



普通高等教育“十一五”国家级规划教材

力学教程

(下)

李 复 编著

清华大学出版社

普通高等教育“十一五”国家级规划教材

力学教程

(下)

李 复 编著

清华大学出版社
北京

内 容 简 介

本书是作者多年来在清华大学给物理系、基础科学班、电子工程系等本科生授课的基础上,吸取国内外同行的经验并结合自己教学研究的成果总结而成,包括牛顿力学和相对论力学两部分.

本书突出理论体系架构,对牛顿理论体系做了较深入的分析和讨论.本书强调非惯性系的意义和规律,加强了连续介质力学和波动力学两大部分.本书以爱因斯坦假设和狭义相对论为根据,系统讨论广义相对论的史瓦西场.教学中遇到的疑难问题书中都做了详尽的讨论.

本书可作为高等学校物理专业以及其他理、工专业本科生的教材或参考书,也可以供相关教师参考.

版权所有,侵权必究.侵权举报电话:010-62782989 13701121933

图书在版编目(CIP)数据

力学教程.下/李复编著. —北京:清华大学出版社, 2011.6

ISBN 978-7-302-26065-3

I. ①力… II. ①李… III. ①力学—高等学校—教材 IV. ①O3

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2011)第 120752 号

责任编辑:朱红莲

责任校对:赵丽敏

责任印制:杨 艳

出版发行:清华大学出版社

地 址:北京清华大学学研大厦 A 座

<http://www.tup.com.cn>

邮 编:100084

社 总 机:010-62770175

邮 购:010-62786544

投稿与读者服务:010-62776969, c-service@tup.tsinghua.edu.cn

质 量 反 馈:010-62772015, zhiliang@tup.tsinghua.edu.cn

印 装 者:北京嘉实印刷有限公司

经 销:全国新华书店

开 本:185×260

印 张:21.5

字 数:518 千字

版 次:2011 年 6 月第 1 版

印 次:2011 年 6 月第 1 次印刷

印 数:1~3000

定 价:39.00 元

产品编号:018590-01

前言

本书是基础物理学(普通物理学)中力学部分的教材,包括经典力学的牛顿力学系统和相对论力学基础。

物理学是研究物质世界组成、运动、变化的最普遍、最基本的规律的科学。物理学由物质的组成和物质之间的相互作用出发,解释自然现象,揭示自然的奥秘,研究自然的变化规律。物理学是整个自然科学的基础,基本的物理学定律、物理学原理是一切自然过程都遵循的。物理学研究方法、实验手段也是整个自然科学领域的基本研究方法和实验手段。物理学家费曼指出:“物理学是最基本的、包罗万象的一门学科,它对整个科学的发展有深远的影响。事实上,物理学是与过去所谓的‘自然哲学’相当的现代名称,现代科学大多数就是从自然哲学中产生的。许多领域内的学生都发现自己正在学习物理学,这是因为它在所有的现象中起着基本的作用。”^①

物理学是理论与实验相结合的科学,物理思想、物理规律都来自物理实验。物理学不是抽象的思维游戏,也不是单纯的数学运算、公式推导,而是对客观世界运动规律的分析 and 研究。物理学来自客观世界,又要接受客观世界的检验。因此物理学的理论必须而且应该与日常生活、生产实践和科学研究相联系,所有重要问题都要符合实际,要重视物理量的量级和公式的应用条件。这是物理学最重要的特点。

力学曾是物理学中创立最早、成熟最早的部分,现已发展成为一门完整的与物理学并立的独立学科,而力学的基本原理仍然是物理学的重要基础。本书作为普通物理的第一部分,突出力学基础理论、深挖事物发展和变化的本质、强调对物理过程的分析、加强物理性质的图像化理解。

虽然经典力学是成熟的理论,取得了辉煌的成就,但绝不是完美无缺的,仍有局限性,在基本概念和理论体系上还存在一些疑难和不确定性,还有发展和改进的余地。

对基本原理的阐述和学习是很难的事情,需要花大工夫下大力气。正如 19 世纪末赫兹在《力学原理》的序言中写到:“我有这样的经验,要向肯动脑筋的听众阐明力学的真正基本的内容,而不会不时感到为难,不会一再激起歉意,不想尽快跨过原理部分而向他们讲述一些应用的例子,那是极端困难的一件事。”

本书着重在以下几个方面做了一些努力:

1. 对牛顿定律等基本原理、基本概念和基本方法做比较深入的讨论和分析。对其中一些疑难和争议提出自己的看法和意见。

^① R. P. 费曼,费曼物理学讲义。(第一卷)上海:上海科学技术出版社,21

2. 对惯性定律、惯性系、惯性力有一些新的体会和见解,导致这些内容都有较大改变,明确提出非惯性系相应的运动定律和运动定理。

3. 对经典力学教学中的重点和难点都着重分析、讨论。有些以前难以在基础力学中解释的重要问题如陀螺的章动等,也在基本原理的基础上做了简化讨论。

4. 质点和质点系的功能原理、动量定理、角动量定理的应用比牛顿力学要普遍和有效得多,而且贯穿于整个力学、物理学中,因此在教学中突出功能原理、动量定理、角动量定理。

5. 淡化刚体力学的地位,理顺刚体力学教学系统,精炼和加强刚体力学的内容。

刚体只是一个特殊的质点系,在刚体力学中并没有新的基本原理,只是质点系角动量定理、功能原理、动量定理的应用,因此没有单独作为一章。由于重新安排了教学系统和讨论方法,所以虽然在本书中刚体力学只占一节,但是不仅讨论了一般教材里的刚体力学内容,而且还增加了章动、刚体定点角动量 L 与角速度 ω 的关系、欧拉方程等介绍性内容。

6. 加强连续介质力学,增加了应力、应变、广义胡克定律、固体形变等。

在后续的理论力学课程中一般没有连续介质力学内容,因此本书对此适当加强。一般普通物理力学教材中很少涉及应力、应变、固体形变等,本书对此作认真讨论。

7. 加强振动和波动

在后续的理论力学课程中一般也没有振动和波动内容,因此本书对此适当加强。普通物理力学教材中一般只推导弹性棒内纵波波动方程。本书从应力、应变、广义胡克定律出发,对固体弹性波、流体声波的波动方程作认真的推导。水面波是少数可以直接观察的波动,本书对水面波进行了较全面的分析。

8. 广义相对论的物理基础

以等效原理和广义相对性原理为基础,以爱因斯坦关于钟、尺假设为根据,依靠狭义相对论知识,本书尝试用普通物理的语言和方式,系统、完整、定性和半定量地讨论了广义相对论的基本原理、史瓦西场时空、自由粒子的运动、常加速度内禀刚性加速系,介绍了大爆炸宇宙学。

9. 考虑与理论力学的联系、衔接或贯通,与理论力学作为一个整体通盘考虑,内容优化组合。整合的重点是将原来理论力学中的牛顿力学部分去掉,其主要内容分别融合到普物力学和分析力学中。

作为大学物理教材,应该而且必须为学生留有充分的自主学习空间,因此相对而言本书内容更广泛和深入。参考本书的同学,可以根据自己的目标、能力、兴趣、爱好,以及能够利用的时间,阅读相应的部分。

书中融合了清华大学高炳坤教授关于惯性系的思想;“振动和波”一章重点参考了清华大学牟绪程教授的《波动与光学》(上册);特此表示感谢。

感谢陈泽民老师为组长的清华大学基础课工科多学时教学小组老师们的支持和帮助。

本书是我在清华大学多年教学的总结。教学相长是亘古不变的道理,书中也包含了学习我的课程的几千清华学子的聪明才智。

目 录

第 7 章 连续介质力学	1
7.1 应力和应变	1
7.1.1 应力	2
7.1.2 应变	2
7.1.3 胡克定律——应力和应变的关系	4
7.2 固体拉伸、弯曲、扭转	6
7.2.1 等截面直杆的拉压	6
7.2.2 矩形梁纯弯曲	8
7.2.3 圆柱扭转	12
7.2.4 允许应力、强度计算	14
7.3 流体静力学	15
7.3.1 静止流体内应力	15
7.3.2 静止流体平衡方程	17
7.3.3 重力场中的静流体	17
7.3.4 液体表面张力	23
7.3.5 用流体静力学方法讨论潮汐高度	24
7.4 流体的定常流动	26
7.4.1 描述流体运动的两种方法	26
7.4.2 定常流动和不定常流动	28
7.4.3 连续性方程——质量守恒定律	30
7.4.4 定常流动流体的动量定理	32
7.5 理想流体动力学	33
7.5.1 理想流体基本方程——欧拉方程	33
7.5.2 伯努利方程	35
7.5.3 伯努利方程的应用	37
7.5.4 可压缩理想气体绝热定常流动的伯努利方程	40
7.5.5 理想流体的环量定理(开尔文定理)	41
7.6 粘滞流体的流动	42
7.6.1 流体粘滞性规律	42

7.6.2	粘滞流体中的应力	45
7.6.3	粘滞流体的运动规律	46
7.6.4	湍流、雷诺数	49
7.6.5	边界层	52
7.7	流体中运动物体受到的阻力	53
7.7.1	不可压缩理想流体中运动的物体	54
7.7.2	粘滞流体中运动物体所受阻力	54
7.7.3	阻力系数、球体阻力	56
7.7.4	具有环量的运动物体受到的侧向力——机翼升力、 茹可夫斯基公式、马格努斯效应	59
习题		62
附录 7.1	开尔文定理的证明	69
第 8 章	振动和波	70
8.1	一维线性系统无阻尼自由振动、简谐振动	70
8.1.1	动力学方程及其通解	70
8.1.2	初始条件和确定解	72
8.1.3	能量关系、势能曲线和相图	72
8.1.4	由能量关系求振动规律	73
8.1.5	简谐振动	75
8.2	阻尼振动	80
8.2.1	考虑滑动摩擦阻力的弹簧振子系统的运动	80
8.2.2	阻力与速度成正比的阻尼振动微分方程及其通解	83
8.2.3	欠阻尼振动	86
8.3	受迫振动和自持振动	88
8.3.1	受迫振动的稳态解	88
8.3.2	受迫振动振幅与频率的关系、位移共振	90
8.3.3	稳态受迫振动的功能关系、速度共振	91
8.3.4	自持振动	93
8.4	振动的合成与分解	96
8.4.1	线性系统的叠加原理	96
8.4.2	同频且振动方向相同的简谐振动或标量简谐振动的合成	97
8.4.3	振动方向相同而频率不同的简谐振动的合成、拍	99
8.4.4	振动方向互相垂直谐振动的合成	100
8.4.5	振动分解、谐波分析	102
8.5	简谐波	106
8.5.1	波动	106
8.5.2	简谐波的描述	107
8.5.3	建立一维简谐波表达式	107

8.5.4	一维简谐波表达式	110
8.5.5	平面简谐波与球面简谐波	111
8.5.6	简谐波的复数表示、复振幅	114
8.6	波动方程与波速	115
8.6.1	固体中弹性纵波	115
8.6.2	固体中弹性横波	116
8.6.3	流体中声波	117
8.6.4	弦上横波	121
8.6.5	水面波	121
8.6.6	一维线性波动方程	125
8.6.7	相互作用的传播	126
8.7	波的能量传输	126
8.7.1	波的能量密度	126
8.7.2	能流和能流密度	128
8.7.3	声强和声强级	130
8.8	波的衍射、反射和折射	131
8.8.1	惠更斯原理	131
8.8.2	反射和折射定律	132
8.8.3	垂直入射时反射和透射波的振幅与位相	134
8.9	多普勒效应	136
8.9.1	运动波源在介质中产生的波动	137
8.9.2	运动接收器测量到的振动频率	138
8.9.3	普遍的多普勒效应	139
8.9.4	冲击波	140
8.10	简谐波的叠加和非简谐波的传播	140
8.10.1	波的独立传播和叠加原理	140
8.10.2	简谐波的叠加	142
8.10.3	非简谐波的分解、谐波分析	145
8.10.4	非简谐波的传播	146
8.10.5	群速度	148
8.11	驻波	150
8.11.1	单频驻波	150
8.11.2	两端固定有界弦的自由波动、简正模式	153
8.11.3	其他边界条件的简正模式	156
8.11.4	弦的受迫波动——驻波的应用 1	158
8.11.5	质点弹簧系统的运动——驻波的应用 2	159
8.12	非线性振动和混沌简介	162
8.12.1	一维振动系统	163
8.12.2	杜芬方程	165

8.12.3 李雅普诺夫指数和费根鲍姆常数	166
习题	169
附录 8.1 惠更斯等时摆	176
附录 8.2 质点弹簧系统的例子和计算	178
第 9 章 狭义相对论基础	182
9.1 狭义相对论的基本原理	182
9.1.1 古典力学时空观、力学相对性原理	182
9.1.2 电磁理论引起的困惑	185
9.1.3 爱因斯坦相对性原理与光速不变原理——狭义相对论的基本原理	187
9.2 狭义相对论的时空观	189
9.2.1 同时性的相对性——相对论时空观的精髓	189
9.2.2 同时性的相对性推论——运动时钟变慢和运动方向上长度变短	191
9.2.3 运动时钟变慢的定量计算	192
9.2.4 运动方向上长度收缩的定量关系	193
9.3 洛伦兹坐标变换	193
9.3.1 洛伦兹坐标变换	194
9.3.2 同时性的相对性与时序	196
9.3.3 运动时钟变慢	197
9.3.4 沿运动方向的运动长度缩短	199
9.3.5 洛伦兹坐标变换的应用	200
9.4 相对论速度和加速度变换	206
9.4.1 相对论的速度变换	206
9.4.2 相对论的加速度变换	207
9.5 相对论动力学基础	210
9.5.1 相对论质点动量定理	211
9.5.2 相对论质量	211
9.5.3 力与加速度关系——相对论质点动力学方程	214
9.5.4 相对论动能定理、相对论能量	217
9.5.5 静质量改变与释放能量、核反应	218
9.5.6 相对论能量与动量关系	219
9.6 质点质量、动量能量和力的相对论变换、光学多普勒效应	223
9.6.1 质量的相对论变换	223
9.6.2 动量能量的相对论变换	223
9.6.3 力的相对论变换	223
9.6.4 相对论动能定理满足狭义相对性原理	226
9.6.5 光学多普勒效应	227
9.6.6 相对论变换不变量	228

9.7 闵可夫斯基空间和四矢量介绍	230
9.7.1 闵可夫斯基空间	230
9.7.2 闵可夫斯基图	230
9.7.3 四维矢量	233
习题	238
第 10 章 广义相对论物理基础	244
10.1 广义相对论的基本原理	244
10.1.1 等效原理	244
10.1.2 广义相对论中的局域惯性系	245
10.1.3 广义相对性原理	246
10.1.4 光线偏折、时空弯曲	247
10.1.5 引力几何化、爱因斯坦场方程	249
10.2 史瓦西场中的时间和空间	250
10.2.1 爱因斯坦假设	250
10.2.2 弯曲空间概念	251
10.2.3 史瓦西场的固有时和真实长度	252
10.2.4 引力对标准钟和标准尺的影响	253
10.2.5 坐标钟和坐标尺、史瓦西坐标系	254
10.2.6 史瓦西场时空间隔——史瓦西场的时空结构	255
10.2.7 史瓦西场中固有时之间的关系、光谱线引力频移	259
10.2.8 史瓦西场中运动时钟、Cs 原子钟环球飞行实验	261
10.3 史瓦西场中自由粒子的运动	263
10.3.1 测地线假设——自由粒子运动微分方程	264
10.3.2 史瓦西场的守恒量	264
10.3.3 史瓦西场中自由粒子能量和角动量	265
10.3.4 史瓦西场中自由质点的运动方程和轨道方程	266
10.3.5 自由质点径向运动的定性讨论	267
10.3.6 质点运动轨道的相对论修正、行星近日点的相对论进动	270
10.3.7 史瓦西场中光子的运动规律	272
10.3.8 光子运动轨迹、太阳引力场中光线偏折角	273
10.3.9 光线传播时间、雷达回波延迟	275
10.3.10 弱引力场中时空弯曲对自由粒子运动的影响	277
10.4 直线运动的常加速度内禀刚性加速系	278
10.4.1 基本微分关系式	278
10.4.2 坐标变换关系的推导	279
10.4.3 内禀刚性直线运动非惯性系的性质	282
10.4.4 等效引力场 S' 系	283
10.4.5 双生子问题	284

10.5	爱因斯坦引力场方程、史瓦西外部解、黑洞	286
10.5.1	爱因斯坦引力场方程	287
10.5.2	史瓦西外部解	287
10.5.3	史瓦西场中空间曲面的形象	288
10.5.4	空间弯曲引起的行星近日点的进动	290
10.5.5	史瓦西黑洞	291
10.5.6	史瓦西黑洞的视界	292
10.5.7	黑洞的性质	293
10.6	大爆炸宇宙学简介	294
10.6.1	宇宙的概貌和恒星的演化	295
10.6.2	宇宙学原理和哥白尼原理	297
10.6.3	哈勃定律	299
10.6.4	宇宙时空的时空间隔	301
10.6.5	大爆炸宇宙学	303
10.6.6	宇宙动力学方程	304
10.6.7	宇宙早期历史和演化	305
10.6.8	宇宙的前景和年龄	309
	习题	311
	附录 10.1 双生子问题	312
附录 A	标量场和矢量场	318
A.1	标量场和矢量场	318
A.2	矢量场的散度和旋度、标量场的梯度	318
A.3	哈密顿算子 ∇ 及运算公式	318
A.4	矢量场的几个定理	319
A.5	柱坐标系和球坐标系中散度、旋度等表达式	320
附录 B	常用数据	321
B.1	常用天文数据	321
B.2	常用基本物理量数据	322
	习题答案	323
	参考文献	330

第 7 章

连续介质力学

在第 1 章已经引入了连续介质模型。连续介质是比质点、刚体更普遍的经典力学模型，固体、液体、气体等一切实际物体的实际运动，都可以纳入连续介质模型中统一研究。连续介质模型认为物质连续地分布在它所占有的容积之内，因此表征物质性质和运动的物理量，如密度、速度、动量、应力、温度等都是随空间位置和时间过程连续变化的。连续介质模型关注内部质元的运动，既有整体的运动，也有宏观的不均匀的流动，以及每个质元在平衡位置附近的振动和在连续介质中形成的波动。连续介质力学并不关注连续介质内部的微观结构、微观作用力以及相应的连续介质内在的性质。连续介质力学研究在宏观外力作用下所引起的连续介质内部的宏观作用力和变形，以及连续介质的宏观运动。

本章以固体为例讨论应力、应变以及应力、应变之间的关系。然后讨论流体的平衡、运动的力学规律。

7.1 应力和应变

作用在连续介质上的力分为两种：体积力和面积力。像引力、重力、惯性力、电场力等作用在场内的每一个质元（电荷）上，在分布着物质（电荷）的空间内处处都存在，称为体积力。而物体内部的相互作用力（除体积力外）是通过接触面实现的，称为面积力。讨论内力的一般方法是假想将物体切开，两部分之间的相互作用力就作用在截面上。如果把切下部分拿走，切下部分的作用由截面上的内力代表，不会改变留下部分的力学状态。已知外力和留下部分的运动，就可以得到作用在截面上的内力。

如图 7.1.1(a)，一根直杆放在水平面上。不计重力，呈自然状态。假想用一个截面将杆切开，留下的左半边不受外力，截面上也没有内力，说明在这样的自然状态下，物体内部没有相互作用力。图 7.1.1(b) 中杆两端在大小相等方向相反的力 $F_{\text{外}}$ 的作用下处于平衡。假想用一个截面将杆切开，为使留下的左半边依旧平衡，截面上必须有与 $F_{\text{外}}$ 平衡的、来自右边的作用力，这就是该截面上的内力 $F_{\text{内}}$ 。

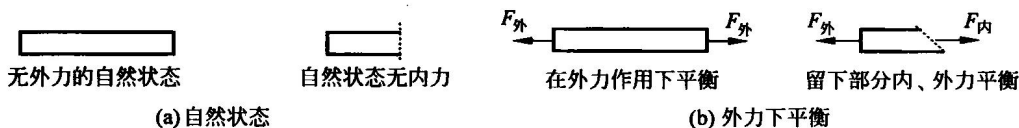


图 7.1.1

7.1.1 应力

1. 应力

外力作用下的物体内部出现相互作用力——内力。以固体为例研究如何描述物体内力的分布。

讨论固体内任意点 P 处内力的分布。如图 7.1.2, 假想过 P 作截面 π 将物体切开, 截面 π 的方位用其法向单位矢量 $\hat{n}$ 表述。设在 P 点周围小面积 ΔS 上内力为 ΔT , 显然 ΔT 不但与 ΔS 有关, 还与截面的方位有关。定义在截面 π 上的 P 处应力为

$$\sigma = \sigma(P, \hat{n}) = \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{\Delta T}{\Delta S} = \frac{dT}{dS} = \sigma_\tau + \sigma_n \quad (7.1.1)$$

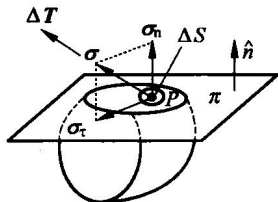


图 7.1.2

一般应力 σ 不在截面上, 将其分解为垂直于截面的正应力 (或称法向应力、张力) σ_n 和平行于截面的剪应力 (或称切应力) σ_τ 。应力单位是 Pa (与压强单位相同)。一般规定, 截面的法向为从内部指向外部, 相应的正应力的符号也以向外为正 (称为拉应力)、向里为负 (称为压应力)。

2. 应力状态

这样, 内力用应力描述, 应力分布代表内力分布情况。应力分布与一般的物理量的分布不同, $\sigma = \sigma(P, \hat{n})$ 不仅与点 P 位置有关, 而且还与切面方位 $\hat{n}$ 有关。于是有关于应力状态的定义:

P 处的应力关于方位的函数关系 $\sigma_P(\hat{n}) = \sigma(P, \hat{n})$, 叫 P 处的应力状态。

由四面体平衡条件可以证明 (见下面 7.3.1 节流体静力学中的讨论), 由互相垂直的三个截面上的应力可以计算出该处任意方位截面上的应力, 因此互相垂直的三个截面上的应力就完全决定了一点处的应力状态。

如果一个截面上只有正应力, 称为主应力, 该面称为应力主面。可以证明, 任意点必有三个互相垂直的应力主面。

7.1.2 应变

连续介质模型中质元有各种各样的位移, 可以改变质元之间的相对位置, 造成物体的形变, 就是物体形状的改变。物体的形状总可以用它各部分的长度和角度来表示。因此, 物体的形变总可以归结为长度的改变和角度的改变。物体的形变用应变 ϵ 描述, 因此物体有两种基本的应变形式: 线 (或拉、压) 应变和剪应变。线应变对应长度的改变, 剪应变对应角度的改变。

设已知物体内部各质元的位移。任意点 r 处质元位移 ξ 为

$$\xi(r) = \xi_x \hat{x} + \xi_y \hat{y} + \xi_z \hat{z}$$

下面用位移的空间变化率表示各种应变。先用熟悉的直杆均匀形变来了解线应变的物理意义和计算方法。设均匀的圆直杆长度为 l , 在轴向拉力作用下伸长 Δl , 形状未变仍为圆直杆。 Δl 就是直杆的长度的改变 (形变), 称为拉形变或线形变。显然形变是均匀的, 总形变与长度成正比。定义线 (拉、压) 应变

$$\epsilon = \Delta l / l$$

线应变就是单位长度上的长度改变. 线应变为无量纲量.

如果形变不均匀, 各处的应变不同, 就要讨论一点处的应变. 一个基本假设是位移和形变都是微小的, 即讨论的都是小变形.

如图 7.1.3, 只考虑 xy 平面的位移和形变. 设任意点 $A(x, y)$ 处形变前后的位移为 $\xi(\xi_x, \xi_y)$. 以任意点 $A(x, y, z)$ 为起点, 以 $\Delta x, \Delta y$ 为微小边长的矩形 $ABCD$, 形变后成为近似的平行四边形 $A'B'C'D'$, 既有长度的改变——线应变, 也有角度改变——剪应变. AB 段形变后为 $A'B'$, 去掉高阶小量, 得

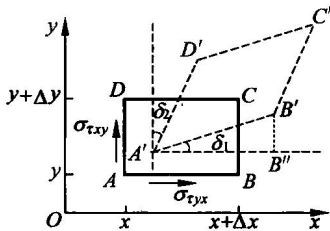


图 7.1.3

$$\Delta l = \overline{A'B'} - \overline{AB} = [(\Delta x + \Delta \xi_x)^2 + \Delta \xi_y^2]^{1/2} - \Delta x \approx \Delta \xi_x$$

其中, $\Delta \xi_x = \xi_x(x + \Delta x) - \xi_x(x)$, $\Delta \xi_y = \xi_y(x + \Delta x) - \xi_y(x)$. 由基本假设 $\Delta \xi_x / \Delta x \ll 1$, $\Delta \xi_y / \Delta x \ll 1$. 由此可见, 长度的改变主要是沿着长度方向的长度改变. 于是定义 A 处 x 方向线应变

$$\epsilon_x = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} (\Delta \xi_x / \Delta x) = \frac{\partial \xi_x}{\partial x} \quad (7.1.2a)$$

$\epsilon_x > 0$ 为拉应变, $\epsilon_x < 0$ 为压应变. 类似定义 A 处 y, z 方向线应变

$$\epsilon_y = \partial \xi_y / \partial y \quad (7.1.2b)$$

$$\epsilon_z = \partial \xi_z / \partial z \quad (7.1.2c)$$

一般情况下应变也是点函数, 不均匀形变时各处应变也不相同. 应变是位移的空间变化率(位移对空间坐标的偏导数).

图 7.1.3 中线段的夹角也发生变化, AB, AD 之间的夹角减小了, 从直角变成锐角, 出现了剪应变. 定义 A 处 xy 剪应变为角度改变量

$$\epsilon_{xy} = \lim_{\substack{\Delta x \rightarrow 0 \\ \Delta y \rightarrow 0}} (\delta_1 + \delta_2) = \partial \xi_x / \partial y + \partial \xi_y / \partial x \quad (7.1.3a)$$

其中 $\delta_1 \approx \tan \delta_1 = \overline{B'B''} / \overline{A'B''} \approx [\xi_y(x + \Delta x) - \xi_y(x)] / \Delta x$, 近似 $\overline{A'B''} \approx \Delta x$, 取极限得到

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \delta_1 = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \{ [\xi_y(x + \Delta x) - \xi_y(x)] / \Delta x \} = \partial \xi_y / \partial x$$

同样

$$\lim_{\Delta y \rightarrow 0} \delta_2 = \partial \xi_x / \partial y$$

即 A 处 xy 剪应变是 x 方向与 y 方向线段之间直角在变形后的减少值. $\epsilon_{xy} > 0$ 是实际减少为锐角; $\epsilon_{xy} < 0$ 是实际增加为钝角.

类似, 定义另外两个剪应变

$$\epsilon_{yz} = \partial \xi_y / \partial z + \partial \xi_z / \partial y \quad (7.1.3b)$$

$$\epsilon_{zx} = \partial \xi_z / \partial x + \partial \xi_x / \partial z \quad (7.1.3c)$$

在两种基本的应变形式的基础上考虑体应变. 体应变描述物体体积的改变. 均匀形变时, 体应变定义为

$$\epsilon_V = \text{体积增量} / \text{原来体积} = \Delta V / V$$

不均匀形变时, 讨论一点 A 处体应变. 以 $A(x, y, z)$ 处为起点沿 x, y, z 轴分别取 $\Delta x, \Delta y, \Delta z$ 的长度为边长作出小长方体, 体积为 $V = \Delta x \Delta y \Delta z$. 形变后体积增量为 ΔV , $\Delta V / V$ 为 A 附近的平均体应变. 当 $\Delta x, \Delta y, \Delta z$ 分别趋于零时 A 处平均体应变的极限为 A 处体应变, 即

$$\epsilon_V(x, y, z) = \lim_{\substack{\Delta x \rightarrow 0 \\ \Delta y \rightarrow 0 \\ \Delta z \rightarrow 0}} (\Delta V / V)$$

在 $\Delta x, \Delta y, \Delta z$ 很小时线应变分别为 $\epsilon_x, \epsilon_y, \epsilon_z$, 则形变后的边长近似为 $(1 + \epsilon_x)\Delta x, (1 + \epsilon_y)\Delta y, (1 + \epsilon_z)\Delta z$, 于是

$$\Delta V \approx (1 + \epsilon_x)(1 + \epsilon_y)(1 + \epsilon_z)\Delta x\Delta y\Delta z - V \approx (\epsilon_x + \epsilon_y + \epsilon_z)\Delta x\Delta y\Delta z$$

所以 $\Delta x, \Delta y, \Delta z$ 分别趋于零时 A 处体应变

$$\epsilon_V(x, y, z) = \epsilon_x + \epsilon_y + \epsilon_z = \partial \xi_x / \partial x + \partial \xi_y / \partial y + \partial \xi_z / \partial z = \nabla \cdot \xi \quad (7.1.4)$$

如果同时还存在剪应变, 剪应变引起的体积改变量是 ΔV 的高阶小量, 可以忽略, 因此, 剪应变的存在不影响上面结果。

7.1.3 胡克定律——应力和应变的关系

应力和应变共生共存, 相互之间有必然的联系, 体现了物质的本性。1678 年胡克 (R. Hooke) 提出在比例极限范围内单向拉压时应变和应力成正比, 以后推广到三维的线性关系成为实验定律, 称为胡克定律。

对于各向同性物体, 在比例极限范围内微小变形时, 一点处线应变只与该处的正应力有关, 而与剪应力无关; 另一方面, 该处的剪应变也只与该处的剪应力有关而与正应力无关, 因此可以分别讨论这两种关系。

1. 单一正应力引起的线应变

由于应变和应力是线性关系, 因此有叠加原理, 即多个正应力同时存在共同引起的线应变, 是每个正应力单独存在时引起的线应变之和。这样可以在单向应力状态(三个互相垂直的平面上只有一个面上有正应力)下进行实验, 研究应变和应力关系, 然后推广到一般情况。

以正应力 σ_x 为例。实验表明, 正应力 σ_x 分别引起纵向(x 方向)和横向(垂直于 x 方向)线应变, 在比例极限范围内, 这些线应变都与正应力 σ_x 成正比

$$\epsilon_x = \sigma_x / Y \quad \epsilon_y = \epsilon_z = -\mu \epsilon_x = -\mu \sigma_x / Y$$

其中 Y, μ 为与材料性质有关的弹性常数(弹性模量), Y 称为拉压弹性模量, 简称为弹性模量, 通常还称为杨氏(T. Yong)模量(单位 Pa)。 μ 称为横向变形系数或泊松(S. D. Poisson)比。 μ 无量纲, 以下将说明 μ 的取值范围为 $0 \leq \mu \leq 0.5$ 。

纵向线应变与相应的正应力的关系 $\epsilon_x = \sigma_x / Y$ 也称为单向应力情况下的胡克定律。

纵向线应变与相应的正应力同号, 即拉(压)应力引起拉(压)应变; 而横向线应变与相应的正应力反号。

2. 普遍的三向应力情况下线应变与正应力的关系

同时存在三个正应力为三向应力情况, 每个正应力都对三个线应变有贡献, 由叠加原理, 将三个应力的贡献加起来, 得到

$$\epsilon_x = \frac{1}{Y} [\sigma_x - \mu(\sigma_y + \sigma_z)] \quad (7.1.5a)$$

$$\epsilon_y = \frac{1}{Y} [\sigma_y - \mu(\sigma_x + \sigma_z)] \quad (7.1.5b)$$

$$\epsilon_z = \frac{1}{Y} [\sigma_z - \mu(\sigma_x + \sigma_y)] \quad (7.1.5c)$$

从中解出三个正应力, 利用 $(\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z) = Y\epsilon_V / (1 - 2\mu)$ 可以简化计算

$$\sigma_x = \frac{Y}{1+\mu} \left(\epsilon_x + \frac{\mu \epsilon_v}{1-2\mu} \right) \quad (7.1.6a)$$

$$\sigma_y = \frac{Y}{1+\mu} \left(\epsilon_y + \frac{\mu \epsilon_v}{1-2\mu} \right) \quad (7.1.6b)$$

$$\sigma_z = \frac{Y}{1+\mu} \left(\epsilon_z + \frac{\mu \epsilon_v}{1-2\mu} \right) \quad (7.1.6c)$$

3. 剪应变与剪应力的关系

剪应变与剪应力的关系很简单,就是正比关系

$$\epsilon_{xy} = \sigma_{xy}/G \quad (7.1.7a)$$

$$\epsilon_{yz} = \sigma_{yz}/G \quad (7.1.7b)$$

$$\epsilon_{zx} = \sigma_{zx}/G \quad (7.1.7c)$$

其中常数 G 称为剪切弹性模量。注意:应力、应变脚标意义不同。应变的脚标“ xy ”指在 xy 平面上变形,即 xy 平面上的矩形变成其他形状。剪应力脚标“ xy ”的第一个指标 x 指截面的法线方向,称为“面元指标”,第二个指标 y 指应力的方向,称为“方向指标”。如图 7.1.3 中 A 处 σ_{xy} 是垂直于 x 轴的平面上指向 y 方向的应力。由此可见, xy 平面上的剪应变不取决于 xy 平面上的剪切力,而是决定于与 xy 平面垂直的侧面上的剪切力。6 个剪应力之间有互等关系,只有 3 个是独立的

$$\sigma_{xy} = \sigma_{yx} \quad \sigma_{yz} = \sigma_{zy} \quad \sigma_{zx} = \sigma_{xz} \quad (7.1.8)$$

以上 3 个线应变与正应力的关系式和 3 个剪应变与剪应力的关系式统称为广义胡克定律。

4. 体应变与正应力关系

应用广义胡克定律得到

$$\epsilon_v = \epsilon_x + \epsilon_y + \epsilon_z = (1-2\mu)(\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z)/Y = \sigma_0/K \quad (7.1.9)$$

其中定义平均正应力 σ_0 (也称为体应力)和体弹性模量 K 为

$$\sigma_0 = (\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z)/3 \quad (7.1.10)$$

$$K = Y/[3(1-2\mu)] \quad (7.1.11)$$

如果 3 个正应力 $\epsilon_x, \epsilon_y, \epsilon_z$ 都是拉应力,必有 $\epsilon_v > 0$, 因此 $K > 0$, 所以要求泊松比 $\mu \leq 0.5$ 。

5. 各向同性固体只有两个独立的弹性模量

弹性理论证明,各向同性固体只有两个独立的弹性模量,即 Y, G, K, μ 中只有两个是独立的。一般选 Y, μ 为独立弹性模量,则另外两个弹性模量为 $K = Y/[3(1-2\mu)]$ 和

$$G = Y/2(1+\mu) \quad (7.1.12)$$

由于 $\mu \geq 0$, 所以 $G < Y$ 。虽然材料性质千差万别,但是泊松比大都在 0.35 左右, G, K, Y 的量级多为 $10^{10} \sim 10^{11}$ Pa, 差别并不太大。部分材料的弹性模量见表 7.1.1。

表 7.1.1 部分材料的弹性模量

材料	铝	铜	金	电解铁	铅	铂	银	熔融石英	聚苯乙烯
$K/10^{10}$ Pa	7.8	16.1	16.9	16.7	3.6	14.2	10.4	3.7	0.41
$G/10^{10}$ Pa	2.5	4.6	2.85	8.2	0.54	6.4	2.7	3.12	0.133
$Y/10^{10}$ Pa	6.8	12.6	8.1	21	1.51	16.8	7.5	7.3	0.36
μ	0.355	0.37	0.42	0.29	0.43	0.30	0.38	0.17	0.353

7.2 固体拉伸、弯曲、扭转

本节讨论固体三种最简单最基本的弹性变形: 拉伸、弯曲、扭转的应力状态, 利用胡克定律计算应力与应变。

7.2.1 等截面直杆的拉压

弹性变形体为均匀圆形截面直杆。为了通过实验定性确定应力的特点, 在圆杆侧面均匀地画上圆柱的母线(直线)和垂直于母线的圆(图 7.2.1(a))。两端面施均匀面积力对杆拉伸(压缩), 单位面积上的力为 σ (拉力 >0 ; 压力 <0)。设圆杆原长为 l , 均匀拉伸变形之后伸长 Δl , 线应变为

$$\varepsilon_z = \Delta l / l$$

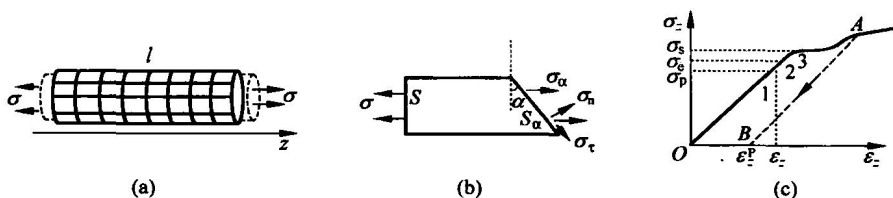


图 7.2.1

拉伸变形之后, 侧面的图形保持不变, 母线和圆仍然垂直, 表明在横截面上没有剪应力, 所以横截面为应力主面。而且由于横截面上各点位移均匀, 所以横截面上应力均匀。由平衡条件知, 横截面上正应力与端面上面积外力相等, 为

$$\sigma_z = \sigma$$

用与横截面成 α 角的斜截面(图 7.2.1(b))将圆杆切开, 设此截面上总应力为 σ_a , 由平衡条件得到 $\sigma_a S_a = \sigma S = \sigma S_a \cos \alpha$, 于是

$$\sigma_a = \sigma \cos \alpha$$

其中, 设圆杆横截面面积为 S , 斜截面面积为 S_a 。于是斜截面上正应力、剪应力分别为

$$\sigma_n = \sigma_a \cos \alpha = \sigma \cos^2 \alpha$$

$$\sigma_\tau = \sigma_a \sin \alpha = \sigma \sin 2\alpha / 2$$

由上面两式确定了圆杆内各点的应力状态。可见, $\alpha = 45^\circ$ 的斜截面上剪应力最大 $\sigma_{\tau, \max} = \sigma / 2$ 。

任意作圆杆的纵切面, 由平衡条件, 纵切面上正应力为零。

所以圆杆内一点处应力状态:

横截面上 $\sigma_x = \sigma$ 为主应力 ($\sigma_y = \sigma_z = 0$); 其他任意两个与横截面垂直的面上正应力都是零, 切应力都是零 ($\sigma_x = \sigma_y = \sigma_{xy} = \sigma_{xz} = \sigma_{yz} = 0$)。是单向应力状态。

由单向应力情况下的胡克定律

$$\sigma_x = \sigma = Y \varepsilon_z = Y \Delta l / l \quad (7.2.1)$$

由于圆直杆是严格的单向应力状态, 所以作材料性能的实验都是将材料制成圆直杆形状, 两端加上外力(载荷), 进行拉、压实验。下面介绍一种典型的(如低碳钢)材料拉伸实验