5　设二次曲面 $S(g_i)$ 与截平面 $S(h_i)$ 交于不可约二次曲线, $i = 1, 2, \cdots, n$. 若存在多项式 f, 使 $S(f)$ 分别于 $S(h_i)$ 处与 $S(g_i)$ 实现 C^k 拼接, 则

$$f \in \langle g_1, h_1^{k+1} \rangle \cap \langle g_2, h_2^{k+1} \rangle \cap \cdots \cap \langle g_n, h_n^{k+1} \rangle. \tag{1.17}$$

并且 f 有表达式

$$f = u_i g_i + a_i h_i^{k+1} \quad (i = 1, 2, \cdots, n), \tag{1.18}$$

其中

$$\mathrm{tdeg}(u_i) \leqslant \mathrm{tdeg}(f) - 2, \tag{1.19}$$

$$\mathrm{tdeg}(a_i) \leqslant \mathrm{tdeg}(f) - (k+1). \tag{1.20}$$

反之, 若存在形如式 (1.18) 的 f, 满足 u_i 在 $S(g_i, h_i)$ 上不恒等于 0, 则 $S(f)$ 分别与 $S(g_i)$ 在 $S(h_i)$ 上 C^k 光滑拼接.

注 根据理想论

$$\prod_{i=1}^{n} \langle g_i, h_i^{k+1} \rangle \subset \bigcap_{i=1}^{n} \langle g_i, h_i^{k+1} \rangle. \tag{1.21}$$

因此, 若取 $f \in \prod_{i=1}^{n} \langle g_i, h_i^{k+1} \rangle$, 则其满足式 (1.18), 而前述理想积的生成元可由 $g_i, h_i^{k+1} (i = 1, 2, \cdots, n)$ 的所有可能乘积给出, 然后利用它们的组合即得到 f 的一般表达式. 在 $\mathrm{tdeg}(g_i) = 2, \mathrm{tdeg}(h_i) = 1$ 的情形, 其次数可达 $2^n(k+1)^n$, 显然无实用价值. 实际问题要求求出最低次数拼接曲面, 这归结为计算理想交 $\bigcap_{i=1}^{n} \langle g_i, h_i^{k+1} \rangle$ 的 Groebner 基, 由于计算复杂度过高, 难以实现, 需另辟蹊径. 定理 1.5 提供了另一种解决方案.

根据定理 1.5, 对给定的 g_i, h_i, r 次拼接多项式 f 的存在性, 等价于方程组

$$u_1 g_1 + b_1 h_1^{k+1} = u_2 g_2 + b_2 h_2^{k+1} = \cdots = u_n g_n + b_n h_n^{k+1} \tag{1.22}$$

有满足条件

$$\mathrm{tdeg}(u_i) \leqslant r - 2, \quad \mathrm{tdeg}(a_i) \leqslant r - (k+1) \tag{1.23}$$

的 u_i 和 b_i 存在, 并且 $u_i \notin \langle g_i, h_i \rangle$. 将 g_i, h_i 以及 u_i, b_i 的多项式表达式代入式 (1.22), 得到以 g_i, h_i 的系数为参数, 以 u_i, b_i 的系数为未知数的多项式方程组. 因此, r 次拼接曲面的存在性问题归结为当 g_i, h_i 的系数满足什么条件时, 相应方程组有非零解存在. 这个条件就是解的存在条件.

更让人感兴趣的问题是, 对给定的二次曲面 $S(g_1), S(g_2), \cdots, S(g_n)$, 求截平面 $S(h_1)$, $S(h_2)$, $\cdots$, $S(h_n)$, 使之存在最低次数 (例如, $n+1$ 次) 光滑拼接曲面的条件及拼接曲面表达式. 据式 (1.22), u_i, b_i 的系数个数为 $2n\mathrm{C}_{n+2}^3$, 而由式 (1.22) 导出的方程式个数为 $(n-1)\mathrm{C}_{n+4}^3$, g_i, h_i 的系数总和为 $14n$. 综上所述, 这一问题最终归结为研究 $14n$ 个参数 (即 g_i, h_i 的系数) 满足什么条件时, 由式 (1.22) 导出的 $2n\mathrm{C}_{n+2}^3$ 个未知数, $(n-1)\mathrm{C}_{n+4}^3$ 个方程构成的方程组有非零解, 并且当解存在时, 给出其具体表述, 从而求出 f. 即便是 $n=3$ 的情形, 解这个问题也颇为困难, 而随着 n 的增大, 这一问题用现有的计算方法是无法解决的.

本书给出了解上述问题的一种构造性方法, 使得能够利用已有的两个二次曲面拼接的成果, 求出多个二次曲面的光滑拼接曲面. 首先得到在控制曲面存在的条件下,C^1 拼接曲面存在的充要条件, 再利用任意两个或相邻三个二次曲面存在 C^1 拼接曲面的存在性推断多个情形拼接曲面的存在性, 并构造拼接曲面的理论和算法. 此外, 还分别就截面的不同分布给出了由两个二次曲面 C^0 拼接曲面存在条件推断多个二次曲面的 C^0 拼接曲面的条件. 它们是利用二次曲面关于截面的展开式给出的. 本书第 3 章利用前面的结果就三个二次曲面情形求出了 C^0, C^1 拼接曲面的存在条件及拼接曲面表达式. 第 4 章和第 5 章利用代数曲面的拼接理论, 对三角网格上的代数曲面重建问题进行了研究.

第 2 章　多个曲面光滑拼接的理论与算法

2.1 引　　言

设 $S(g_i)$ $(i=1,2,\cdots,n)$ 是 n 个给定的二次曲面,g_i 分别为其定义的多项式. $S(h_i)$ $(i=1,2,\cdots,n)$ 是 n 个互异平面. 当平面 $S(h_i)$ 满足什么条件时, 存在代数曲面 $S(f)$ 沿 $S(g_i,h_i)$ 分别与 $S(g_i)$ 光滑拼接, 这是本章所要研究的基本问题.

直接利用理想 $\langle g_i,h_i^2\rangle$ 的生成元, 容易给出相应理想交的元素. 对 n 个二次曲面, $2n$ 次的拼接曲面是一定存在的, 利用 g_i,h_i 可给出相应表达式. 然而, 由于得到的多项式次数过高, 无实用价值. 人们的兴趣在于构造低次的光滑拼接曲面. 本章研究构造 $n+1$ 次 C^1 拼接曲面的理论及相应算法.

按 Warren(1989) 提出的理论 (定理 1.5) 二次 C^0 拼接 n 个二次曲面的问题等价于, 存在非零常数 λ_i 和一次多项式 a_i $(i=1,2,\cdots,n)$, 使之满足关系式

$$g=\lambda_1g_1+a_1h_1=\lambda_2g_2+a_2h_2=\cdots=\lambda_ng_n+a_nh_n. \tag{2.1}$$

当式 (2.1) 成立时, 二次曲面 $S(g)$ 分别与 $S(g_i)$ 在 $S(g_i,h_i)$ 处 C^0 拼接, 把二次 C^0 拼接曲面称为**控制曲面**.

注意, g_i,h_i 共有 $14n$ 个参数, λ_i,a_i 共有 $5n$ 个未知数. 若将式 (2.1) 展开并比较单项式系数, 得到 $20(n-1)$ 个方程. 此问题可叙述为, 当 $14n$ 个参数满足什么条件时含 $5n$ 个未知数的 $20(n-1)$ 个方程有解. 这个条件就是二次 C^0 拼接的条件.

同理, 求 $n+1$ 次 C^1 拼接曲面, 等价于利用待定系数法根据由关系式

$$f=u_1g_1+b_1h_1^2=u_2g_2+b_2h_2^2=\cdots=u_ng_n+b_nh_n^2 \tag{2.2}$$

导出的 $(n-1)\mathrm{C}_{n+4}^3$ 个方程确定. 注意 $n-1$ 次多项式 u_i, b_i 共有 $2n\mathrm{C}_{n+2}^3$ 个未知数, 这个问题就转化为当 $14n$ 个参数满足什么条件时含 $2n\mathrm{C}_{n+2}^3$ 个未知数的 $(n-1)\mathrm{C}_{n+4}^3$ 个方程有解, 在有解存在的情况下, 若其解还满足 u_i 在 $S(g_i, h_i)$ 上不恒等于 0, 则由多项式 f 定义的 $n+1$ 次曲面 $S(f)$ 分别与 $S(g_i)$ 在 $S(g_i, h_i)$ 处 C^1 光滑拼接.

按上述方法导出的关系式是多项式形式的. 众所周知, 即便是 $n=3$ 的情形, 由于计算量过大, 要解这个问题也颇为困难, 并且随着曲面个数的增加, 相应方程组、参数及未知数的个数以曲面个数的组合数形式增加. 已存的数值或符号算法, 都不可能直接解决它.

雷娜 (2002) 全面地研究了用三次曲面 C^1 拼接两个二次曲面的问题, 特别研究了当控制曲面存在时, 三次 C^1 拼接曲面的存在性问题. 该文特别指出在两个二次曲面的拼接中, 当控制曲面不存在时, 三次 C^1 拼接曲面“几乎”是不存在的. 鉴于此, 本书主要研究当控制曲面存在时, 多个二次曲面 C^1 拼接曲面的存在性.

Wu 和 Zhou(2000) 曾对 n 个二次曲面的 C^1 拼接问题得到下面的结论:

命题 2.1　设二次曲面 $S(g_i)$ 与互异平面 $S(h_i)$ 分别交于不可约二次曲线 $S(g_i, h_i)(i=1,2,\cdots,n)$. 如果控制曲面 g 存在, 则

$$\langle g_1, h_1\rangle \cap \cdots \cap \langle g_n, h_n\rangle = \langle g, h_1h_2\cdots h_n\rangle. \tag{2.3}$$

进一步, 若 $f \in \langle g, h_1h_2\cdots h_n\rangle$, 则存在多项式 u 和 v 使得

$$f = ug + vh_1h_2\cdots h_n, \tag{2.4}$$

其中, $\mathrm{tdeg}(f) = \max\{\mathrm{tdeg}(ug), \mathrm{tdeg}(vh_1h_2\cdots h_n)\}$.

命题 2.2　设二次曲面 $S(g_i)$ 与互异平面 $S(h_i)$ 分别交于不可约二次曲线 $S(g_i, h_i)(i=1,2,\cdots,n)$. 如果存在控制曲面

$$g = \lambda_1 g_1 + a_1 h_1 = \lambda_2 g_2 + a_2 h_2 = \cdots = \lambda_n g_n + a_n h_n,$$

以及实数 $\varepsilon_i, \omega_i \neq 0(i=1,2,\cdots,n)$, 使得

$$\varepsilon_1 h_1 - \omega_1 a_1 = \varepsilon_2 h_2 - \omega_2 a_2 = \cdots = \varepsilon_n h_n - \omega_n a_n, \tag{2.5}$$