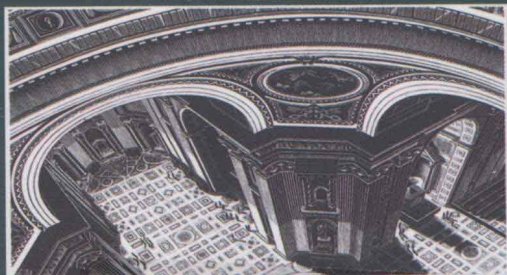




俄罗斯数学精品译丛

5000 Geometry Exercises
and Solutions from Russia

来自俄罗斯的 5000道几何习题及解答



- [俄] 沙列金 戈尔金 著
- 阮可之 译



哈尔滨工业大学出版社
HARBIN INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

图书在版编目(CIP)数据

来自俄罗斯的 5000 道几何习题及解答/(俄罗斯)沙列金,(俄罗斯)戈尔金著;阮可之译.——哈尔滨:哈尔滨工业大学出版社,2011.3
ISBN 978-7-5603-3250-5

I. ①来… II. ①沙… ②戈… III. ①平面几何-问题解答
IV. O123.1-442

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2011)第 047844 号

© Автор И Ф Щарыгии и Р К Гордин

Сборник задач по геометрии 5000 задач с ответами

本作品中文专有出版权由中华版权代理中心代理取得,由哈尔滨工业大学出版社独家出版。

黑版贸审字 08-2010-027 号

策划编辑 刘培杰 甄森森

责任编辑 尹 凡

出版发行 哈尔滨工业大学出版社

社 址 哈尔滨市南岗区复华四道街 10 号 邮编 150006

传 真 0451-86414749

网 址 <http://hitpress.hit.edu.cn>

印 刷 哈尔滨市石桥印务有限公司

开 本 787mm×960mm 1/16 印张 29.5 字数 497 千字

版 次 2011 年 3 月第 1 版 2011 年 3 月第 1 次印刷

书 号 ISBN 978-7-5603-3250-5

定 价 58.00 元

(如因印装质量问题影响阅读,我社负责调换)



序

言

本书收集了 5 000 道几何题,其中有 3 500 多道平面几何题和大约 1 500 道立体几何题.也许,这是创记录的,我们不知道,现在在什么地方还有更全的几何问题集.当然,出这本书不是为了在题目的数量上创记录,而是本书的出版有多重目的:首先,这本书选编了足够全的教学问题,题目按专题分类,教师可以找到任何专题和用于任何教学目的的习题,不管他(她)的经验和资历如何.

大家知道,近十几年来由于改革,出现了各类水平不同的且可供选择的几何教科书.这些教科书在内容上,包括叙述的连续性上区别很大,由此可以想到,这些教科书需要各种体系的教学习题.我们不是为了任何特定的一种(比如说,尽量不是为了任何特定的一种)教科书提供习题,我们把自己充当某种“设计师”,编写出系统的习题,它们能够适用于任何一种教科书,不管是现在已有的,还是将来准备出版的教科书.

在教学习题中,有一些带符号“ $\circ$ ”的题目,这些是关键题,对它们要特别关注,对它们不仅要会解,而且要懂得怎样会应用

在题目中包括的事实或者解题所用的方法.

除了教学习题外,本书还含有大学入学试题和竞赛试题.

所收集的大学入学试题是有代表性的,并且包含了各种水平的试题:从最简单的到莫斯科大学数学力学系的入学试题,所有或者几乎所有的这一部分试题曾经提供给不同大学和不同时期的入学考试,我们没有指明它们的原始出处.我们希望,有经验的教师对于这些题目自己能够找出“层次”,好在这个部分的题目和其他部分一样,是从易到难编排的,这就为教师分辨题目的难易工作减轻了负担,当然,对于题目难易程度的判别——这是与经验和鉴赏力有关的事情——也许,其他的作者会按另一种方式来编排题目.

在奥林匹克试题这一部分中,题目实际上不是特别难的,所以可以用本书来为数学竞赛,特别是学校的,地区的,城市的竞赛来作准备.此外,只有相当强的和准备比较充分的学生才能够独立解答竞赛试题,最好由有经验和资历的教师来指导数学竞赛的准备工作.他们不仅有解具体奥林匹克试题独特的解题方法,而且熟悉相当大数量的奥林匹克试题,因而收集在本书中的相当数量的问题——这是他们的“老相识”.

本书为谁而写?答案相当显然:中学的学生和数学教师,家庭补习老师,为中学生奥林匹克作指导和准备工作的专家.当然我们不排除,甚至更希望,本书能够引起希望自己的孩子得到好的几何方面训练的学生家长的兴趣,我们深信,对于所有的读者,这本书是有益的,并且是非常有益的.本书能成为他们在将来多年工作中的有力帮手.



平面几何	(1)
第一章 教学习题	(1)
1. 基本题	(1)
2. 三角形全等的判定, 平行直线的判定和性质, 三角形的内角和	(5)
3. 圆, 垂直于弦的直径, 圆的著名性质, 圆的切线, 相切的圆, 圆外切四边形	(17)
4. 平行四边形, 梯形, 三角形和梯形的中位线, 法来斯定理	(31)
5. 与圆相关的角, 圆内接四边形, 辅助圆	(45)
6. 勾股定理, 直角三角形中的三角关系式	(60)
7. 相似三角形	(85)
8. 圆内成比例的线段	(105)
9. 三角形中的度量关系	(114)

10. 面积,面积法	(140)
11. 坐标,向量	(191)
12. 几何变换	(198)
13. 点的轨迹和作图题	(211)
14. 几何不等式和极大极小问题	(223)
第二章 大学入学试题	(235)
第三章 奥林匹克试题	(271)
立体几何	(287)
第一章 教学习题	(287)
1. 直线和平面的相互位置,空间中的平行	(287)
2. 平面的垂线,三垂线定理	(297)
3. 直线与平面所成的角,平面之间所成的角	(307)
4. 正棱锥的要素	(317)
5. 球,球的切平面,相切的球,内切球和外接球	(330)
6. 旋转体	(341)
7. 体积,表面积	(349)
8. 空间向量,坐标法	(369)
9. 几何不等式和极大极小问题	(374)
第二章 大学入学试题	(384)
附录	(403)
中学几何基础知识	(403)
平面几何	(403)
立体几何	(410)
答案	(418)
平面几何	(418)
立体几何	(442)

平面几何

第一章 教学习题

1. 基本题

1°. 在直线上相继分布一组点 A, B, C, D, E 和 F , 并且 $AB = BC = CD = DE = EF$. 求比例 $AD: DF, AC: AF, BD: CF$.

2. 在直线上相继取点 A, B, C 和 D , 并且 $AB = BC = CD = 6$. 求线段 AB 和 CD 中点之间的距离.

3°. 点 K 是等于 12 的线段 AB 上的点, K 离 A 比离 B 近 5, 求 AK 和 BK .

4. 点 M 在线段 AN 上, 而点 N 在线段 BM 上. 已知 $AB = 18$ 和 $AM: MN: NB = 1: 2: 3$. 求 MN .

5. 在一条直线上取点 A, O 和 B , 点 A_1 和 B_1 关于点 O 分别与点 A 和 B 对称, 如果 $AB_1 = 2$, 求 A_1B .

6°. 两个互补的角中, 一个比另一个大 30° , 求这两角.

7°. 两个互补的角中, 一个是另一个的 $\frac{1}{3}$, 求这两角.

8°. 两条直线相交形成的 4 个角中, 一个等于 41° , 其余 3 个角等于多少?

9. 在一条直线上取 3 个点 A, B 和 C , 并且 $AB = 3, BC = 5$, 求 AC 等于多少?

10. 点 B 在等于 5 的线段 AC 上, 求线段 AB 和 BC 中点之间的距离.

11. 沿着直线道路有两个距离为 50 m 的木房 A 和 B , 应该在道路的哪一点上掘口井, 方能使得井到两个木房的距离之和为最小.

12°. 在一条直线上给定点 A, B 和 C . 已知 $AB = 5$, 而线段 AC 比 BC 长 1, 求 AC 和 BC .

13. 在一条直线上给定点 A, B 和 C . 已知 $AB = 5$, 而线段 AC 是 BC 的 1.5 倍. 求线段 AC 和 BC .

14. 点 M, A 和 B 位于同一条直线上, 并且线段 AM 是线段 BM 的 2 倍. 如果 $AB = 6$, 求 AM .

15. 点 M 为线段 AB 的中点, 而点 N 为线段 MB 的中点, 求比例 $AM:MN$, $BN:AM$ 和 $MN:AB$.

16. 在一条直线上取三点 A, B 和 C , 并且 $AB = 1, BC = 3$, AC 能够等于多少? 请指出所有的可能性.

17°. 一个直角被两条射线分成三个角, 其中一个比另一个大 10° 并比第三个小 10° . 求这些角.

18. 点 A, B, C 相继分布在一条直线上, 且 $AB:BC = 3:4$, 求比例 $AB:AC$ 和 $BC:AC$.

19°. 沿着直线道路以 50 m 的间距有三个木屋 A, B 和 C , 应该在道路的哪一点上掘口井, 才能使得井到三个木屋的距离之和为最小.

20°. 在直尺上有三个刻度: 0 cm, 2 cm 和 5 cm, 怎样借助于此直尺截取长为 6 cm 的线段?

21. 三角板的一个角是 70° , 怎样借助于它作 40° 的角?

22. 三角板的一个角是 40° , 怎样借助于它作角等于:

(1) 80° ; (2) 160° ; (3) 20° ?

23°. 点 A, B, C 在一条直线上, 并且 $AC:BC = 2:5$. 求比例 $AC:AB$ 和 $BC:AB$.

24. 光的射线从点 M 出发, 在直线 AB 上作镜像反射后击中点 N (图 1), 试证明: $\angle MCN$ 的平分线垂直于直线 AB (入射角等于反射角).

25. 在一条直线上取四点 A, B, C 和 D , 并且 $AB = 1, BC = 2, CD = 4$, AD 能够等于多少?

26°. 木尺上有三个刻度: 0 cm, 7 cm 和 11 cm, 怎样借助于它截取线段长为:

(1) 8 cm; (2) 5 cm?

27°. 点 C 为线段 AB 的中点, 在线段 AC 和 BC 上取点 M 和 N , 并且 $AM:MC = CN:NB$. 试证明: 线段 MN 等于线段 AB 的一半.

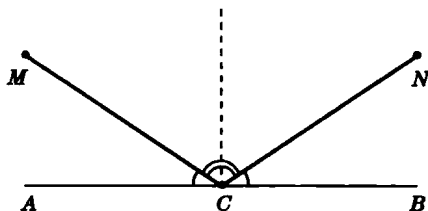


图 1

28. 点 M 位于 $\angle AOB$ 的内部, OC 为该角的平分线. 试证明: $\angle MOC$ 等于 $\angle AOM$ 和 $\angle BOM$ 之差的一半的绝对值.

29. 点 A, B, C 在一条直线上, 且 $AC:BC = m:n$ (m 和 n 为自然数). 求比例 $AC:AB$ 和 $BC:AB$.

30. 点 B 把线段 AC 分成比 $AB:BC = 2:1$, 点 D 把线段 AB 分成比 $AD:DB = 3:2$, 点 D 按何种比分割线段 AC ?

31. 点 M 位于 $\angle AOB$ 外部, OC 为这个角的平分线. 试证明: $\angle MOC$ 等于 $\angle AOM$ 与 $\angle BOM$ 和的一半.

32. 由一张纸上的一点所作的四条射线, 把平面分成四个角, 然后沿着这些角的平分线把纸片剖成四部分(它们亦是角). 试证明: 其中两个角之和为 180° , 并且另两个角之和亦是 180° .

33. 分针一分钟内转过几度? 而时针呢?

34. 点 C, E 和 D 分别分线段 AB 成比 $1:2, 1:3$ 和 $1:4$ (从点 A 开始算起). 点 E 把线段 DC 分成何种比例?

35. 相关直线 a 和 b 所构成的 $\angle C = 15^\circ$, 直线 a_1 和直线 a 关于直线 b 对称, 而直线 b_1 和直线 b 关于直线 a 对称, 求直线 a_1 和 b_1 所构成的角.

36. 给定点 A 和 B , 直线 AB 上的点怎样分布, 如果它们离点 A 的距离:

(1) 是离点 B 的距离的 2 倍;

(2) 是离点 B 的距离的 $\frac{1}{3}$.

37. 通过平面上的一点作 10 条直线后, 平面被这些直线分成诸角, 试证明: 这些角中至少有一个小于 20° .

38. 在 3 点零 5 分, 分针和时针成什么角度?

39. 在平面上从点 O 出发, 作三条射线 OA, OB, OC , 已知 $\angle AOB = 91^\circ$, $\angle BOC = 90^\circ$, 求 $\angle AOC$.

40. 某农村中,在直线道路上以 50 m 的间距有 4 个木房 A, B, C 和 D ,应该在路的哪一点掘一口井,才能使并到各木房的距离之和为最小.

41. 已知点 A 和 B ,在直线 AB 上,离点 B 距离比离点 A 距离远的点分布在何处?

42. 有一块一个角为 13° 的三角板. 怎样借助它来作 1° 的角?

43. 在正午 12 点整,时针和分针重合,下一次它们在什么时候重合?

44. 由平面上的一点 O 出发按顺时针方向作相继的四条射线: OA, OB, OC 和 OD (图 2),已知 $\angle AOB$ 和 $\angle COD$ 之和等于 180° ,试证明: $\angle AOC$ 和 $\angle BOD$ 的平分线垂直.

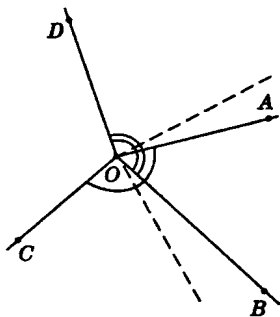


图 2

45. 给定两点 A 和 B ,对于不与点 B 重合并且直线 AB 上的每一个点 M ,改变比例 $AM:BM$,点分布在何处,使得这个比例:

(1) 大于 2; (2) 小于 2?

46. 一昼夜时针和分针重合几次? 成平角几次? 成直角几次?

47. 100 个学生住在村庄 A , 50 个学生住在村庄 B , 两个村庄之间的距离是 3 km, 应该在从 A 到 B 的路上的哪一个点建一个学校, 才能使得所有学生到学校的距离的总和尽可能的小?

48. 在一条直线上选取四点 A, B, C, D 和测量距离 AB, AC, AD, BC, BD 和 CD . 它们能否等于(按递增的次序):

(1) 1, 2, 3, 4, 5, 6;

(2) 1, 1, 1, 2, 2, 4?

2. 三角形全等的判定, 直线平行的判定和性质, 三角形的内角和

49°. 试证明: 线段的垂直平分线是和这条线段两端点距离相等的点的轨迹.

50. 试证明: 角的平分线是角内与它的两边距离相等的点的轨迹.

51. 试证明: 三角形的三条角平分线相交于一点.

52. 试证明: 三角形三边的垂直平分线相交于一点.

53. 试证明: 在任意三角形外可以外接一个圆, 并且是唯一的圆.

54. 过已知直线外的一点, 用圆规和直尺求作已知直线的平行线.

55°. 试证明: 直角三角形中, 30° 的角所对的直角边等于斜边的一半.

56. 直角三角形的一条直角边等于斜边的一半, 试证明: 这条直角边所对的角等于 30° .

57°. 线段 AC 和 BD 相交于点 O , 如果已知 $\angle BAO = \angle DCO$ 和 $AO = OC$, 试证明: $\triangle BAO \cong \triangle DCO$.

58. 试证明: 在等腰三角形中, 底边上的高是中线和角平分线.

59. $\triangle ABC$ 和 $\triangle ABC_1$ 是以 AB 为公共底边的等腰三角形, 试证明: $\triangle ACC_1 \cong \triangle BCC_1$.

60. 两条线段 AB 和 CD 相交于 O , 它是它们中每条线段的中点. 试证明: $\triangle ACO \cong \triangle BDO$.

61. 三角形的中线平分它的周长. 试证明: 这个三角形是等腰三角形.

62. 线段 AB 和 CD 相交于点 O , 它是它们中每条线段的中点, 如果线段 $AC = 10$, 线段 BD 等于多少?

63. 在等腰 $\triangle ABC$ 的底边 AB 上给定点 A_1 和 B_1 , 已知 $AB_1 = BA_1$, 试证明: $\triangle AB_1C \cong \triangle BA_1C$.

64. 在 $\triangle ABC$ 的边 AB 上取点 D , 在 $\triangle A_1B_1C_1$ 的边 A_1B_1 上取点 D_1 , 已知 $\triangle ADC \cong \triangle A_1D_1C_1$, 并且线段 DB 和 D_1B_1 也相等. 试证明: $\triangle ABC \cong \triangle A_1B_1C_1$.

65. 线段 AB 和 CD 相交于点 O , 如果已知 $\angle ACO = \angle DBO$ 和 $BO = OC$, 试证明: $\triangle ACO \cong \triangle DBO$.

66. 试证明: 在全等 $\triangle ABC$ 和 $\triangle A_1B_1C_1$ 中:

(1) 由顶点 A 和 A_1 所作的中线相等;

(2) 由顶点 A 和 A_1 所作的角平分线相等.

67. 图 3 中的 $\triangle ACC_1$ 和 $\triangle BCC_1$ 全等, 它们的顶点 A 和 B 位于直线 CC_1 的两侧, 试证明: $\triangle ABC$ 和 $\triangle ABC_1$ 为等腰三角形.

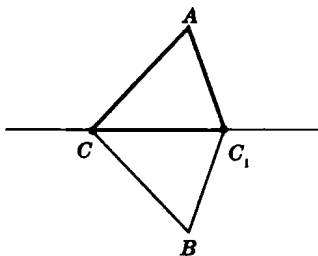


图 3

68. 试证明三角形全等的判定: 如果一个角, 这个角的平分线和这个角的一条邻边对应相等.

69. 试证明: 在等腰三角形中, 底边上的中线是角平分线和高.

70. 在以 AC 为底边的等腰 $\triangle ABC$ 中作中线 BM , 在它上面取点 D . 试证明三角形的全等:

(1) $\triangle ABD$ 和 $\triangle CBD$;

(2) $\triangle AMD$ 和 $\triangle CMD$.

71. 试证明: $\triangle ABC$ 是等腰三角形, 如果它的:

(1) 中线 BD 是高;

(2) 高 BD 是角平分线.

72. 试证明: 在等腰三角形中, 底边所对顶角的平分线是底边的中线和高.

73. 试证明三角形的全等: 如果两条边和其中一条边上的中线对应相等.

74. 在等边 $\triangle ABC$ 的边 AB , BC 和 CA 上取相等的线段 AD , BE 和 CF , 点 D , E 和 F 用线段联结, 证明: $\triangle DEF$ 是等边三角形.

75. 线段 AB 和 CD 相交成直角, 并且 $AC = AD$. 试证明: $BC = BD$ 和 $\angle ACB = \angle ADB$.

76. 给定两个三角形: $\triangle ABC$ 和 $\triangle A_1B_1C_1$. 已知 $AB = A_1B_1$, $AC = A_1C_1$, $\angle A = \angle A_1$. 在 $\triangle ABC$ 的边 AC 和 BC 上分别取点 K 和 L , 而在 $\triangle A_1B_1C_1$ 的边 A_1C_1 和 B_1C_1 上取一点 K_1 和 L_1 , 使得 $AK = A_1K_1$, $LC = L_1C_1$. 试证明: $KL = K_1L_1$ 和 $AL = A_1L_1$.

77. 在以 AC 为底边的等腰 $\triangle ABC$ 中, 顶角 $\angle B$ 等于 36° , 作角平分线 AD . 试证明: $\triangle CDA$ 和 $\triangle ADB$ 是等腰三角形.

78. 在等腰 $\triangle ABC$ 中,底边 AC 等于37,顶角 $\angle B$ 的外角等于 60° ,求从顶点 C 到直线 AB 的距离.

79. 在全等 $\triangle ABC$ 和 $\triangle A_1B_1C_1$ 的边 BC 和 B_1C_1 上分别取点 M 和 M_1 ,并且 $BM:MC = B_1M_1:M_1C_1$. 试证明: $AM = A_1M_1$.

80. $\triangle ABC$ 的 $\angle A$ 和 $\angle C$ 的外角等于 115° 和 140° ,一条平行于直线 AC 的直线交边 AB 和 BC 于点 M 和 N ,求 $\triangle BMN$ 的各角.

81. 从以 AB 为底的等腰 $\triangle ABC$ 的顶点 C 起,截取相等的线段: CA_1 在边 CA 上和 CB_1 在边 CB 上,试证明:三角形全等:(1) $\triangle CA_1B$ 和 $\triangle CB_1A$;(2) $\triangle ABB_1$ 和 $\triangle BAA_1$.

82. 在 $\triangle ABC$ 的边 AC 和 BC 上取点 C_1 和 C_2 ,试证明:如果 $\triangle ABC_1$ 和 $\triangle BAC_2$ 全等,那么 $\triangle ABC$ 是等腰三角形.

83. 试证明:在等腰三角形中:

(1) 底角的角平分线相等;

(2) 由底边上的顶点引的中线也相等.

84. 点 A, B, C, D 在一条直线上,试证明:如果 $\triangle ABE_1$ 和 $\triangle ABE_2$ 全等,那么 $\triangle CDE_1$ 和 $\triangle CDE_2$ 也全等.

85. 线段 AB 和 CD 相交,试证明:如果线段 AC, CB, BD 和 AD 相等,那么射线 AB 是 $\angle CAD$ 的平分线,射线 CD 为 $\angle ACB$ 的平分线,而 CD 垂直于 AB .

86. $\triangle ABC$ 和 $\triangle BAD$ 全等,并且点 C 和 D 在射线 AB 的两侧(图4),试证明:

(1) $\triangle CBD$ 和 $\triangle DAC$ 全等;

(2) 直线 CD 平分线段 AB .

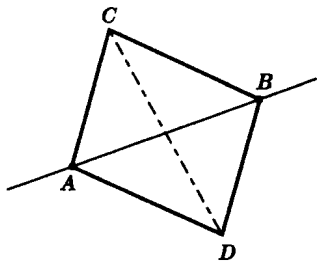


图4

87. 相等的线段 AB 和 CD 相交于点 O ,使得 $AO = OD$. 试证明: $\triangle ABC$ 和 $\triangle DCB$ 全等.

88. 求三角形的各角,如果已知它的边在三条直线上,它们之间所成的角等于 20° , 30° 和 50° .

89. 在三角形中,作两条高. 试证明:如果它们从交点到顶点的线段相等,那么三角形是等腰三角形.

90. 在 $\triangle ABC$ 中,由顶点 A 和 B 作角平分线,它们的交点记为 D ,求 $\angle ADB$, 如果:

(1) $\angle A = 50^\circ$, $\angle B = 100^\circ$;

(2) $\angle A = \alpha$, $\angle B = \beta$;

(3) $\angle C = 130^\circ$; (4) $\angle C = \gamma$.

91. 已知以 AC 为底边的等腰 $\triangle ABC$; CD 为 $\angle C$ 的平分线; $\angle ADC = 150^\circ$, 求 $\angle B$.

92. 在 $\triangle ABC$ 中,已知三内角的大小. 已知三角形被它的三条角平分线分成六个三角形. 求六个三角形的各角.

93. 三角形的两个角的角平分线相交成 70° 的角,求三角形的第三个角.

94. 过 $\triangle ABC$ 的顶点 B 作一直线平行于直线 AC ,这时顶点 B 上形成的三个角成比例为 $3:10:5$. 求 $\triangle ABC$ 的各角.

95. 过顶点为 A 的角内的点 M 作平行于角的两边的直线,交两边于点 B 和点 C . 已知 $\angle ACB = 50^\circ$, 而 $\angle ACM$ 的补角等于 40° . 求 $\triangle BCM$ 和 $\triangle ABC$ 的各角.

96. 过 $\triangle ABC$ 的顶点 A 的直线交边 BC 于点 M . 同时 $BM = AB$, $\angle BAM = 35^\circ$, $\angle CAM = 15^\circ$, 求 $\triangle ABC$ 的各角.

97. 点 A, B, C, D 位于一条直线上,并且线段 AB 和 CD 有公共的中点. 试证明:如果 $\triangle ABE$ 是以 AB 为底边的等腰三角形,那么 $\triangle CDE$ 也是以 CD 为底边的等腰三角形.

98. 试证明三角形的全等:如果一条边,这条边上的中线和中线与这条边所成的角对应相等.

99. 试证明三角形的全等:如果一条边和其余两条边上的高对应相等.

100. 试证明:如果三角形的一条高通过它外接圆的圆心,那么这个三角形是等腰三角形.

101. 已知 $\triangle ABC$, 在边 AC 过点 A 的延长线上取线段 $AD = AB$, 而在过点 C 的延长线上取线段 $CE = CB$. 如果已知 $\triangle ABC$ 各角的大小,求 $\triangle DBE$ 的各角.

102. 在 $\triangle ABC$ 中,由顶点 A 和 C 所作的高相交于点 M , 如果 $\angle A = 70^\circ$, $\angle C = 80^\circ$, 求 $\angle AMC$.

103. 试证明:如果在等腰直角 $\triangle ABC$ 的斜边 BC 上取两点 E 和 D ,使得 $BE = BA$ 和 $CD = CA$,那么 $\angle DAE = 45^\circ$.

104. 在等腰 $\triangle ABC$ 中,两腰上的高 AD 和 CE 构成等于 48° 的 $\angle AMC$,求 $\triangle ABC$ 的各角.

105. 由直角三角形斜边的中点所作的斜边的垂线与一直角边相交,所得的交点与另一直角的一个端点联结成线段,它把三角形的一个角分成比例 $2:5$ (较小的部分在斜边上),求这个角.

106. 已知 $\angle A$,从顶点 A 起,在角的一条边上截取线段 AB ,由点 B 作直线平行于已知角的另一条边,在这条直线上截取在角内部的线段 BD , $BD = BA$,并且联结点 D 和顶点 A . 试证明: AD 平分已知角.

107. 两条平行直线与第三条直线相交,求两个同旁内角的平分线所成的角.

108. 在 $\triangle ABC$ 中,中线 BD 等于边 AC 的一半,求三角形的 $\angle B$.

109. 在 $\triangle ABC$ 中,由顶点 C 作内角和外角平分线(图5),内角平分线与边 AB 所成的角等于 40° ,求外角平分线与边 AB 的延长线所成的角.

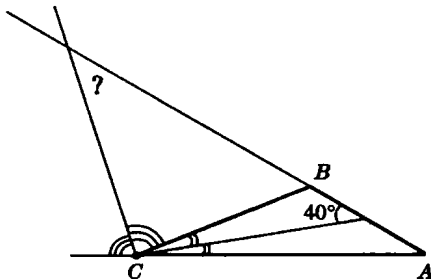


图5

110. 点 A 和 D 在两条平行直线的一条上,点 B 和 C 在另一条上,并且 AB 和 CD 也平行,试证明:四边形 $ABCD$ 的对角相等.

111. 过两个端点在两条平行直线上的线段的中点 M ,作一条直线交这些直线于点 A 和 B . 试证明:点 M 也是 AB 的中点.

112°. 三角形的三个角成比例 $2:3:4$,求三角形的外角所成的比例.

113. 试证明:由等腰直角三角形的直角顶点所引的高是斜边的一半.

114°. 三角形的一个角等于其余两个角的和. 试证明:这个三角形是直角三角形.

115. 点 M 和 N 在 $\triangle ABC$ 的边 AC 上,并且 $\angle ABM = \angle ACB$ 和 $\angle CBN =$

$\angle BAC$, 试证明: $\triangle BMN$ 是等腰三角形.

116. 等腰三角形的底边 BC 上的底角是顶角的 2 倍, BD 为三角形的角平分线, 试证明: $AD = BC$.

117. 三角形的两个角等于 10° 和 70° . 求由三角形的第三个角的顶点所作的高和角平分线之间所成的角.

118. 直角三角形的一个锐角等于 30° , 而斜边等于 8. 求由直角顶点所作的高把斜边分成的两条线段之长.

119. 过 $\triangle ABC$ 的顶点 C 作角平分线 BD 的平行线, 交 AB 的延长线于点 M , 如果 $\angle ABC = 110^\circ$, 求 $\triangle MBC$ 的各角.

120°. 试证明: 与已知直线有已知距离的点的轨迹, 是与这条直线有已知距离的两条平行线.

121. 三角形的一条边是另一条边的 2 倍, 这两边的夹角等于 60° , 试证明: 这个三角形是直角三角形.

122. 已知两个有公共底边的等腰三角形, 试证明: 它们底边上的中线在一条直线上.

123. 试证明: 一个三角形的两边和其中较小一边的对角与另一个三角形的两边和其中较小一边的对角对应相等, 那么两个三角形可能全等, 也可能不全等.

124. $\triangle ABC$ 的中线 AM 垂直于它的角平分线 BK , 如果 $BC = 12$, 求 AB .

125. 由 $\triangle ABC$ 的顶点 A 所作的直线垂直于它的中线 BD , 并且平分这条中线, 求边 AB 和 AC 的比例.

126°. 在 $\triangle ABC$ 中, 中线 AM 过点 M 延长的距离等 AM , 如果 $AB = 4$, $AC = 5$, 求从所得的点到顶点 B 和 C 的距离.

127. 两个大小不同的圆相交于点 A 和 B . 试证明: 两圆圆心的连线平分线段 AB , 并与它垂直.

128°. 用圆规和直尺平分一条线段.

129. 试证明: 各边相等的四边形的对角线互相垂直.

130. 三角形的两条高相等. 试证明: 三角形是等腰三角形.

131. AD 为 $\triangle ABC$ 的角平分线, 点 M 在边 AB 上, 并且 $AM = MD$. 试证明: $MD \parallel AC$.

132. 点 A 和 D 在两条平行线中的一条上, 点 B 和 C 在另一条上, 并且直线 AB 和 CD 也平行, 试证明: $AB = CD$ 和 $AD = BC$.

133. 某一条直线与平行直线 a 和 b 分别交于点 A 和 B , 顶点 B 上所成的角

的平分线交直线 a 于点 C . 如果 $AB=1$, 求 AC .

134. 两条相等的线段 AB 和 CD 相交于点 O (图 6), 并被它分成比例 $AO:OB=CO:OD=1:2$, 直线 AD 和 BC 相交于点 M , 试证明: $\triangle DMB$ 是等腰三角形.

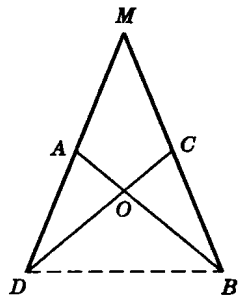


图 6

135. 如果直角三角形斜边上的中线把直角分成比例 $1:2$, 求它的两个锐角.

136. 已知: 直线 a 和 b 分别与第三条直线相交形成 8 个角, 这些角中 4 个等于 80° , 另外 4 个等于 100° , 由此能否得出直线 a 和 b 平行?

137. 设 AE 和 CD 为等腰 $\triangle ABC$ ($AB=BC$) 的角平分线. 试证明: $\angle BED = 2\angle AED$.

138. 在直角三角形中, 一个角等于 30° , 试证明: 在这个三角形中, 联结斜边的中点以及斜边的垂直平分线与直角边的交点的线段是大的直角边的 $\frac{1}{3}$.

139. 在等腰 $\triangle ABC$ 的两腰 AB 和 AC 上取点 P 和 Q , 使得 $\angle PXB = \angle QXC$, 其中 X 为底边 BC 的中点. 试证明: $BQ = CP$.

140. 试证明: 和第三条直线平行的两条直线互相平行.

141. 试证明: 和两条平行线中一条相交的直线, 与另一条也相交.

142. 试证明: 如果在 $\triangle ABC$ 和 $\triangle A_1B_1C_1$ 中, 成立等式 $AB=A_1B_1$, $BC=B_1C_1$ 和 $\angle ABC = \angle A_1B_1C_1$, 那么这两个三角形全等.

143. 在 $\triangle ABC$ 的边 AC 和 BC 上分别取点 M 和 N , 并且 $MN \parallel AB$ 和 $MN = AM$, 如果 $\angle B = 45^\circ$ 和 $\angle C = 60^\circ$, 求 $\angle BAN$.

144. 过 $\triangle ABC$ 顶点 A 的直线交边 BC 于点 M , 并且 $BM = AB$, 如果 $\angle ACB = 25^\circ$, 求 $\angle BAM$ 和 $\angle CAM$ 之差.

145. BK 为 $\triangle ABC$ 的角平分线, 已知 $\angle AKB : \angle CKB = 4:5$, 求 $\triangle ABC$ 的 $\angle A$