当代
杰出青年
科学文库

无穷维线性系统控制理论

郭宝珠 柴树根 著

科学出版社

当代杰出青年科学文库

无穷维线性系统控制理论

郭宝珠　柴树根　著

科 学 出 版 社

北　京

内 容 简 介

本书基本上是自洽的. 第一部分介绍了20多年来无穷维线性系统控制理论的最新发展, 特别是适定、正则系统的抽象理论. 也讨论了可控性、可观性、能稳性、可检性、可优性、可估性、实现, 以及极点配置等几个主要的基础性概念. 第二部分介绍了适定、正则系统理论在偏微分方程, 主要是在几个经典的高维偏微分方程中的应用. 第1章和附录中列出了本书所需的有穷维系统控制、泛函分析、黎曼几何的基本知识, 有利于初学者入门.

本书可以作为从事分布参数控制理论研究人员的参考书以及具有初步泛函分析、偏微分方程基础的研究生的教科书.

图书在版编目(CIP)数据

无穷维线性系统控制理论/郭宝珠, 柴树根著. 一北京: 科学出版社, 2012

(当代杰出青年科学文库)

ISBN 978-7-03-033330-8

I. ①无… II. ①郭… ②柴… III. ①无限维-线性系统理论:控制系统理论 IV. O231

中国版本图书馆CIP数据核字(2012) 第005039号

责任编辑: 徐园园　赵彦超 / 责任校对: 张凤琴
责任印制: 钱玉芬 / 封面设计: 陈　敬

科学出版社 出版
北京东黄城根北街16号
邮政编码: 100717
http://www.sciencep.com

中国科学院印刷厂印刷

科学出版社发行　各地新华书店经销

*

2012年1月第一版　开本: B5(720×1000)
2012年1月第一次印刷　印张: 26 1/4
字数: 511 000

定价: 98.00元

(如有印装质量问题, 我社负责调换)

前 言

20 多年来, 无穷维线性系统控制理论有了极大的发展. 这当然归功于偏微分方程系统控制理论的推动, 一个著名的例子是 J. L. Lions 的 Hilbert 唯一性原理, 因为这是无穷维系统控制的出发点. 但是, 偏微分方程控制本身的研究涉及的主要是数学中几个特别的概念, 如可控性、可观性与最优控制. 联系这些基本性质以及其他控制系统的性质却要在抽象的框架下对有穷维系统理论推广. 事实上, 这两条路线常常平行和相交. 偏微分方程控制提出一些新的问题, 抽象的理论则指导偏微分方程控制的研究方向.

20 世纪 80 年代以前关于无穷维线性系统控制理论的论著主要是两类: 一类直接以偏微分方程系统控制的名义, 讨论具体或者抽象的偏微分方程控制, 以 J. L. Lions 的著作为代表, 这类著作实际上是一种应用偏微分方程; 另一类以线性时不变系统的抽象框架展开, 但控制算子和输入算子都是有界的, 以 R. F. Curtain 和 H. Zwart 的一本有名的教材为代表. 后者最大的优势在于可以基本将有穷维系统控制的许多理论推广到无穷维系统上去, 但局限也是明显的. 有界的控制算子和输入算子一般对应分布的控制与量测, 在工程上实现困难, 所以对偏微分方程控制的指导有限.

从 20 世纪 80 年代开始, 偏微分方程系统控制特别地注重点控制和点量测, 或者一般的边界控制. 1979 年, 宋健和于景元发表"点测量、点控制的分布参数系统"一文, 认识到输入算子无界的重要性. 他们将所有的算子延拓到比原来的能量空间大得多的阴范空间中使得输入算子有界. 1983 年, L. F. Ho 和 D. L. Russell 发现像宋健和于景元所研究的系统, 虽然输入算子是无界的, 但从能量空间出发的轨道仍然在能量空间中. 这说明假如在阴范空间来研究这类系统, 则系统不可控, 这就失掉了系统最为重要的性质. 1988 年, J. L. Lions 发表其有名的"Hilbert 唯一性原理", 把这一思想从偏微分方程控制的角度发扬光大. 1987 年, D. Salamon 运用 Kalman 的公理化方法, 将无穷维线性系统作了抽象的研究. G. Weiss 在 1989 年关于控制和输出允许的两篇文章把 D. Salamon 的理论简化和系统化, 于是应运而生地出现了适定、正则系统 20 多年的大发展. 适定、正则系统是目前包含边界控制、边界观测等广泛的偏微分方程系统控制在内的非常一般的无穷维系统理论框架, 在关于控制输入、输出、传递函数、可控性、可观性、稳定性、最优控制、观测器、极小实现等诸多方面有了成熟的发展, 吸引了许多一流的分布参数控制学者的参与. 自然地, 新的抽象理论催生了偏微分方程系统控制的新概念, 这就是适定性与正则

性在线性偏微分方程控制系统中的引入.

作者亲身参与并见证了这些理论的发展, 但常苦于在研究中需要不时寻找这些散见于各种文献中的结果, 致使在培养研究生的过程中倍感辛劳. 目前仅有的几本专著或者侧重点不同, 或者不适合于研究生学习和研究相关前沿问题, 于是萌生了总结这些基本材料的念头. 一方面, 便于自己随时查找; 另一方面, 也可以让研究生有个系统学习的教科书, 而不至于难以入门. 本书就是在这种思想指导下的结果.

幸运的是, 本书第一作者得到了“山西省百人计划”的资助, 第二作者需要在山西大学的讨论班上培养青年教师和学生, 于是在边教边写的过程中整理出了本书的基本内容.

本书分为两大部分. 第一部分介绍抽象理论, 共 7 章. 第 1 章是预备知识, 主要介绍有穷维线性系统的一些主要理论, 以及无穷维线性系统所必需的理论知识, 如算子理论、连续算子半群理论以及 Sobolev 空间理论. 这里不加证明地列出主要结果, 原因之一是这些理论本身就是非常相关的学科, 有大量的相关著作; 原因之二是限于作者的偏好, 本书列出的内容基本上局限于作者在推广到无穷维系统时所用到的结果. 第 2 章和第 3 章介绍允许控制算子、允许观测算子的性质以及时域与频域表示. 第 4 章讨论适定系统的表示, 特别介绍了在偏微分方程控制中主要研究的两类一阶和二阶系统的适定性. 第 5 章介绍正则系统. 这类系统是无穷维系统中的有穷系统, 重点是其时域频域表示以及极重要的允许反馈, 其中允许的反馈是第 6 章引入能稳性和可检性的基础. 第 6 章和第 7 章则转入控制理论的抽象讨论. 第 6 章可控性与可观性的讨论导致了一阶和二阶系统的 Russell 原理和开环可控与闭环指数稳定性的等价性. 第 7 章则是可优性、可估性、实现、极点配置等几个控制问题的讨论, 其中可优性和可估性是第 6 章能稳性和可检性的推广, 它们和无穷维系统的 LQ 问题有极大的关系. 也导致了系统指数稳定性和输入输出稳定性的关系, 表明了系统各个概念之间的有机统一. 第二部分是适定、正则系统理论在线性偏微分方程控制中的应用, 这是一个由抽象的理论框架导致的全新的高维线性偏微分方程控制理论. 这部分的工作就是要将过去零星的一些线性偏微分方程控制系统纳入到适定、正则系统理论的框架内, 以使这些方程具有系统学上的意义, 反映了作者及其学生、合作者在这个方向上的努力. 第 8 章讨论高维 Schrödinger 方程的适定性. 第 9 章讨论波动方程的适定性与正则性. 这两章都包括了常系数和变系数的不同情况. 虽然常系数是变系数的特殊情况, 但常系数的讨论简单, 便于学习, 变系数则需要一些黎曼几何的知识. 虽然在附录中介绍了一些黎曼几何的基本知识, 但对于不熟悉黎曼几何的读者来说, 常系数的讨论可以使他们更快地进入这一研究领域而不为复杂的数学所迷惑. 第 10 章是关于板方程的适定性与正则性的讨论, 也分为常系数与变系数两种情况. 第 11 章讨论了一般弹性系统的适定性与正则性, 这是一种强耦合的波动方程. 第 12 章讨论了波动方程和板方程在弱耦合情形下的适

定性与正则性. 这在噪声控制等领域有非常重要的应用. 第 13 章是 Naghdi 壳的适定性与正则性, 这部分内容不常见于文献. 这些章节所讨论的问题实际上是偏微分方程控制最早研究的对象, 主要的是可控性、可观性和指数稳定性. 这里主要讨论在适定、正则理论框架下的性质. 这部分内容相对比较独立, 读者可根据自己的兴趣取舍. 特别是在 13.4 节, 给出了不是适定的高维偏微分方程的例子, 目的是要告诉读者, 任何一种抽象框架都不可能包罗万象, 事实上也不存在这样的框架. 这正是这门学科还需要不断发展的动力. 每章的后面都有简单的总结, 列出了主要的文献及其相关的工作, 以便读者继续学习参考所用. 附录中主要列出了第二部分需要的相关数学结果, 特别是黎曼几何的知识, 一是为了结论的完整, 二是黎曼几何不同于第 1 章的预备知识, 并不是无穷维系统控制研究人员常具备的知识.

这本讲义性质的著作很难称得上完整, 还需要在教学实践中不断地修订、补充以及简化证明. 无穷维系统控制是公认的运用数学最多的控制分支, 其研究人员也以有数学背景的人居多. 但本书尽量淡化数学知识的介绍, 立足控制理论的基本方向, 虽然这是不容易的. 无穷是一个非常具有数学味道的概念, 没有基本的数学基础, 要讲清楚是很难的, 有时是不可能的. 事实上, 本书仅仅介绍了这个抽象框架的基本结果, 这些结果是任何从事无穷维系统理论研究的研究人员都需要掌握的基础知识, 而过于精细的结果则必须留待不同需求的读者自行浏览相关文献. 无论如何, 作者希望本书有自己的特点, 即研究人员可以以此作为起点, 也可以较轻易地从中查找到自己需要的内容.

作者的观点是抽象的控制理论如同一个房子, 而偏微分方程控制的例子如同房子中的家具. 没有家具的房子仅仅是个摆设, 但没有房子的家具则难以显出其位置. 虽然本书在两个方面都作了努力, 但同其他任何一本著作一样, 不足之处是难免的. 读者的反馈意见是我们的财富.

郭宝珠
中国科学院数学与系统科学研究院
柴树根
山西大学
2011 年 8 月

符 号 说 明

x	n 维向量 $(x_1, x_2, \cdots, x_n)$
$u(x)$	多元函数 $u(x_1, x_2, \cdots, x_n)$
$\partial\Omega$	区域 Ω 的边界
$u\|_{\partial\Omega}$	函数在边界 $\partial\Omega$ 上的取值
$\mathbb{R}$	$(-\infty, +\infty)$
$\mathbb{R}^+$	$(0, +\infty)$
$\mathbb{C}$	全体复数的集合
$C^m(a,b)$	开区间 (a,b) 上全体 m 阶连续可微函数的集合
$C^m[a,b]$	闭区间 $[a,b]$ 上全体 m 阶连续可微函数的集合
$C^m(\Omega)$	区域 Ω 上全体 m 阶连续可微函数的集合
$C(\mathbb{R})$	实数轴上全体连续函数的集合
$C^m(\mathbb{R})$	实数轴上全体 m 阶连续可微函数的集合
$C_0^m(\mathbb{R})$	实数轴上除有限区间外恒为 0 的全体 m 阶连续可微函数的集合
$C_0^\infty(\mathbb{R})$	实数轴上除有限区间外恒为 0 的全体无穷阶可微函数的集合
$H^m(\Omega)$	区域 Ω 上 m 阶的 Sobolev 空间
$L^2_{\mathrm{loc}}(\Omega)$	区域 Ω 上的局部 L^2 可积函数
H_1	阳范空间
H_{-1}	阴范空间
$\sigma(A)$	算子 A 的谱集合
$\sigma_{\mathrm{p}}(A)$	算子 A 的点谱集合
$\sigma_{\mathrm{r}}(A)$	算子 A 的剩余谱集合
$\sigma_{\mathrm{c}}(A)$	算子 A 的连续谱集合
$\tilde{A}$	算子 A 的延拓
e^{At}	算子 A 生成的 C_0- 半群
C_{L}	算子 C 的 L 延拓
C_Λ	算子 C 的 Λ 延拓
$\Sigma_{\mathrm{c}}(A,B)$	控制系统 $\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$
$\Sigma_{\mathrm{o}}(C,A)$	观测系统 $\dot{x}(t) = Ax(t), y(t) = Cx(t)$
$\mathcal{L}(X,Y)$	X 到 Y 的所有有界线性算子的集合
$\Phi_\tau, \Phi(\tau)$	控制系统 $\Sigma_{\mathrm{c}}(A,B)$ 的输入映射
$\Psi_\tau, \Psi(\tau)$	控制系统 $\Sigma_{\mathrm{o}}(C,B)$ 的输出映射
$F_\tau, F(\tau), F_\infty$	控制系统的输入输出映射

(M,g)	带有度量 g 的黎曼流形
$\mathcal{X}(M)=T(M)=\Lambda(M)$	M 上所有向量场
$T^k(M)$	M 上所有张量场
D^2f	函数 f 的 Hessian 矩阵
$\mathrm{tr}S$	二阶张量 S 的迹
R_{XY}	曲率算子
$R(\cdot,\cdot,\cdot,\cdot)$	曲率张量
$\mathrm{Ric}(\cdot,\cdot)$	Ricci 张量
∇	梯度算子
Δ	Laplace 算子
∇_g	度量 g 下的梯度算子
Δ_g	度量 g 下的 Laplace 算子
$\boldsymbol{\Delta}$	Hodge-Laplace 算子
$\mathrm{div}X$	向量场 X 的散度
$L^2(\Omega,T^k)$	Ω 上平方可积的所有 k 阶张量场
$H^k(\Omega,\Lambda)$	Ω 上所有阶数小于 k 的协变微商都平方可积的 1 形式的全体
$\mathrm{supp}(u)$	u 的支集, 即 u 不为零的自变量的集合

目　　录

第二部分　在偏微分方程控制系统中的应用

第一部分
适定、正则系统理论

本部分专门讨论适定、正则系统理论的基本内容. 基本思路是从可能不太严格的状态空间出发, 然后到抽象的公理化表示, 力图说明这两者之间是统一的. 状态空间的表述有直观的基础, 而公理化的语言有利于证明的简化. 这些理论是基本的, 基本上是将状态空间的算子表达成有穷维系统的矩阵. 当然, 这只是形式上的, 实际的研究仍需小心. 所有的出发点其实都是如何把状态变量、输出变量用控制输入和初始状态严格地表示出来, 而这些在有穷维系统中都不存在, 这也可以看出无穷维系统控制的难度. 没有基本的准备, 就连状态空间也写不出来. 在抽象化以后的相当部分内容是一些有穷维系统理论在无穷维上的推广, 这里不可能一一推广, 因而我们只注重几个基本的推广. 读者可以透过这些推广领略无穷维系统控制理论本身的特点.

第1章 预备知识

本章对本书所需要的基本数学理论作些简单的回顾. 这些知识是必需的, 如算子理论与算子半群理论. 也有一些是启发性的, 如有穷维线性系统控制理论. 我们不可能介绍过多的内容, 因为任何部分事实上都是一个专门的学科. 这里只是列出一些必要的知识且不加证明, 因这些理论对从事无穷维控制理论研究的人来说是熟知的.

1.1 有穷维线性系统

1.1.1 系统描述

古典的调节原理利用频域法研究单输入单输出系统. 在时间域上, 输入输出的关系可以写成

$$y(t)=\int_0^t g(t-\tau)u(\tau)\mathrm{d}\tau, \tag{1.1}$$

其中 u 为系统的输入, y 为系统的输出, 都取值于实数域或复数域. 系统 (1.1) 称为因果的, 因为 t 时刻的系统输出只依赖于 t 时刻以前的系统输入. (1.1) 两边取 Laplace 变换, 就得到系统的频域表示为

$$\hat{y}(s)=G(s)\hat{u}(s),$$

其中 $\hat{f}$ 为函数 f 的 Laplace 变换,

$$\hat{f}(s)=\int_0^\infty \mathrm{e}^{-st}f(t)\mathrm{d}t, \quad s \text{ 为复数}.$$

传递函数由于运算简单, 如上面把卷积运算变为乘法运算, 故在线性系统理论中仍然起着重要的作用. 状态空间法是用时间域来描述系统的, 状态空间法的引入使得系统研究的范围大大扩大了, 虽然对单输入单输出系统来说, 频域法和时频法基本上是等价的. 一个时不变的有穷维控制系统可用如下的常微分方程描述:

$$\begin{cases} \dot{x}(t)=Ax(t)+Bu(t), & t\geqslant 0,\ x(0)=x_0, \\ y(t)=Cx(t)+Du(t), & t\geqslant 0, \end{cases} \tag{1.2}$$

其中 $x(t)\in\mathbb{R}^n$ 称为系统的状态, x_0 为系统状态的初值, $u(t)\in\mathbb{R}^m$ 为系统的控制 (或输入), $y(t)\in\mathbb{R}^p$ 为系统的观测 (或输出), A 为系统矩阵, B 为控制 (或输入) 矩

阵, C 为观测 (或输出) 矩阵, D 为直接传输矩阵. 这里所有的矩阵都假设为实数矩阵, 并且根据空间的维数取适当的维数. 当 $m=p=1$ 时, 系统就是单输入单输出系统 (SISO); 否则, 为多输入多输出系统 (MIMO). 从 u 到 y 的传递函数 $G(s)$ 定义为

$$\hat{y}(s)=G(s)\hat{u}(s),$$

其中 $\hat{y}$ 和 $\hat{u}$ 分别为 y 和 u 当初值 $x_0=0$ 时的 Laplace 变换,

$$G(s)=C(s-A)^{-1}B+D.$$

显然, G 在 A 的特征值外的区域上是 s 的解析矩阵函数, 每一个元素都是真有理分式. 特别地,

$$\frac{G(s)-G(\beta)}{s-\beta}=-C(s-A)^{-1}(\beta-A)^{-1}B \quad 或 \quad G'(s)=-C(s-A)^{-2}B.$$

因此, $G(s)$ 的微分由 (A,B,C) 唯一确定, D 就是 (A,B,C) 确定 $G(s)$ 时的常数矩阵. 一个简化的系统 (1.2) 的表示可以写为

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ u \end{pmatrix}. \tag{1.3}$$

当初值给定, 系统 (1.2) 的动态响应 $x(t)$ 和 $y(t)$ 可由下面的公式确定:

$$\begin{cases} x(t)=\mathrm{e}^{At}x_0+\displaystyle\int_0^t \mathrm{e}^{A(t-s)}Bu(s)\mathrm{d}s, \\ y(t)=C\mathrm{e}^{At}x_0+C\displaystyle\int_0^t \mathrm{e}^{A(t-s)}Bu(s)\mathrm{d}s+Du(t), \end{cases} \tag{1.4}$$

或者在时域中写成如下算子的形式:

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \mathrm{e}^{At} & \displaystyle\int_0^t \mathrm{e}^{A(t-s)}B\cdot\mathrm{d}s \\ C\mathrm{e}^{At} & C\displaystyle\int_0^t \mathrm{e}^{A(t-s)}B\cdot\mathrm{d}s+D \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_0 \\ u(\cdot) \end{pmatrix}, \tag{1.5}$$

其中 $\mathrm{e}^{A(t-t_0)}$ 称为系统的转移矩阵,

$$\mathrm{e}^{A(t-t_0)}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{A^n}{n!}(t-t_0)^n. \tag{1.6}$$

在矩阵范数下, 上面的级数是收敛的. 动态系统 (1.2) 的脉冲矩阵定义为

$$g(t)=\mathcal{L}^{-1}\{G(s)\}=C\mathrm{e}^{At}1_+(t)B+D\delta(t),$$

其中 $\delta(t)$ 为单位脉冲函数, $1_+(t)$ 为单位阶跃函数,

$$1_+(t)=\begin{cases}1, & t\geqslant 0,\\ 0, & t<0,\end{cases}\tag{1.7}$$

$\mathcal{L}^{-1}$ 表示逆 Laplace 变换. 于是当初值 $x_0=0$ 时, 系统 (1.2) 的输入输出关系可以表示为

$$y(t)=(g*u)(t)=\int_0^t g(t-\tau)u(\tau)\mathrm{d}\tau.$$

这正好是 (1.1) 表示的输入输出关系.

为了讨论方便起见, 简记控制系统

$$\Sigma_{\mathrm{c}}(A,B):\dot{x}(t)=Ax(t)+Bu(t)$$

和观测系统

$$\Sigma_{\mathrm{o}}(C,A):\dot{x}(t)=Ax(t),\ y(t)=Cx(t).$$

下面的结论是有穷维线性控制系统的一些基本结果. 除去极点配置的充分条件可能有点难度外, 有兴趣的读者事实上可以对其他内容进行简单的证明.

1.1.2 可控性

可控性是系统最主要的特性. 控制策略对一个可控的系统有几乎任意操纵的能力.

定义 1.1 *假设控制 $u\in U$, 其中 U 为 $\mathbb{R}^m$ 中的一个集合. 如果对于任意给定的初始状态 $x(0)=x_0\in\mathbb{R}^n$, 终端状态 $x_1\in\mathbb{R}^n$, 存在 $t_1>0$ 以及 (分片连续的) 输入 $u(\cdot)$, 使得系统 $\Sigma_{\mathrm{c}}(A,B)$ 的解满足 $x(t_1)=x_1$, 则称系统 $\Sigma_{\mathrm{c}}(A,B)$ 为可控的, 否则, 称为不可控的.*

注 1.1 *$\Sigma_{\mathrm{c}}(A,B)$ 是可控的当且仅当*

$$\bigcup_{t\geqslant 0}\mathrm{Range}\left\{\int_0^t \mathrm{e}^{A(t-s)}Bu(s)\mathrm{d}s,\ \text{对所有分片连续函数}u(\cdot)\in U\right\}=\mathbb{R}^n.$$

下面的 Kalman 判据确定了系统 $\Sigma_{\mathrm{c}}(A,B)$ 可控的代数判别准则.

定理 1.1 *假设 $U=\mathbb{R}^m$, 则 $\Sigma_{\mathrm{c}}(A,B)$ 可控当且仅当控制矩阵*

$$P_{\mathrm{c}}=(B,AB,A^2B,\cdots,A^{n-1}B)$$

满足 $\mathrm{rank}(P_{\mathrm{c}})=n$.

需要指出的是, 定义 1.1 中的 t_1 可以是任意固定的数, 在证明定理 1.1 的过程中可以看出, 这主要是由于系统的控制没有约束的缘故.