高等学校工程专科教材

复变函数与积分变换

周正中　郑吉富　编

高等教育出版社

内容提要

本书是由国家教委高等学校工程专科数学教材编审组组织编写的教材。内容包括解析函数、复变函数的积分、解析函数的级数展开式、留数及其应用、保角映射、傅氏变换、拉氏变换。

本书可供高等工程专科学校作为复变函数与积分变换课程的试用教材。

图书在版编目(CIP)数据

复变函数与积分变换/周正中，郑吉富编. 一北京：高等教育出版社，1996(2001 重印)

ISBN 7-04-005168-0

Ⅰ.复… Ⅱ.①周…②郑… Ⅲ.①复变函数-高等学校，工科(教育)-教材②积分复换-高等学校，工科(教育)-教材 Ⅳ.①0174.5②0177.6

中国版本图书馆 CIP 数据核字(96)第 00577 号

出版发行	高等教育出版社		
社　　址	北京市东城区沙滩后街 55 号	**邮政编码**	100009
电　　话	010－64054588	**传　　真**	010－64014048
网　　址	http://www.hep.edu.cn		
经　　销	新华书店北京发行所		
印　　刷	北京印刷三厂		
开　　本	850×1168　1/32	**版　　次**	1995 年 5 月第 1 版
印　　张	7	**印　　次**	2001 年 6 月第 8 次印刷
字　　数	180 000	**定　　价**	7.10 元

前　言

本教材是根据国家教委关于抓好专科教材建设的指示精神，在国家教委高等工程专科学校数学教材编审组的统一组织领导下编写的．可作为高等工程专科学校复变函数与积分变换课程的教材，也可作为本科少学时或专科层次的职大和夜大的教材．

本书力求体现基础课为专业课服务的思想，贯彻“以应用为目的，以后继课程够用为度”的原则，在保证科学性的基础上，注意讲清概念，减少理论推导，注重学生基本运算能力和分析问题、解决问题能力的培养．内容叙述力求通俗易懂，循序渐进，章节之间衔接紧凑．既突出了概念和计算，又没有削弱必要的基础理论，便于教师教和学生学．本书的主要特色是重视概念和运算．

本教材的教学时数为 44 学时左右，打“*”号内容需另加学时．

本教材由合肥联合大学周正中教授主编．《复变函数》部分由周正中执笔．《积分变换》部分的初稿由重庆钢铁高等专科学校郑吉富副教授执笔，最后由主编整理修改定稿．周嘉章讲师参加了全书的资料整理、习题编写和全书的绘图工作．编者在编写“积分变换”部分时参阅了南京工学院编及祝同江副教授编写的《积分变换》，从中得到不少裨益，在此特向上述二书作者表示衷心感谢．

本教材在高等工程专科数学教材编审组第五次会议上审定，参加会议的有担任主审的重庆大学应用数学系曹泳吴副教授，以及盛祥耀教授、尹福源副教授等高等工程专科数学教材编审组成员．会后，北京理工大学祝同江副教授又仔细审阅了全部书稿并提出许多修改意见．作者对他们表示衷心感谢．

由于作者水平有限，书中难免有不妥之处，敬请读者批评指正．

编者

1993 年 6 月

目　　录

第一部分　复变函数

第二部分 积 分 变 换

第一部分　复 变 函 数

第一章　解 析 函 数

复变函数是自变量和因变量都为复数的函数．复变函数中的解析函数是本学科研究的主要对象．为了建立解析函数的理论基础，在这一章中，我们将引入复数概念，性质及其运算，然后引入复平面上的点集、区域以及复变函数的极限、连续，可导等概念，这些在形式上与实变函数中相应概念有很多类似之处，因此，可以看作是高等数学相应概念及定理在复数范围内的推广．

§1　预 备 知 识

复数已在高中代数课程中学过，平面点集与区域也已在高等数学课程中学过．因此，在这一节里，我们只把这方面的内容整理出来，供读者作一番回顾．

众所周知，i 是虚数单位，即 $i^2=-1$。

设 x 和 y 是任意实数，则 $z=x+iy$ 称为复数，x 称为复数 z 的实部，记为 $x=\mathrm{Re}z$； y 称为复数 z 的虚部，记为 $y=\mathrm{Im}z$．如果 $\mathrm{Im}z=0$，则 $z=x=\mathrm{Re}z$ 是实数，因此实数可看作复数的特殊情形．如果 $\mathrm{Re}z=0$，则 $z=iy$，$(y\neq 0)$ 称为纯虚数。当 $\mathrm{Im}z\neq 0$ 时，z 称为虚数．

两个复数相等是指，它们的实部与实部相等，虚部与虚部相等．

复数与实数不同，两个复数(指虚数)不能比较大小，它们之间只有相等与不相等的关系．

1. 复数的四则运算

复数的加（减）法按实部与实部相加（减），虚部与虚部相加（减）。设 $z_1=x_1+iy_1$，$z_2=x_2+iy_2$，则

$$z_1\pm z_2=(x_1\pm x_2)+i(y_1\pm y_2).$$

两个复数 $z_1=x_1+iy_1$ 与 $z_2=x_2+iy_2$ 相乘，可按实多项式相乘的法则来进行，只要注意到 $i^2=-1$。复数 $z_1z_2=(x_1x_2-y_1y_2)+i(x_1y_2+x_2y_1)$ 称为 z_1 与 z_2 的乘积。

两个复数 $z_1=x_1+iy_1$ 与 $z_2=x_2+iy_2$ 的除法（$z_2\neq 0$），可将它写成分式的形式，然后分子与分母同乘一个与分母实部相等而虚部只相差一个符号的复数，再进行化简，即复数

$$\frac{z_1}{z_2}=\frac{(x_1+iy_1)(x_2-iy_2)}{(x_2+iy_2)(x_2-iy_2)}=\frac{x_1x_2+y_1y_2}{x_2^2+y_2^2}+i\frac{x_2y_1-x_1y_2}{x_2^2+y_2^2}$$

称为 z_1 与 z_2 的商 $\frac{z_1}{z_2}$。

称 $\sqrt{x^2+y^2}$ 为 z 的绝对值、或称为 z 的模，记为 $|z|$。

对于 $z=x+iy$，$\bar{z}=x-iy$ 称为 z 的共轭复数。

关于 z 的模与共轭复数，有如下的常用的公式：

1) $z+\bar{z}=2\mathrm{Re}z$，$z-\bar{z}=2i\mathrm{Im}z$；

2) $\bar{\bar{z}}=z$，$|z|=|\bar{z}|$，$z\bar{z}=|z|^2$；

3) $\overline{z_1\pm z_2}=\bar{z}_1\pm\bar{z}_2$，$\overline{z_1z_2}=\bar{z}_1\bar{z}_2$，$\overline{\left(\frac{z_2}{z_1}\right)}=\frac{\bar{z}_2}{\bar{z}_1}$ $(z_1\neq 0)$；

4) $|z_1z_2|=|z_1||z_2|$，$\left|\frac{z_2}{z_1}\right|=\frac{|z_2|}{|z_1|}$ $(z_1\neq 0)$；

5) $||z_1|-|z_2||\leqslant|z_1\pm z_2|\leqslant|z_1|+|z_2|$（三角不等式）。

2. 复数的几何表示

从复数 $x+iy$ 的定义可以看出，复数由一对有序实数 (x,y) 唯一确定，于是在选定直角坐标系后，能够建立平面上的全部点和全体复数间一一对应关系，即可以借助于横坐标 x，纵坐标 y 的点来表示复数 $z=x+iy$（图 1-1）。

由于 x 轴上的点对应着实数，故将 x 轴称为实轴；y 轴上的非原点对应着纯虚数，因此 y 轴称为虚轴，这样表示复数 z 的平面称为复平面或称 z 平面.

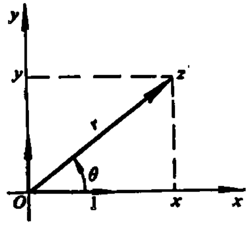

图 1-1

引进了复平面之后，我们已在"数"和"点"之间建立了联系，因此，今后在研究复变函数时，常可借助于几何直观，采用几何术语，为复变函数应用于实际提供了方便，也丰富了复变函数的内容.

在复平面上，从原点到点 $z=x+iy$ 所引的向量与这个复数 z 也构成一一对应关系(复数零对应着零向量). 这种对应关系使复数的加(减)法与向量的加(减)法之间保持一致.

例如，设 $z_1=x_1+iy_1$, $z_2=x_2+iy_2$, 则

$$z_1+z_2=(x_1+x_2)+i(y_1+y_2).$$

即 z_1+z_2 所对应的向量，就是 z_1 所对应的向量与 z_2 所对应的向量的和向量.

复数 z 除了用平面的点或向量表示外，还有三角表示法(这时要假定复数 $z\neq 0$):

根据直角坐标与极坐标之间的变换关系

$$x=r\cos\theta,\quad y=r\sin\theta,$$

则 z 可表示为

$$z=r(\cos\theta+i\sin\theta)。\tag{1}$$

这叫做复数 z 的三角表示式，与之相对应，式子 $x+iy$ 叫做 z 的代数式.

(1)式中的 $r=\sqrt{x^2+y^2}$ 就是复数 z 的模. (1)式中的 θ 称为复数 z 的辐角，它是向量 $\overrightarrow{Oz}$ 与实轴的正向所成的角 (如图 1-1).

数零是唯一的以零为模，辐角不确定的复数.

若 θ 是复数 z 的辐角，则 $\theta+2n\pi$(n 是整数)也是 z 的辐角，

所以 z 的辐角的值有无穷多个，记为 $\mathrm{Arg}z=\theta+2n\pi$，$(n=0,\pm1,\pm2,\cdots)$。

满足 $-\pi<\theta\leqslant\pi$ 的辐角称为 z 的辐角的主值，记为 $\theta=\arg z$。

于是 $\mathrm{Arg}z=\arg z+2n\pi\ (n=0,\pm1,\pm2,\cdots)$。

关于复数的三角表示式，有下列公式：

设 $z_1=r_1(\cos\theta_1+i\sin\theta_1)$，$z_2=r_2(\cos\theta_2+i\sin\theta_2)$

$$z_1z_2=r_1r_2[\cos(\theta_1+\theta_2)+i\sin(\theta_1+\theta_2)],\tag{2}$$

$$\frac{z_2}{z_1}=\frac{r_2}{r_1}[\cos(\theta_2-\theta_1)+i\sin(\theta_2-\theta_1)]。\tag{3}$$

反复使用公式(2)，可得

$$z^n=[r(\cos\theta+i\sin\theta)]^n=r^n(\cos n\theta+i\sin n\theta),\tag{4}$$

n 为整数，这就是棣莫弗 (De Moivre) 公式。

另外，从(2)，(3)可得

$$\mathrm{Arg}(z_1z_2)=\mathrm{Arg}z_1+\mathrm{Arg}z_2\text{①},\tag{5}$$

$$\mathrm{Arg}\frac{z_2}{z_1}=\mathrm{Arg}z_2-\mathrm{Arg}z_1。\tag{6}$$

解方程 $z^n=a\ (a\neq0)$，其中 n 为正整数，可令 $a=\rho(\cos\varphi+i\sin\varphi)$，可得 a 的 n 次方根为

$$z_k=(\sqrt[n]{a})_k=\sqrt[n]{\rho}\left(\cos\frac{\varphi+2k\pi}{n}+i\sin\frac{\varphi+2k\pi}{n}\right)$$

$$(k=0,1,2,\cdots,n-1).$$

最后我们还要注意到在复平面需要引进一个无穷远点，以 $z=\infty$ 表示，对于复数 ∞ 来说，实部、虚部与辐角的概念都没有意义，但它的模规定为正无穷大，即 $|z|=+\infty$，对于任何有限复数 z，$|z|<+\infty$。

包括无穷点在内的复平面称为扩充复平面，不包括无穷点在

① 由辐角的多值性，该等式应理解为对于左端的任一值，右端必有一个值和它相等，并且反过来也一样。

内的复平面称为有限平面，或者就称为复平面。

3. 复平面的点集与区域

高等数学课程已学过平面点集，由于复数可以看成平面上的点，因此我们可以通过满足一定条件的复数来表示复平面的点集。

例如，$|z-z_0|=r$ $(r>0)$ 表示平面上到定点 z_0 的距离等于常数 r 的点的集合，在几何上，它表示平面上以 z_0 为圆心，r 为半径的圆周(图 1-2)。

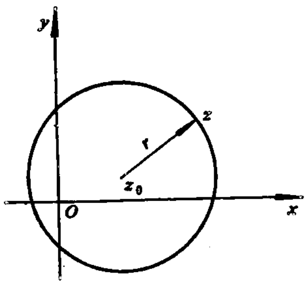

图 1-2

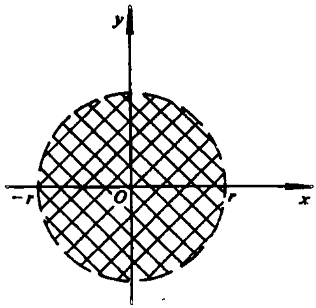

图 1-3

当 $z_0=0$ 时，$|z|<r$ 表示平面上到原点的距离小于 r 的点的点集，它表示平面上以原点为圆心，r 为半径的不包括此圆周在内的圆盘(图 1-3)。

与高等数学一样，我们也给出一个点的邻域的概念。

设 z_0 是平面上的一点，我们将满足条件 $|z-z_0|<\delta$ 的 z 的全体，称为 z_0 的 δ-邻域，记为 $U_\delta(z_0)$，显然，它是一个以 z_0 为圆心，δ 为半径的不包括此圆周在内的圆盘(或称开圆盘)。

如果是由满足条件 $0<|z-z_0|<\delta$ 的所有 z 组成的点集，称为点 z_0 的去心的 δ-邻域。

$\arg z=\alpha$ 表示辐角的主值为 α 的点的集合，它是平面上一条由原点发出与 x 轴成 α 角的一条射线(图 1-4)。

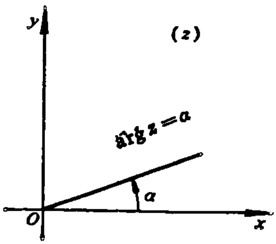

图 1-4

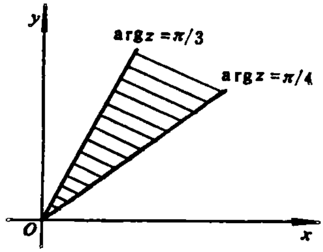

图 1-5

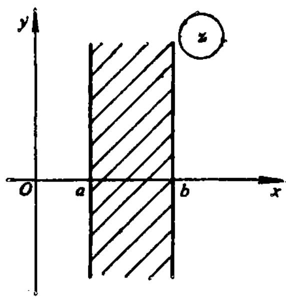

图 1-6

又如，$\frac{\pi}{4} \leqslant \arg z \leqslant \frac{\pi}{3}$ 表示介于射线 $\arg z = \frac{\pi}{4}$ 和射线 $\arg z = \frac{\pi}{3}$ 之间的角形区域(图 1-5)。

再如，$a \leqslant \operatorname{Re} z \leqslant b$ $(a < b)$ 表示平面上实部介于 a 与 b 之间的点的集合，它是 z 平面上两条平行于 y 轴的直线所构成的带形，如图 1-6 所示。

若存在正常数 K，对于点集 D 中的任何点 z，成立 $|z| \leqslant K$，则称 D 为有界点集，否则称为无界点集。

例如点集 $U_\delta(z_0) = \{z \mid |z - z_0| < \delta\}$ 为有界点集，而图 1-5 以及图 1-6 所示的点集都是无界点集。

在高等数学中，我们已熟悉，由一条或几条曲线所围成的部分平面称为区域。

例如图 1-3，图 1-5，图 1-6 所示的平面点集都是区域。

设 D 是平面上的一个点集，z_0 为平面上一点，如果 z_0 的任何 δ-邻域中既有 D 中的点，又有不是 D 中的点，则称点 z_0 为 D 的边界点，所有边界点的集合称为 D 的边界。区域连同它的边界一起称为闭区域。

例如，$|z-z_0|\leqslant r$ 是有界闭区域，半平面 $\mathrm{Im}z\geqslant 0$ 是无界闭区域(规定∞点也含在此区域内)。

平面点集中的区域概念是复变函数中极为重要的概念之一，我们今后研究的复变函数，大都是定义在区域上的。

与高等数学一样，在复变函数里，还需要引进单连通区域与复连通区域的概念。

设 $x(t)$，$y(t)$ 是 $[\alpha,\beta]$ 上的实变量的连续函数，于是，由方程

$$z(t)=x(t)+iy(t)\ (\alpha\leqslant t\leqslant\beta)$$

确定平面上的一个点集 C，称为平面上的一条连续曲线。对于 $[\alpha,\beta]$ 上的任意两点 t_1 与 t_2，当 $t_1\neq t_2$ 时，就有 $z(t_1)\neq z(t_2)$，除非 $z(\alpha)=z(\beta)$，则称此曲线为简单曲线，又当 $z(\alpha)=z(\beta)$ 时，则称此曲线为简单闭曲线。

对于区域 D 内任意一条简单闭曲线 C，如果 C 的内部每一点都在 D 中，则称 D 为单连通区域，否则就称为复连通区域。

例如，$|z-z_0|<r$ 是单连通区域，而圆环：$r<|z-z_0|<R$ 是复连通区域。

直观上来看，单连通区域是无洞的，而复连通区域是有洞的。

习 题 1

1. 将下列复数写成 $x+iy$ 的形式：

(1) $\frac{1-i}{1+i}$; (2) $\frac{i}{1-i}+\frac{1-i}{i}$; (3) $\left(\frac{3+4i}{1-2i}\right)^2$;

(4) $(\sqrt{3}-i)^3$; (5) $\sqrt{3+4i}$.

2.将下列复数写成三角形式:

(1) $2+5i$; (2)$1-i\sqrt{3}$; (3) $\sqrt{-i}$.

3.如 $z=x+iy$, $y\neq 0$, $z\neq\pm i$, 则只当 $x^2+y^2=1$ 时, $\frac{z}{1+z^2}$ 才为实数.

4.指出满足下列条件的点 z 的范围是否是区域? 并作图:

(1) $|z|\leqslant 2$; (2) $|z-z_0|>1$; (3) $\mathrm{Re}z>\frac{1}{3}$;

(4) $\mathrm{Im}z<\frac{1}{2}$; (5) $\mathrm{Re}(z^2)<1$; (6) $|\arg z|<\frac{\pi}{3}$;

(7) $\left|\frac{1}{z}\right|<3$; (8) $\left|\frac{z-1}{z+1}\right|<1$; (9) $|z-1|+|z+1|<4$.

§2 复 变 函 数

1. 复变函数的概念及其几何表示

在客观现象中，有很多物理量(如速度、加速度、电场强度、磁场强度等),用复数去刻画，在研究过程中会感到十分方便. 在大量的实际问题中，人们经常接触到的变量之间的相互关系是复变函数. 例如,考虑平面上的电场，每一点 (x,y) 上的电场强度是一个向量 $\vec{a}=(a_x,a_y)$, 它与点 (x,y) 的位置有关,我们可以把向量 $\vec{a}$ 看作复变数 $w=a_x+ia_y$, 它是依赖于点 $z=(x,y)$ 的函数,记作 $w=f(z)$, 这就是复变量 z 的函数，下面精确地给出复变函数的定义.

定义 设 E 为平面点集,若对于 E 中每个复数 z, 按照一定的规律,有唯一确定的复数 w 与之对应，则称 w 为 z 的函数(单值函数),记作 $w=f(z)$. 点集 E 称为这个函数的定义域， z 称为自变量, w 称为因变量.

如果对于自变量 $z\in E$, 对应着几个或无穷多个值 w, 则称

在 E 上确定了一个多值函数 $w=f(z)$. 今后不作特别声明，都是指单值函数。

由于给定一个复数 $z=x+iy$，相当于给定了两个实数 x 和 y，而复数 $w=u+iv$ 也同样对应着一对实数 u 和 v，所以复变函数 w 和自变量 z 之间的关系 $w=u+iv=f(z)=f(x+iy)$ 相当于两个关系:

$$u=u(x,y),$$

与

$$v=v(x,y).$$

它确定了实变函数 u 和 v 是以自变量为 x 和 y 的函数，因此，定义一个复变函数 $w=f(z)$ 相当于定义两个二元实变函数 $u=u(x,y)$ 与 $v=v(x,y)$.

例如 $w=\frac{1}{z}$, $(z\neq 0)$ 若令 $z=x+iy$, $w=u+iv$, 则

$$w=\frac{1}{z}=\frac{1}{x+iy}=\frac{x-iy}{x^2+y^2}$$

$$=\frac{x}{x^2+y^2}-i\frac{y}{x^2+y^2} \qquad (x^2+y^2\neq 0)$$

就可以确定出两个二元实变函数:

$$u=\frac{x}{x^2+y^2},\ v=-\frac{y}{x^2+y^2}.$$

复变函数的几何表示，是通过两个复数平面上的点集之间的对应关系来表示的. 设以某一平面（Z 平面）的点表示自变量 z 的值，而以另一平面（W 平面）的点表示函数 w 的值，则函数 $w=f(z)$ 确定了 Z 平面的点（在这些点上函数值是确定的）和 W 平面的点之间的对应关系，这样函数 $w=f(z)$ 是把 Z 平面的点变换到 W 平面的相应点的一个映射. 用符号 E 表示 Z 平面上的点集，$w=f(z)$ 是定义在这个点集上的函数，用 G 表示 W 平面上的点集，它是点集 E 的点被函数 $w=f(z)$ 映射所成（如图 1-7）.

由此看出，函数 $w=f(z)$ 的几何表示是指函数 $w=f(z)$

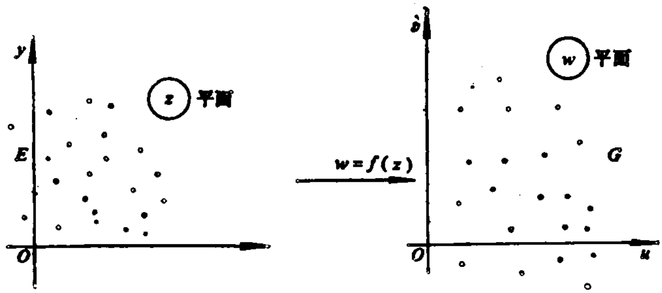

图 1-7

把 Z 平面的点集 E 映射到 W 平面上的点集 G。函数 $w=f(z)$ 又叫做一个映射，w 称为 z 的象(映象)，而 z 称为 w 的原象. 和实变函数一样，复变函数也有反函数的概念. 假定函数的定义域为 Z 平面的点集 E，函数值集合为 W 平面上的点集 G，那么 G 中的每一个点必将对应着 E 中的一个或几个点. 按照函数的定义，在 G 中就确定了某一个函数 $z=g(w)$，它称为 $w=f(z)$ 的反函数，也称为映射 $w=f(z)$ 的逆映射. 若 G 中每一个点 w，通过关系式 $w=f(z)$ 只有一个点 $z\in E$ 与之相对应，则在 G 上确定了一个单值函数 $z=g(w)$；若在 G 中存在点，通过关系式 $w=f(z)$ 在 E 中至少有两个点与之相对应，则在 G 上确定了一个多值函数，仍记为 $z=g(w)$。

例如，函数 $w=z^2$ 是 z 的单值函数，它的反函数 $z=\sqrt{w}$ 是多值的(双值的)函数。

如果对于点集 E 内的任意两个不同的点 z_1 与 z_2，相对应的函数值 $w_1=f(z_1)$ 及 $w_2=f(z_2)$ 也不同，则称 $w=f(z)$ 为 E 内的单叶函数。

2. 复变函数的极限与连续性

大量客观现象中所反映出来的复变函数是连续的. 为了确切地定义复变函数的连续概念，下面先介绍复变函数极限的概念.

定义 1 设 $w=f(z)$ 定义在 z_0 的去心邻域：$0<|z-z_0|$