高等学校教学用书

数学分析习作课讲义

薛宗慈　曾昭著　邝荣雨　陈平尚　编

北京师范大学出版社

高等学校教学用书

数学分析习作课讲义

下册

薛宗慈 曾昭著 邝荣雨 陈平尚 编

北京师范大学出版社

高等学校教学用书

数学分析习作课讲义

下 册

薛宗慈 曾昭著 邝荣雨 陈平尚 编

*

北京师范大学出版社出版
新华书店总店科技发行所发行
北京通县电子外文印刷厂印刷

开本：787×1092 1/32 印张：9.125 字数：196千
1987年7月第1版 1990年4月第3次印刷
印数：25 001－29 000

ISBN 7－303－00093－3/O·16
定 价：1.65元

内 容 简 介

本书是在北京师范大学数学系数学分析习作课实践的基础上编写的。内容包括多元函数微分学、多元函数积分学、场论、含参变量的积分、三角级数和综合练习等。

本书可作为高等师范院校和师范专科学校数学系师生的参考书或教学参考书。

目　　录

第十二章　多元函数极限论

本章主要内容有两方面。一方面是把数列极限及极限理论由实数域$\boldsymbol{R}^1$推广到n维欧氏空间$\boldsymbol{R}^n$，从而建立多元连续函数在有界闭区域上的整体性质，给多元函数分析学奠定基础。另一方面是把一元函数极限概念推广到多元函数，由此引伸出多元函数关于点的极限（即全面极限或多重极限）与关于坐标的极限（即累次极限），二者互相发挥，交织为许多精湛的结果，构成多元微积分理论与计算的基础。

本章习作课主要内容：多元函数极限概念及求极限方法以及多元函数全面极限与累次极限的关系。

本章习作课训练要点：

1．要求学生理解并掌握多元函数极限概念，初步学习多元函数极限的“ε—δ”方法及一些常用的求极限方法。

2．要求学生理解全面极限与累次极限的关系，从而加深对多元函数极限过程复杂性的了解，初步体会由单元函数微积分到多元函数微积分的突变。

本章习作课基本内容可以安排下面几个题目。

§1　极限概念

以二元函数为例来说明多元函数极限概念的要点。最简

单的一种极限定义如下：

定义 1 设二元函数 $f(x,y)$ 定义在点 $\hat{x_0}=(x_0, y_0)$ 的空心邻域（即 f 在点 $\hat{x_0}$ 的某个邻域中，可能除掉 $\hat{x_0}$ 本身外处处有定义）中。如果存在常数 A，对于任给的 $\varepsilon>0$，存在 $\delta>0$，当 $0<|\hat{x}-\hat{x_0}|=\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}<\delta$ 时，有 $|f(x,y)-A|<\varepsilon$，则称 A 为 f 在点 $\hat{x_0}=(x_0,y_0)$ 的极限，记作

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x,y)=A.$$

如果用符号 $\mathring{U}(\hat{x_0},\delta)=\{\hat{x}=(x,y)\mid 0<|\hat{x}-\hat{x_0}|=\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}<\delta\}$ 表示以点 $\hat{x_0}$ 为中心以 $\delta>0$ 为半径的空心邻域，则上述定义可改述如下：

$\forall\varepsilon>0$，$\exists\mathring{U}(\hat{x_0},\delta)$ $\quad\forall x\in\mathring{U}(\hat{x_0},\delta)$，有 $|f(\hat{x})-A|<\varepsilon$，这是以点 $\hat{x_0}$ 的“圆邻域”叙述的极限定义的，还可以用“方邻域”的形式叙述，即

定义 1′ 设二元函数 $f(x,y)$ 定义在点 $\hat{x_0}=(x_0,y_0)$ 的空心邻域中。如果存在数 A，对任给的 $\varepsilon>0$，存在 $\delta>0$，当 $|x-x_0|<\delta$，$|y-y_0|<\delta$，且 $(x, y)\neq(x_0, y_0)$ 时，有 $|f(x,y)-A|<\varepsilon$ 成立，则称 A 为 f 在点 $\hat{x_0}=(x_0,y_0)$ 的极限。

容易证明上述两个定义是等价的。

对于上述定义，特别要注意两点：

(1) 上述定义只适合在点 $\hat{x_0}$ 的某个空心邻域中处处有定义的函数，因此它能鉴定的函数的范围是比较狭窄的。请看

例 1 设 $f(x,y)=\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$.

(i) 如果 f 的定义域为 $D_1=\mathbf{R}^2\setminus\{(0,0)\}$，问：当 $(x,y)\to(0,0)$ 时，f 的极限存在吗？

(ii) 如果 f 的定义域为 $D_2=\{(x,y)\,|\,|y|<x^2\}$，问：当 $(x,y)\to(0,0)$ 时，f 的极限存在吗？

对于（i），只要取 $y=kx$，即知 f 在点 $(0,0)$ 的极限是不存在的。对于（ii），由于 f 在点 $(0,0)$ 任何空心邻域中都不是处处有定义的，因而定义 1 对它无能为力。

教师可抓住此事对学生进行函数概念的再教育，因为学生总是只注意函数的"表达式"而不注意它的定义域，殊不知二者不能分离。例 1 中的两个问题是讨论两个函数在同一点的极限问题。

（2） 要特别注意"方邻域"的条件"$|x-x_0|<\delta$, $|y-y_0|<\delta$, 且 $(x,y)\neq(x_0,y_0)$"并不等价于条件"$0<|x-x_0|<\delta$, $0<|y-y_0|<\delta$"，后者条件太强了，它要求 $x\neq x_0$ 且 $y\neq y_0$，而极限定义仅要求 $(x,y)\neq(x_0,y_0)$，可以允许 $x=x_0$ 或 $y=y_0$。可用下面两例来检验学生对这个概念的理解程度。

例 2 用下面的方法证明极限 $\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}\dfrac{xy}{|x|+|y|}=0$ 行不行？

因为 $2\sqrt{|xy|}\leqslant|x|+|y|$，所以

$$\frac{|xy|}{|x|+|y|}\leqslant\frac{|xy|}{2\sqrt{|xy|}}=\frac{1}{2}\sqrt{|xy|}\leqslant\frac{1}{4}(|x|+|y|)$$

$$\leqslant\frac{1}{2}\sqrt{x^2+y^2}$$

于是，$\forall\varepsilon>0$，取 $\delta=2\varepsilon$，则当 $0<\sqrt{x^2+y^2}<\delta$ 时，有 $\left|\dfrac{xy}{|x|+|y|}-0\right|<\varepsilon$，故 $\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}\dfrac{xy}{|x|+|y|}=0$。证毕

上面证法有错误，因为在不等式放大过程中可能有分母为零的情况出现。请同学把正确的证明过程写出来。

例 3 有人企图用下面方法证明命题："若 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x,y)=\varphi(y)$，且 $\lim\limits_{y\to y_0}\lim\limits_{x\to x_0}f(x,y)=l$，则 $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\y\to y_0}}f(x,y)=l$"。

由 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x,y)=\varphi(y)\Rightarrow\forall\,y$，$\forall\varepsilon>0$，$\exists\delta_1>0$，$\forall x$：$0<|x-x_0|<\delta_1$，有 $|f(x,y)-\varphi(y)|<\varepsilon/2$，

由 $\lim\limits_{y\to y_0}\lim\limits_{x\to x_0}f(x,y)=l\Rightarrow\forall\varepsilon>0,\exists\delta_2>0,\forall y$：$0<|y-y_0|<\delta_2$。有 $|\varphi(y)-l|<\varepsilon/2$。

取 $\delta=\min\{\delta_1,\delta_2\}>0$，则

$\forall(x,y)$：$0<|x-x_0|<\delta$，$0<|y-y_0|<\delta$，有

$$|f(x,y)-l|\leqslant|f(x,y)-\varphi(y)|+|\varphi(y)-l|<\varepsilon$$

故 $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\y\to y_0}}f(x,y)=l$。

你认为上述命题有问题还是证明方法有问题？如果你认为命题正确，请考察函数

$f(x,y)=\dfrac{x-y}{x+y}$ 在点（0,0）的极限；如果你认为证明方法有问题，请找出错误。

此题一方面检验学生对极限定义中条件"$|x-x_0|<\delta$，$|y-y_0|<\delta$ 且 $(x,y)\neq(x_0,y_0)$"的理解程度，另一方面检

验学生对极限定义中 ε, δ 与点 (x,y) 的关系的理解程度，这是极限概念的精髓。

为了对更多的函数也能考虑极限问题，需要把定义 1 推广如下

定义 2 设二元函数 $f(x,y)$ 定义在 $D\subset \mathbf{R}^2$ 上，$\hat{x}_0=(x_0, y_0)$ 是 D 的聚点。如果存在数 A，对任给的 $\varepsilon>0$，存在 $\delta>0$，$\forall \hat{x}=(x,y)\in \mathring{U}(\hat{x}_0,\delta)\cap D$，有 $|f(x,y)-A|<\varepsilon$，则称 A 为 f 在点 $\hat{x}_0$ 的极限，记作

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x,y)=A.$$

按照这个定义，就可以考虑例 1 (ii) 中函数 f 在点 $(0,0)$ 的极限了，注意到不等式 $|f(x,y)-1|\leqslant 2x^2$，即知 f 在点 $(0,0)$ 的极限是 1。

由极限定义容易相信（请看下面练习），如果要证明函数 f 在点 $\hat{x}_0=(x_0,y_0)$ 处极限不存在，只要选取不同路径 L_1 与 L_2，使得点 $\hat{x}$ 分别沿 L_1、L_2 趋于 $\hat{x}_0$ 时极限不相同，或者选取一条路径 L，使得 $\hat{x}$ 沿 L 趋于 $\hat{x}_0$ 时极限不存在。

例 4 设函数 $f(x,y)=\dfrac{x^2y^2}{x^3+y^3}$ 定义在 $D=\mathbf{R}^2\setminus\{(0,0)\}$ 上。证明：当动点 (x,y) 沿任何一条形如 $y=kx^2$ 的曲线趋于点 $(0,0)$ 时极限存在，但函数 f 在点 $(0,0)$ 的极限不存在。

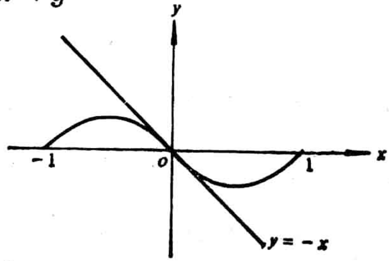

图 1

易知，当动点 (x,y) 沿任何一条形如 $y=kx^2$ 的曲线

趋于点（0,0）时，$f(x,kx^2)=\dfrac{k^2x^4}{x^3+k^3x^6}$ 的极限是0。如何选取经过点（0,0）的特殊路径 L，使得动点 (x,y) 沿 L 趋于（0,0）时 f 的极限不存在呢？

由函数 $f(x,y)=\dfrac{x^2y^2}{x^3+y^3}$ 的构造看出它在直线 $y=-x$ 附近出现奇异情况，因此选择的路径 L 应该紧贴着直线 $y=-x$，当动点愈靠近原点时，L 愈逼近直线 $y=-x$，最自然的想法可以选取一条经过原点的光滑曲线 $y=\varphi(x)$ 使得它在原点的切线正好是 $y=-x$。经过具体计算可取 $y=x(x^2-1)^{1/3}$ 作为路径 L，此时当动点沿此路径逼近原点时，函数 f 的值趋于∞；而当动点沿形如 $y=kx^2$ 的路径趋于原点时，函数 f 的值趋于0，故 f 在原点的极限不存在。

练习1　（1）　若 $f\left(x+y,\dfrac{y}{x}\right)=x^2-y^2$，求 $f(x,y)$ $\left(答：f(x,y)=x^2\dfrac{1-y}{1+y}\right)$

（2）　若 $f(x,y)=\dfrac{2xy}{x^2+y^2}$，求证：$f\left(1,\dfrac{y}{x}\right)=f(x,y)$。

（3）　设 $F(x,y)=\sqrt{y}+f(\sqrt{x}-1)$ 且 $F(x,1)=x$，$(y\geqslant0)$ 求 $f(x)$，$F(x,y)$。　　（答：$f(x)=x(x+2)$，$F(x,y)=x-1+\sqrt{y}$）。

练习2　设 $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x,y)=A$ 且点 $(v_1,v_2)\neq(0,0)$ 求证：$\lim\limits_{t\to0} f(x_0+tv_1,y_0+tv_2)=A$。

练习3　设 $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x,y)=A$，$y=\varphi(x)$ 在 x_0 连续且

$y_0=\varphi(x_0)$。求证：$\lim\limits_{x\to x_0} f(x,\varphi(x))=A$。

练习4 研究下列函数在指定点 (x_0,y_0) 的极限的存在性。

(1) $f_1(x,y)=\dfrac{xy}{|x|+|y|}$，$f_2(x,y)=\dfrac{xy}{x+y}$ 在点 $(0,0)$；

(2) $f(x,y)=\dfrac{x^3+y^3}{x^2+y}$ 在点 $(0,0)$。

(答：(1) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} f_1(x,y)=0$，取曲线 $y=x(x^2-1)$ 即知 f_2 在点 $(0,0)$ 的极限不存在；(2) 取曲线 $y=x^2(x^2-1)$ 即知 f 在点 $(0,0)$ 的极限不存在)

练习5 设 $f(x,y)=\dfrac{1}{xy}$。

(1) 若 f 定义在 $D_1=\left\{(x,y)\,\middle|\,\dfrac{x}{k}\leqslant y\leqslant kx, k>1\right\}$ 上，问：极限 $\lim\limits_{(x,y)\to\infty}\dfrac{1}{xy}$ 存在吗？

(2) 若 f 定义在 $D_2=\{(x,y)|\,x>0,\ y>0\}$ 上，问：极限 $\lim\limits_{(x,y)\to\infty}\dfrac{1}{xy}$ 存在吗？

(提示：极限 $\lim\limits_{(x,y)\to\infty} f(x,y)=A$ 指的是：$\forall\varepsilon>0$，$\exists\Delta>0$，$\forall(x,y)$：$\sqrt{x^2+y^2}>\Delta$，有 $|f(x,y)-A|<\varepsilon$。关于 (1)，令 $\theta_1=\operatorname{arc\,tg}\dfrac{1}{k}>0$，$\theta_2=\operatorname{arctg}k>0$。再设 $x=r\cos\theta$，$y=r\sin\theta$。易知 $\lim\limits_{\substack{(x,y)\to\infty\\(x,y)\in D_1}}\dfrac{1}{xy}=0$。关于 (2)，易知 $\lim\limits_{\substack{(x,y)\to\infty\\(x,y)\in D_2}}\dfrac{1}{xy}$

不存在）

§2 求极限方法及全面极限与累次极限的关系

证明极限最基本的方法是“ε—δ”方法，可用“圆邻域”，也可用“方邻域”

例 1 用 ε—δ 方法证明下列极限

(1) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \dfrac{x^4+y^4}{x^2+y^2}=0$；　　(2) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \sqrt[3]{xy}=0$；

(3) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \dfrac{\sin(x^3+y^3)}{x^2+y^2}=0$。

证　(1) 考察 $\left|\dfrac{x^4+y^4}{x^2+y^2}-0\right|\leqslant\dfrac{(x^2+y^2)^2}{x^2+y^2}=x^2+y^2$，然后用“圆邻域”即可。

(2) $\forall\varepsilon>0$，取 $\delta=\varepsilon^{3/2}$，然后用“方邻域”即可。

(3) 考察 $\left|\dfrac{\sin(x^3+y^3)}{x^2+y^2}\right|\leqslant\dfrac{|x^3+y^3|}{x^2+y^2}$

$$\leqslant(|x|+|y|)\left|1-\frac{xy}{x^2+y^2}\right|\leqslant\frac{3}{2}(|x|+|y|),$$

然后用“圆邻域”即可。

求极限方法中有两种方法比较重要，一种是换元法，常见的是极坐标换元，即设 $x=r\cos\theta$，$y=r\sin\theta$。一种是把多元函数求极限问题化为单元函数求极限问题。

例 2 求下列函数的极限

(1) $I=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}$；

(2) $I=\lim\limits_{\substack{x\to+\infty\\ y\to+\infty}}(x^2+y^2)e^{-(x+y)}$,

(3) $I=\lim\limits_{\substack{x\to+\infty\\ y\to+\infty}}\left(\dfrac{xy}{x^2+y^2}\right)^{x^2}$.

解 (1) 设$\begin{cases}x=r\cos\theta\\ y=r\sin\theta,\end{cases}$ 有 $r=\sqrt{x^2+y^2}$,

所以当 $(x,y)\to(0,0)$ 时 $r\to0$，又 $f(r\cos\theta, r\sin\theta)=r\sin\theta\cos\theta$。且 $\forall\theta$，有 $|\sin\theta\cos\theta|\leqslant1$，所以 $\lim\limits_{r\to0}f(r\cos\theta, r\sin\theta)=0$。故 $I=0$。

用极坐标换元时，特别要注意幅角θ不是常数，也就是说，**即使证明了动点沿一切射线趋于定点时，函数有共同极限，也**不能表明此函数在该点存在极限。例如 $f(x,y)=\dfrac{x^2y}{x^2+y^2}$ 在原点 $(0,0)$ 就是此种情况。

(2)
$$\begin{aligned}I&=\lim_{\substack{x\to+\infty\\ y\to+\infty}}[(x^2e^{-x})e^{-y}+(y^2e^{-y})e^{-x}]\\&=(\lim_{x\to+\infty}x^2e^{-x})(\lim_{y\to+\infty}e^{-y})\\&\quad+(\lim_{x\to+\infty}e^{-x})(\lim_{y\to+\infty}y^2e^{-y})=0\end{aligned}$$

此题运用了将多元函数极限化为单元函数极限的技巧。

(3) 由 $\dfrac{|xy|}{x^2+y^2}\leqslant\dfrac{1}{2}$ 知 $I=0$。

例 3 记 $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}}f(x,y)=l$，$\lim\limits_{y\to y_0}\lim\limits_{x\to x_0}f(x,y)=l_{12}$，$\lim\limits_{x\to x_0}\lim\limits_{y\to y_0}f(x,y)=l_{21}$，研究下列二元函数 f 在点 $(0,0)$ 处 l，l_{21}，l_{12} 的存在性及其关系。

(1) $f(x,y)=(x+y)\sin\dfrac{1}{x}\sin\dfrac{1}{y}$ （答：l 存在，

$l_{12}=l_{21}$）

（2） $f(x,y)=\dfrac{xy-x+y}{xy+x+y}$ （答：l不存在，$l_{12}\neq l_{21}$）

（3） $f(x,y)=\dfrac{2xy}{x^2+y^2}$ （答：l不存在，$l_{12}=l_{21}$）

练习 1 求下列极限：

（1） $I=\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}(x+y)\sin\dfrac{1}{x}\sin\dfrac{1}{y}$ （答：$I=0$）

（2） $I=\lim\limits_{\substack{x\to\infty\\y\to\infty}}\dfrac{1+x^2+y^2}{x^2+y^2}$ （答：$I=1$）

（3） $I=\lim\limits_{\substack{x\to\infty\\y\to a}}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{\frac{x^2}{x+y}}$ （答：$I=e$）

（4） $I=\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}x^2y^2\ln(x^2+y^2)$ （答：$I=0$）

练习 2 求 $I=\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}f(x,y)$ 其中

$$f(x,y)=\begin{cases}x+y, & (x,y)\text{为有理点,}\\ 0, & (x,y)\text{为其它点。}\end{cases}$$ （答：$I=0$）

练习 3 求下列极限：

（1） $I=\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}\dfrac{\sin xy}{\sin x\sin y}$ （答：$I=1$）

（2） $I=\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}\dfrac{y\sin(xy(x+1))}{x^2+y^2}$ （答：$I=0$）

（3） $I=\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}\dfrac{\sqrt{(1+4x^2)(1+6y^2)}-1}{2x^2+3y^2}$ （答：$I=1$）

练习 4 记 $\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}} f(x,y)=l$，$\lim\limits_{y\to0}\lim\limits_{x\to0} f(x,y)=l_{12}$，$\lim\limits_{x\to0}\lim\limits_{y\to y_0} f(x,y)=l_{21}$，研究下列函数在点 $(0,0)$ 处 l，l_{12}，l_{21} 的存在性及其关系。

(1) $$f(x,y)=\begin{cases} x\sin\dfrac{1}{y}+y\sin\dfrac{1}{x}, & xy\neq0,\\ 0, & xy=0. \end{cases}$$

（答：l 存在，l_{12} 与 l_{21} 不存在）

(2) $$f(x,y)=\begin{cases} \dfrac{xy}{x^2+y^2}+y\sin\dfrac{1}{x}, & x\neq0,\\ 0, & x=0. \end{cases}$$

（答：l 不存在，l_{12} 不存在，l_{21} 存在）

§3 函数的连续性及杂题

研究函数在何处连续、在何处间断、在何处一致连续是最基本的问题。

例 1 研究下列函数的连续性：

(1) $f(x,y)=[x+y]$ （答：间断线是 $x+y=k$，$k=0,\pm1,\pm2,\cdots\cdots$）

(2) $$f(x,y)=\begin{cases} 0, & x \text{ 为无理数},\\ y, & x \text{ 为有理数}. \end{cases}$$ （答：f 仅在 y 轴上连续）。

例 2 设 $f(x,y)=\dfrac{1-\cos xy}{y^2}$，$y\neq0$，问：能否在直线 $y=0$ 上定义 f 的值，使得 f 在全平面上连续？