普通高等教育"十一五"国家级规划教材

近代测量数据处理与应用

Advanced Theory and Application of Surveying Data

张 勤 张菊清 岳东杰 等 编著

测绘出版社

普通高等教育"十一五"国家级规划教材

近代测量数据处理与应用

Advanced Theory and Application of Surveying Data

张　勤　张菊清　岳东杰
赵超英　高雅萍　黄观文　瞿　伟　编著

测绘出版社
·北京·

内容简介

本书是“十一五”国家级规划教材。力图涵盖现代测量数据处理最常用的基本数据处理方法。其内容主要包括:近代数据处理发展概述、内涵及展望;数据处理中参数估计的几种常用估计方法;秩亏自由网平差方法及其基准关系;针对不同类观测值的验后方差分量估计;观测值中含有系统误差的附加系统参数平差方法;处理粗差的数据探测与稳健估计法的原理与方法;针对随机参数和动态数据的最小二乘配置与卡尔曼滤波;处理变量间相关关系的近代回归分析等。

本书可作为测绘工程专业本科生、研究生的教材,也可作为从事数据处理相关专业人员的参考书。

图书在版编目(CIP)数据

近代测量数据处理与应用/张勤等编著. 一北京 :
测绘出版社,2011.4

普通高等教育“十一五”国家级规划教材

SBN 978-7-5030-2265-4

Ⅰ. ①近… Ⅱ. ①张… Ⅲ. ①测量—数据处理一高等
学校一教材 Ⅳ. ①P2

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2011)第 054576 号

责任编辑 田 力 **执行编辑** 赵福生 **封面设计** 李 伟 **责任校对** 董玉珍 李 艳

出版发行	测绘出版社		
地　　址	北京市西城区三里河路 50 号	**电　　话**	010－68531160(营销)
邮政编码	100045		010－68531609(门市)
电子信箱	smp@sinomaps. com	**网　　址**	www. sinomaps. com
印　　刷	北京金吉士印刷有限责任公司	**经　　销**	新华书店
成品规格	184mm×260mm		
印　　张	9.5	**字　　数**	234 千字
版　　次	2011 年 4 月第 1 版	**印　　次**	2011 年 4 月第 1 次印刷
印　　数	0001－3000	**定　　价**	19.80 元

书　　号 ISBN 978-7-5030-2265-4/P・525

序

测量数据必然含有误差。测量工作者的主要任务是寻求科学合理的准则，融合各类测量数据，以便消除矛盾，提高测量结果的精度和可靠性。随着空间对地观测技术日益广泛地应用于大地测量，近代数据处理理论及方法在其中的作用也日渐彰显。因此，在已有经典测量数据处理知识的基础上，学习掌握现代测量数据处理理论及其方法，已成为当今测量数据处理，乃至数字信息处理的必需。本书正是基于这一目的，在系统归纳经典测量数据处理知识的基础上，较系统地介绍了近年来测量数据处理理论与应用的主要成就。

本书内容广泛实用。系统归纳了经典测量误差类型和相应的最小二乘平差原理，以及其他几种常用的数据处理方法。针对函数模型的不完善问题，介绍了秩亏自由网平差原理和中国学者发展的拟稳秩亏网平差原理、有偏估计原理，以及附加系统参数的平差模型及其参数估计方法；针对随机模型的不完善，系统讨论了方差分量估计理论及最新进展；针对测量中可能存在的异常误差，描述了异常误差诊断和参数抗差估计；针对动态测量数据情形，介绍了卡尔曼滤波理论。在函数模型和随机模型的结合方面，介绍了测量中广泛使用的最小二乘配置理论，以及近代参数回归模型和非参数回归模型。

本书结构严谨流畅，内容与体系组织合理新颖。注重由浅入深、通俗易懂，强调理论方法的应用性。便于具有一定测量数据处理基础知识的学生自学，又可供科研和生产一线的科技工作者在实际数据处理中参考。

本书反映了作者群体长期科研、教学及其实际测量数据处理经验的积累。殷切期盼本书能推动中国测量数据处理的研究与实践，能为高年级本科生和研究生学习及较全面掌握测量数据处理理论与方法提供重要参考。

杨元喜
中国科学院院士
2010 年 12 月

前　言

现代数学理论和计算机的发展，拓展了测量数据处理的理论基础与算法能力。现代地球信息观测与信息分析管理的手段，特别是全球卫星定位系统、遥感、地理信息系统，不仅使信息数据的类型更为复杂多样，而且对信息数据处理的精确度要求更高，时效性要求更强，极大地拓展了现代数据处理的内涵与外延，促进了现代数据处理理论的发展，并扩大了测量数据处理的应用领域。秩亏自由网平差、稳健估计、卡尔曼滤波等许多现代测量数据处理理论与方法已成为当代测量数据、信息数据处理中不可或缺的基本方法。随着数字地球、智慧地球信息科学的发展，现代测量数据处理在生产和研究中的重要性将进一步彰显。

基于此，作者在多年从事测量数据处理教学、空间定位与空间信息理论技术及应用的科学研究基础上，编写了《近代测量数据处理与应用》这本"十一五"国家级规划教材，其目的是使学生在拥有经典平差理论知识的基础上，进一步了解和掌握现代测量数据处理的理论与方法，为今后的科研和生产打下重要的基础。

全书共分 8 章，力图涵盖现代测量数据处理最常用的基本数据处理方法。第 1 章近代数据处理发展概论，分析总结了近代数据处理的内涵，结合经典高斯-马尔可夫模型，论述了近代测量数据处理的进展，最后展望了近代测量数据处理的发展。第 2 章参数估计方法，论述了数据处理中常用的几种估计方法原理。第 3 章秩亏自由网平差，给出了普通秩亏网平差、拟稳平差、加权秩亏网平差的原理与方法，分析了不同自由网平差的基准，并在此基础上介绍了不同自由网平差结果之间的转换方法。第 4 章验后方差分量估计，从定权不准确对测量平差结果的影响出发，针对不同类观测值的定权问题，介绍了赫尔默特方差分量估计和最小范数二次无偏估计的原理与方法。第 5 章附加系统参数平差及有偏估计，着重讨论当观测值中含有系统误差时采用的附加系统参数平差方法，内容包括附加参数平差原理、附加参数模型选择、对附加参数的统计检验以及因不正确地引入附加参数导致模型病态的处理方法。第 6 章数据探测和稳健估计，在分析总结观测值中含有异常值时对测量平差值影响规律的基础上，探讨了可靠性理论，给出了数据探测法和稳健估计法的原理与方法。第 7 章最小二乘配置与卡尔曼滤波，主要介绍参数有随机性质时的最小二乘滤波、推估与配置的原理和方法，对动态线性系统数学模型的建立、卡尔曼滤波方法及其应用作了较为系统而详细的描述。第 8 章近代回归分析，主要讨论如何应用测量平差的手段来分析变量之间存在的相互关系，包括回归分析的数学模型、回归模型参数的估计及检验方法、回归方程的预报和控制方法，以及应用不久的半参数回归和整体最小二乘回归的原理。

本书在立足前瞻性和系统性的同时，着眼于实用性，目的在于让读者能学以致用。因此，编写中注重通俗易懂、简洁清晰、学用结合。在针对测量数据处理所讲述原理的基础上，尽可能结合现代测量手段进行举例说明。

本书的第 1 章由长安大学张勤教授编写，第 2 章由长安大学黄观文、瞿伟博士编写，第 3、8 章由长安大学张菊清副教授编写，其中 § 8.4 由黄观文博士编写，第 4、7 章由河海大学岳东杰教授编写，第 5 章由成都理工大学高雅萍副教授和长安大学张菊清副教授编写，第 6 章由长

安大学赵超英副教授编写。全书由张勤教授和张菊清副教授统一修改定稿。

本书完稿后，承蒙我国著名测量数据处理专家陶本藻教授对全书进行了认真审阅，提出了许多宝贵的修改意见，进一步提升了本书的水平，在此对陶本藻教授表示诚挚的感谢！

杨元喜院士对本书的编写给予大力指导，在百忙之中审阅书稿并为本书作序，在此对杨院士给予的支持深表感谢！

由于时间和水平有限，本书中难免存在不少问题，我们恳请使用本书的师生和广大读者给予批评指正，以便再版时修正。

作者

2010 年 12 月

目　录

第1章 近代数据处理发展概论

§1.1 数据处理与测量误差

随着计算机技术、传感器技术、通信技术以及网络技术的快速发展，当今世界已进入以信息技术为主要标志的信息化时代。数字信息采集与获取、数字传输、数据处理与存储、信息提取与分析以及信息发布等技术组合构成一个完整的信息链，而其中的数据处理贯穿整个信息化的过程，在其中起着确保信息正确获取、提炼、分析与评价的关键作用。任何数据信息只有通过相应的数据处理和分析，才能最优地满足各类用户的需要。数据处理主要包含如下四个方面的内涵：

(1)现实世界的模型化。研究现实世界的本质、内在联系与特征，采用正确的数字化方法并建立相应的数学模型来正确描述现实世界。

(2)模型的最优化方法与准则。研究如何基于数学模型再现现实世界模型。针对不同的数学模型，选择合适的最优化准则及其解算的正反演算法和参数估计方法，研究采集数据及其所估计参数具有的统计性质。

(3)信息质量控制与评价。研究、分析数据的误差统计规律，建立误差理论和处理方法，其内容包括数据的误差分布、精度指标、误差估计、检验与控制，以及数据的可靠性理论与质量控制，由此实现对数据质量的控制和精度与可靠性评价。

(4)数据挖掘。研究如何从大量的、有噪声的、模糊的随机数据中发现和提取隐含在其中的有用的信息和知识的过程。数据挖掘涉及多学科技术的集成，包括数据库技术、统计、机器学习、高性能计算、模式识别、神经网络、数据可视化、信息提取、图像与信号处理和空间数据分析。

测量数据来源于地球空间及其有关的信息。数据采集手段是现代化的对地观测技术，包括以智能化全站仪、三维地面激光扫描仪为代表的地对地观测，以摄影测量、激光雷达遥感和全球导航定位系统为代表的空对地观测和卫星测量技术。测量数据的特点是多手段、多分辨率和多时态等，而且数据获取方式是自动化和实时化。

测量数据的上述特点决定了近代测量数据处理(测量平差)的内容和发展。

采集和量测(观测)是获取信息的必要前提(必要观测)，也是数据处理中任何一项研究的必要信息。而由于在信息的采集和量测(观测)中不可避免地存有噪声或误差，于是多余观测信息就会在信息系统中产生矛盾，这需要通过数据处理，估计这些误差特征条件，建立正确数学模型，选择最优化方法和准则求解参数，最大限度地排除误差干扰，获取最佳信息，并由数据质量评价方法和误差理论给出所获信息的精度与可靠性指标。

测量误差的特性及其误差理论是随着信息和数据采集手段的更新和发展而发展。在以前很长一段时期，认为测量误差主要是服从正态分布的偶然误差。随着现代对地观测技术的发展，测量误差通常同时包含偶然误差、系统误差和粗差，而且在一定程度上系统误差和粗差的

出现将不可避免。因此,测量误差理论的扩展和质量控制新方法的研究也是测量平差的一个主要任务。

本书所研究的测量数据处理理论和方法主要集中在上述数据处理内涵中的(2)、(3)两个内容,即研究各类实际问题的数据特点,建立平差模型,提出参数的最优化估计准则及其相应算法,进行测量数据的质量控制与数据评价。

§1.2 最小二乘与经典平差模型

1794 年,年仅 17 岁的德国大数学家高斯(C. F. Gauss)首先提出最小二乘法,解决了如何从多个观测值组成的线性矛盾方程组中求解未知参数的最佳估值这一难题,并在 1801 年用此方法确定了谷神星轨道。直到 1809 年高斯才在《天体运动的理论》一文中正式发表了他的方法。法国数学家勒让德(A. M. Legendre)于 1809 年在《决定卫星轨道新方法》一文中,从代数观点也独立地提出了最小二乘法,并定名为最小二乘法。因而也有后人将最小二乘称之为高斯-勒让德方法。

高斯对最小二乘进行了长期研究,在其发表的题为《加以最小误差的观测组合理论》的巨著中证明:只要各观测误差分量为随机独立的偶然误差,则可由其导出最小二乘原理

$$\boldsymbol{V}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}\boldsymbol{V}=\min \tag{1.2.1}$$

1912 年,俄国数学家马尔可夫(A. A. Марков)发表文章再次系统论述了高斯最小二乘准则,给出了著名的高斯-马尔可夫模型,即平差的数学模型,其由两部分组成。

函数模型:

$$\boldsymbol{L}=\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}+\boldsymbol{\Delta} \tag{1.2.2}$$

随机模型:

$$\left.\begin{aligned}&E(\boldsymbol{\Delta})=\boldsymbol{0}\\&D(\boldsymbol{\Delta})=\sigma_0^2\boldsymbol{Q}=\sigma_0^2\boldsymbol{P}^{-1}=\boldsymbol{D}_{\Delta}\end{aligned}\right\} \tag{1.2.3}$$

式中,$\boldsymbol{L}$ 为观测向量;$\boldsymbol{\Delta}$ 为真误差向量;$\boldsymbol{A}$ 为 $\boldsymbol{X}$ 的系数矩阵;$E(\cdot)$为数学期望;$D(\cdot)$为数学方差;$\boldsymbol{D}_{\Delta}$、$\boldsymbol{Q}$、$\boldsymbol{P}$ 分别为 $\boldsymbol{\Delta}$ 或 $\boldsymbol{L}$ 的协方差矩阵、协因数矩阵和权矩阵,它们均为对角矩阵;而 σ_0^2 为单位权方差。

函数模型中的系数矩阵 $\boldsymbol{A}$ 应是列满秩矩阵,即 $\mathrm{R}(\underset{n\times t}{\boldsymbol{A}})=t,(n>t)$,观测向量 $\boldsymbol{L}$ 中各元素间应是函数独立的,故有方差矩阵的行列式 $\det \boldsymbol{D}>0$。

平差时总是要求参数 $\boldsymbol{X}$ 取近似值 $\boldsymbol{X}^0$,估计参数就是求近似值的改正值$\hat{\boldsymbol{X}}$。由于真误差 Δ 一般不可知,故用观测值的负改正数 $-\boldsymbol{V}$ 作其估值。于是式(1.2.2)成为误差方程

$$\boldsymbol{V}=\boldsymbol{A}\hat{\boldsymbol{X}}-\boldsymbol{l} \tag{1.2.4}$$

式中

$$\boldsymbol{l}=\boldsymbol{L}-\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}^0 \tag{1.2.5}$$

对模型(1.2.4)按最小二乘准则(1.2.1)求极值,则有

$$\frac{\partial \boldsymbol{V}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}\boldsymbol{V}}{\partial \hat{\boldsymbol{X}}}=\boldsymbol{0}$$

得

$$A^{\mathrm{T}}PV=0 \tag{1.2.6}$$

或

$$A^{\mathrm{T}}PA\hat{X}-A^{\mathrm{T}}Pl=0 \tag{1.2.7}$$

式(1.2.6)和式(1.2.7)为经典平差模型的法方程。令 $N=A^{\mathrm{T}}PA,W=A^{\mathrm{T}}Pl$,上式可写成

$$N\hat{X}=W \tag{1.2.8}$$

因 A 为列满秩矩阵,即 $\mathrm{R}(A)=t$,故有 $\mathrm{R}(N)=\mathrm{R}(A^{\mathrm{T}}PA)=t$,因此 N 为 t 阶满秩矩阵,故

$$\hat{X}=N^{-1}W \tag{1.2.9}$$

从 18 世纪末高斯提出最小二乘法到 20 世纪 50 年代中期的一百多年,最小二乘法成为人们进行数据处理的主要方法。人们尽可能地把各类需要处理的数据近似变成为仅含偶然误差的随机独立向量,并使观测向量和非随机参数成为线性(或近似线性)关系,从而达到利用最小二乘估计未知参数的目的。而在此期间,有关数据处理方面的研究,特别是测量平差的研究,主要集中在如何基于最小二乘准则进行平差的解算方法上,研究建立了诸如史赖伯法则、高斯约化法、克里格分区平差、赫尔默特平差、克拉索夫斯基平差法、分组平差法等一系列简化大型方程解算的方法,用于解决各类测量问题的平差计算。

§1.3　近代测量数据处理进展

尽管最小二乘以其优良的估计性质、简便的计算方法在最近 200 年的数据处理中一直被数据处理界广泛采用,但是随着测量技术的现代化和高精度,人们对数据处理提出了更高的要求,仅仅依赖最小二乘已难以完全满足人们对高精度、高可靠性的需要;同时随着现代数学理论的发展和计算机技术的快速发展,也为现代数据处理理论的发展提供了强有力的理论方法与计算手段。因此,从 20 世纪中叶伴随着计算机技术的出现与发展,人们将数理统计、线性代数、矩阵论等一系列现代数学理论及方法引入到数据处理理论和测量平差中,极大扩展了数据处理理论和测量平差方法,其主要表现为以下几个方面。

1. 相关平差

1947 年铁斯特拉(T. M. Tienstra)将经典平差中的高斯-马尔可夫模型中的 D、Q、P 对角矩阵扩展为满秩对称矩阵,提出了相关高斯-马尔可夫模型,建立了相关平差。相关平差的出现对测量平差理论研究起着重大的促进作用,推动了测量平差的发展。它将平差的观测值和平差模型的概念广义化。基于它所具备的很强的概括性,建立了可将经典平差中的条件平差、间接平差、附有参数的条件平差和附有条件的间接平差统一为附有条件的条件平差模型。

$$\left.\begin{aligned}BV+A\hat{X}&=f\\ C\hat{X}&=W\end{aligned}\right\} \tag{1.3.1}$$

显然,各种平差模型只是该模型中系数矩阵 B、A、C 取不同值时的特例,因此模型(1.3.1)也称为经典平差的统一模型,该模型表明了经典平差中各平差方法间的内在联系。

2. 秩亏自由网平差

经典平差中,要求平差必须具有必要起算数据,即必须具有足够的外部基准条件。在此前提下建立的函数模型的系数矩阵 A 是满秩的,即

$$\mathrm{R}(\underset{n\times t}{\boldsymbol{A}})=t \tag{1.3.2}$$

由此根据最小二乘得到的法方程系数矩阵是一个满秩对称正定方阵。

$$\mathrm{R}(\underset{t\times t}{\boldsymbol{N}})=\mathrm{R}(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}\boldsymbol{A})=t \tag{1.3.3}$$

即可通过对 $\boldsymbol{N}$ 的正则逆 $\boldsymbol{N}^{-1}$ 求得参数的唯一估值。

但是，在实际数据处理中，特别是利用现代信息采集（观测）手段，例如全球定位系统（GPS）、遥感（RS）、地理信息系统（GIS），常常会遇到缺少或没有足够起算数据的情况。此时所建立的误差方程和法方程的系数矩阵均为秩亏，因而导致方程没有唯一解。针对这个问题，1962 年奥地利迈塞尔（P. Meissl）提出了秩亏自由网平差的思想，即在原最小二乘平差模型基础上再增加最小范数准则 $\hat{\boldsymbol{X}}^{\mathrm{T}}\hat{\boldsymbol{X}}=\min$，以实现获得参数的唯一解。基于这个思想，米特迈尔（Mittermayer，1971）首先给出了广义逆解法，后经其他大地测绘数据处理专家，包括中国的周江文、陶本藻等的进一步研究完善，形成了一套完整的秩亏自由网平差理论与方法，从而实现了经典平差模型和平差方法的进一步扩展，使求解模型更加合理，应用面大大拓宽。

此后，戈德曼（A. J. Goldman）和蔡勒（M. Zelen）将平差模型中的满秩权逆矩阵 $\boldsymbol{Q}_{\Delta}$ 扩充为奇异的秩亏矩阵。到 1971 年，劳（C. R. Rao）等提出了广义高斯-马尔可夫模型。虽然其模型形式同式（1.2.2）和式（1.2.3），但是其函数模型系数矩阵 $\boldsymbol{A}$ 和随机模型协因数矩阵 $\boldsymbol{Q}_{\Delta}$ 的限制条件大大放松为

$$\left.\begin{aligned}&\mathrm{R}(\boldsymbol{A})=t_0\leqslant t\\&\det\boldsymbol{Q}_{\Delta}\geqslant 0\end{aligned}\right\} \tag{1.3.4}$$

于是，扩展了最小二乘的应用领域。

3. 最小二乘滤波与配置

经典最小二乘平差中的待估参数为非随机量。随着测量技术的进步，所需处理的数据也变得更为多样且复杂，面临的不仅观测数据是随机变量，而且待估参数也是具有一定先验统计性质（期望、方差）的随机变量，由此产生带有随机参数的平差问题。1969 年克拉鲁普（T. Krarup）针对重力异常数据处理问题，提出了最小二乘滤波与配置。莫里茨（H. Moritz）（1970）经研究提出了带系统参数的最小二乘配置，并给出了该方法在大地测量等领域的数据处理应用算法，在此基础上建立了几何位置与重力异常场的最小二乘联合平差，为整体大地测量奠定了理论基础。

最小二乘配置模型实为扩展的高斯-马尔可夫模型。

$$\boldsymbol{L}=\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}+\boldsymbol{B}\boldsymbol{Y}+\boldsymbol{\Delta} \tag{1.3.5}$$

式中，$\boldsymbol{L}$ 为观测向量；$\boldsymbol{\Delta}$ 为观测误差，又称为噪声；$\boldsymbol{Y}$ 为随机函数向量；$\boldsymbol{A}$ 为非随机参数向量 $\boldsymbol{X}$ 的系数矩阵；$\boldsymbol{B}$ 为随机系数向量的系数矩阵。

当式（1.3.5）中 $\boldsymbol{B}=0$ 时，该模型即为经典平差的函数模型；

当式（1.3.5）中 $\boldsymbol{A}=0$ 时，该模型成为滤波函数模型。

对配置模型采用极大验后准则求解，或当随机向量 $\boldsymbol{Y}$ 服从正态分布时，将其视为虚拟观测值。此时极大验后准则等价于广义最小二乘准则。

$$\boldsymbol{V}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}\boldsymbol{V}+\boldsymbol{V}_{Y}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}_{Y}\boldsymbol{V}_{Y}=\min \tag{1.3.6}$$

因此，将采用广义最小二乘准则进行参数估计的方法，称为最小二乘配置。此外，模型（1.3.6）也可采用贝叶斯（Bayes）准则进行随机参数向量估计。

4.随机模型的验后估计

经典平差中,人们主要致力于函数模型的研究。现代数据处理中常常会遇到多种不同类型的观测数据联合处理问题,如何正确利用模型表述各类数据的关系,特别是正确确定它们之间的权比,确定它们的方差,成为数据处理中必须要研究解决的问题。20世纪70年代人们借助于线性代数、数理统计和计算机,开始把1923年赫尔默特(F. R. Helmert)提出的方差分量估计思想用于随机模型的验后估计,使正确确定不同类型观测数据间的权比成为可能。

同时,拉奥于1970年提出的最小范数二次无偏估计(MINQUE法),科赫(K. R. Koch)于1980年提出的最优不变二次无偏估计(BIQUE法),以及随后提出的随机模型极大似然估计、方差分量贝叶斯估计等,为随机模型的研究应用提供了广阔的平台。

5.顾及模型误差的数据处理方法

经典平差主要处理仅含有偶然误差的数据,但是观测数据不仅含有偶然误差,还含有系统误差和粗差,即

$$\Delta=\Delta_g+\Delta_s+\Delta_n \tag{1.3.7}$$

式中,Δ_g 为粗差;Δ_s 为系统误差;Δ_n 为偶然误差。

然而,应用现代数据采集(观测)手段所获得的数据中含有大量或至少是难以避免地含有系统误差和粗差,此时采用最小二乘估计就会存在模型误差,这是因为最小二乘估计不具备抵抗粗差的能力,导致估计参数受到粗差影响而失真。针对此,博克斯(G. E. P. Box)于1953年提出了稳健估计(robust estimation)概念,直到1964年胡贝尔(P. J. Huber)发表了“位置参数的稳健估计”,才使稳健估计真正步入到研究与应用阶段。另外,1968年,荷兰的巴尔达(W. Baarda)教授利用数理统计方法建立了测量粗差的“数据探测”(data-snooping)和可靠性理论,为数据探测提供了另一种理论体系及方法。

为了消除或减弱粗差对参数估值的影响,我国学者周江文(1989)、李德仁(1988)等系统研究了粗差统计学(robust statistics),形成了具有特色的抗差最小二乘估计理论。1991年杨元喜提出了相关观测估计方案,建立了相关观测抗差估计理论,进一步完善了抗差估计的理论与应用。

对于由于数据中存在的系统误差造成的模型误差,可通过在平差函数模型中附加系统参数加以消除。

$$\boldsymbol{V}=\boldsymbol{AX}+\boldsymbol{BS}-\boldsymbol{L} \tag{1.3.8}$$

式中,$\boldsymbol{S}$ 为附加系统参数向量;$\boldsymbol{B}$ 为附加系统参数系数矩阵。

对于式(1.3.8)引入的参数是否合理,可通过模型检验的方法加以判断。近年,又开展了基于半参数估计理论来处理含有系统误差数据的问题研究。

6.有偏估计

经典平差要求基于最小二乘的法方程是适定方程组。现代数据处理中,特别是GPS动态定位、大地测量反演以及附加系统参数的选择,往往会出现模型线性近似或参数近似相关,而导致法方程病态(不适定),影响参数估值的稳定性以及使方差数值变得很大。针对此,1955年斯坦因(C. M. Stein)证明了,若法方程病态,则当参数个数大于2时,不可采用最小二乘估计,而应寻找另一个在均方差意义下优于最小二乘的估计。据此,斯坦因提出了通过压缩改进最小二乘的方法克服方程的病态问题。由于压缩后的估值不再具有无偏性,因此将进行压缩改进后的结果称为有偏估计。

有偏估计主要包含岭估计、广义岭估计、主成分估计、特征根估计等。其中研究和应用最多的是岭估计，其模型为

$$\hat{\boldsymbol{X}}=(\boldsymbol{N}+k\boldsymbol{I})^{-1}\boldsymbol{W} \tag{1.3.9}$$

式中，$k>0$，为常数；$\boldsymbol{I}$ 为单位矩阵。

7. 非线性模型参数估计

经典最小二乘是对线性模型进行参数估计。现代数据处理中所涉及的误差模型一般均为非线性模型，且对估计参数精度要求较高。传统的方法是通过将非线性模型展开为取一次项的泰勒级数的线性化近似方法，由于其略去二次以上项，必然会带来误差而导致产生模型误差，这种误差有时甚至会大于高精度观测结果自身的观测误差。由此产生因数据处理导致精度损失，这显然不合理。特别是随着现代数据处理涉及领域的扩宽，处理模型更为复杂，而其往往具有很强的非线性强度，此时将其处理为近似的线性模型，产生的不合理性和误差尤为明显。为此，近 30 年来国内外学者就如何开展非线性模型的参数估计，即求解方法进行了大量研究，提出了高斯-牛顿法、最速下降法和组合最小二乘法、退火算法、遗传算法、同伦算法，以及顾及泰勒级数二阶项的非线性参数最小二乘法，从而将线性模型参数估计扩展到非线性参数估计。

8. 动态、整体数据处理

经典数据处理中的观测数据和待估参数都是不随时间变化的静态数据，而现代数据处理常面临观测数据和参数均随时间变化的情况。例如，GPS 导航中的数据与位置参数都是随时间变化的动态数据；再如，高危变形体的实时监测与预报的数据和形变参数也均是随时间变化的动态数据。针对此，1960 年卡尔曼(R. E. Kalman)提出了著名的卡尔曼滤波。它是一种能同时估计观测数据和待估参数随时间变化的动态数据处理方法，是目前动态数据处理中应用最为广泛的方法之一。

针对卡尔曼滤波存在的问题，提出了基于 Sage 滤波思想的自适应卡尔曼滤波，以及抗差自适应滤波。另外，还有时序分析法用以处理动态相关数据等。

沃尔夫(Wolf)1963 年导出了实用的三维大地测量误差方程式，开创了空间三维大地测量数据处理方法。莫里茨和格拉法伦德(Grafarend)研究了同时包含物理观测数据和几何数据的整体大地测量的数据处理，海因(G. W. Hein)针对最小二乘配置设计了平差软件，推动了整体平差的实用化研究。

9. 多种估计准则

近代数据处理除最小二乘估计准则外，扩展出现了极大似然估计、极大验后估计、最小验后方差、贝叶斯估计、稳健估计、P 范估计、半参数估计等多种估计准则。针对不同数据类型和特征分别有着不同的适用性，极大地拓展了数据处理和参数估计的应用面。

§1.4 近代数据处理发展展望

伴随着现代科技发展，特别是现代数学、信息采集手段、信息传输、存储和计算技术的发展，现代数据处理在最近的半个世纪无论是理论方法，还是处理技术都发生了天翻地覆的飞跃发展，无论是其研究领域还是应用领域都得到极大拓展。概括来说，近代数据处理具有以下特

点：

(1)理论体系。从以经典代数学为主转化为以概率统计为主，并融入随机数学、泛函分析、拓扑学、分形几何、常微分方程、偏微分方程、图论、小波分析、物理数学等近代数学理论与方法，形成近代数据处理理论体系，极大拓展了现实世界模型化的能力，丰富了研究内容与应用领域。

(2)数据处理最优准则。从经典最小二乘准则(估计)扩展至极大似然估计、极大验后估计、最优无偏估计、最小方差估计、贝叶斯估计、P 范估计、信息扩展估计、半参数估计等最优化准则，由此实现数据处理从仅能处理具有正态分布含偶然误差的观测数据，到可以处理多种分布，包含系统误差、粗差的观测数据，而且待估未知参数既可以是非随机也可为随机参数。

(3)模型估计解算类型。从具有严格限制的经典高斯-马尔可夫模型(1.2.2)和(1.2.3)，发展为更为灵活的广义高斯-马尔可夫模型。

$$\underset{n\times 1}{\boldsymbol{L}}=\underset{n\times t}{\boldsymbol{A}}\,\underset{t\times 1}{\boldsymbol{X}}+\underset{n\times s}{\boldsymbol{B}}\,\underset{s\times 1}{\boldsymbol{Y}}+\underset{n\times 1}{\boldsymbol{\Delta}}$$

或

$$\boldsymbol{L}=f(\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y})+\boldsymbol{\Delta}$$

$$E(\boldsymbol{\Delta})=0,\boldsymbol{D}(\boldsymbol{\Delta})=\hat{\sigma}_0^2\boldsymbol{Q}=\hat{\sigma}_0^2\boldsymbol{P}^{-1}$$

$$\mathrm{R}(\boldsymbol{A})\leqslant t,\det\boldsymbol{D}=\det\boldsymbol{Q}\geqslant 0$$

式中，$\boldsymbol{X}$ 为非随机参数；$\boldsymbol{Y}$ 为随机参数。

由此，相应产生新的参数估计方法：秩亏自由网平差、滤波与最小二乘配置、稳健最小二乘平差、卡尔曼滤波等，以及顾及随机模型正确性的验后方差估计。因此，处理的观测数据从单一类型过渡到多种类型数据整体联合处理，从静态数据扩展到动态数据；研究模型从线性发展到非线性。

(4)数据精度评价与质量控制。从主要依据线性误差传播理论估计参数的精度评定发展到基于统计学、随机数学等近代数学的可靠性理论；从数据精度评价发展到数据精度控制、数据质量控制，以求实现在数据处理过程中除了能对估计参数和成果精度评价外，还能通过数据质量控制确保成果少受污染，具有高质量和高可靠度。

尽管近半个世纪数据处理理论与方法有了长足发展，但是，随着现代科技飞速发展，社会已全面进入信息化时代，并逐步向智能化方向发展，必将对数据处理理论与方法提出更高要求，数据处理理论发展也将面临新的机遇与挑战。而测量数据处理随着研究领域的不断扩大、数据采集(测量)手段的多样化和高度现代化，导致数据类型和模型更加复杂、多变，也使数据处理仍然面临许多亟待解决的理论问题。诸如：如何将对现实世界的描述从单纯的物理模型或几何模型表达变为同时顾及物理与几何特性的融合模型表达，实现对现实世界的模型化；面对大量复杂的非线性模型，研究如何选择更适应的最优化估计准则，以及更有效的非线性参数估计理论、算法及评价准则；不适定与正则化、概率与非概率问题的算法方法；带有有色噪声等多误差影响的数据评价与质量控制；多数据源的融合与数据挖掘等。相信随着社会信息化、智能化发展，数据处理理论与应用研究必将会取得更为绚丽的发展，更好满足信息数据与智能决策的需求，实现进一步促进社会发展的目的。

第 2 章　参数估计方法

§2.1　概述

为了求得某些未知参数，常常需要进行一系列的观测。然而由于受种种因素的限制，观测值总不可避免地含有误差，同时观测量也不一定就是待求的未知参数，往往是未知量的某些函数值。需要依据含有误差的观测值，构建合适的模型，按一定的准则，解求未知参数，这是测量数据处理的目的。另外，如何针对带有误差的观测数据，建立观测值与未知参数间的数学模型，依据一定的最优化准则，对未知参数作出最优估计，这是数理统计学中参数估计研究的内容。

设 $\boldsymbol{L}$ 为带有误差 $\boldsymbol{\Delta}$ 的观测量，是随机观测向量，$\boldsymbol{X}$ 为待求的未知参数向量，既可以是非随机参数向量，也可以是随机参数向量。参数估计即是构造一个能够由观测向量 $\boldsymbol{L}$ 估计未知参数 $\boldsymbol{X}$ 的函数$\hat{\boldsymbol{X}}(\boldsymbol{L})$，通常$\hat{\boldsymbol{X}}(\boldsymbol{L})$将简记为$\hat{\boldsymbol{X}}$。显然不同的函数，将能得到不同的估值，而我们需要寻求的是最优估值。

所谓最优估值就是希望未知参数估计量$\hat{\boldsymbol{X}}$与其真值$\tilde{\boldsymbol{X}}$（$\boldsymbol{X}$ 非随机）或期望值 $E(\boldsymbol{X})$（$\boldsymbol{X}$ 随机）非常接近，即估计误差 $\boldsymbol{\Delta}_{\hat{x}}=\hat{\boldsymbol{X}}-\tilde{\boldsymbol{X}}$ 越小越好。数理统计中，描述估计量是否最优，从以下三个性质考虑：

（1）无偏性。

若估计量$\hat{\boldsymbol{X}}$的数学期望等于被估计量 $\boldsymbol{X}$ 的真值$\tilde{\boldsymbol{X}}$，即

$$E(\hat{\boldsymbol{X}})=\tilde{\boldsymbol{X}} \tag{2.1.1}$$

称$\hat{\boldsymbol{X}}$为 $\boldsymbol{X}$ 的无偏估计。

（2）一致性。

一般来说，由观测值得到的参数估值$\hat{\boldsymbol{X}}$无法等同于真值，但随着观测次数 n 的增加，估计量$\hat{\boldsymbol{X}}$逐渐逼近于真值。或者说，当 n 无限增大时，估计量$\hat{\boldsymbol{X}}$依概率收敛于真值。即如果对于任意 $\varepsilon>0$，有

$$\lim_{n\to\infty}P(\boldsymbol{X}-\varepsilon<\hat{\boldsymbol{X}}<\boldsymbol{X}+\varepsilon)=1 \tag{2.1.2}$$

则称估计量$\hat{\boldsymbol{X}}$具有一致性。若有

$$\lim_{n\to\infty}[(\boldsymbol{X}-\hat{\boldsymbol{X}})(\boldsymbol{X}-\hat{\boldsymbol{X}})^{\mathrm{T}}]=0 \tag{2.1.3}$$

则称此估计量为均方一致性。估计量的一致性是从它的极限性质来看。

（3）有效性。

若由观测向量 $\boldsymbol{L}$ 得到无偏估计量 $\hat{\boldsymbol{X}}$ 的误差方差 $D(\boldsymbol{\Delta}_{\hat{X}})=E[(\tilde{\boldsymbol{X}}-\hat{\boldsymbol{X}})(\tilde{\boldsymbol{X}}-\hat{\boldsymbol{X}})^{\mathrm{T}}]$ 小于由 $\boldsymbol{L}$ 得到的任何其他无偏估计量 $\boldsymbol{X}^*$ 的误差方差 $D(\boldsymbol{\Delta}_{X^*})=E[(\tilde{\boldsymbol{X}}-\boldsymbol{X}^*)(\tilde{\boldsymbol{X}}-\boldsymbol{X}^*)^{\mathrm{T}}]$，即

$$E[(\tilde{\boldsymbol{X}}-\hat{\boldsymbol{X}})(\tilde{\boldsymbol{X}}-\hat{\boldsymbol{X}})^{\mathrm{T}}]<E[(\tilde{\boldsymbol{X}}-\boldsymbol{X}^*)(\tilde{\boldsymbol{X}}-\boldsymbol{X}^*)^{\mathrm{T}}] \tag{2.1.4}$$

或

$$D(\boldsymbol{\Delta}_{\hat{X}})<D(\boldsymbol{\Delta}_{X^*}) \tag{2.1.5}$$

则称 $\hat{\boldsymbol{X}}$ 是有效估计量，或称最小方差无偏估计量。

由一致性定义看出，估计量 $\hat{\boldsymbol{X}}$ 若满足无偏性和方差最小性，则其一致性必然满足。在平差的线性模型中，若参数估值具有无偏性和有效性，则参数的最优估计称为线性最优无偏估计。

我们知道，未知参数的估值都是在一定估计准则下进行的，利用不同的估计准则将得到不同的估计方法。目前在现代测量平差中常用的估计方法有极大似然估计、最小二乘估计、极大验后估计、最小方差估计和线性最小方差估计等。我们所熟悉的经典测量平差就是以最小二乘估计或极大似然估计为根据导出的，而滤波、配置和动态系统的卡尔曼滤波等，都是以极大验后估计或最小方差估计为准则导出的。本章介绍数据处理中常用的几种估计方法。

§2.2　极大似然估计

简单地讲，极大似然估计就是在似然函数达到最大的准则下，以获得总体参数最佳估值的方法。其中，所获得的估计总体参数的表达式称为极大似然估计量，由该估计量获得的总体参数的估计值称为总体参数的极大似然估计值。估计原理如下：

设有参数向量 $\underset{t\times 1}{\boldsymbol{X}}$，它可以是未知的非随机量，也可以是未知的随机向量。为了估计 $\boldsymbol{X}$，进行了 n 次观测，得到了观测量 $\underset{n\times 1}{\boldsymbol{L}}$ 的观测值 $\underset{n\times 1}{\boldsymbol{l}}$。又假设 $\boldsymbol{X}$ 的所有可能取值为 $\boldsymbol{x}$，在 $\boldsymbol{X}=\boldsymbol{x}$ 的条件下得到的观测向量 $\boldsymbol{L}$ 的条件概率密度为 $f(\boldsymbol{l}/\boldsymbol{x})$。因此，$f(\boldsymbol{l}/\boldsymbol{x})$ 是 $\boldsymbol{x}$ 和 $\boldsymbol{l}$ 的函数，但对具体的观测值 $\boldsymbol{l}$ 来说，$f(\boldsymbol{l}/\boldsymbol{x})$ 可以认为只是 $\boldsymbol{x}$ 的函数，显然能使 $f(\boldsymbol{l}/\boldsymbol{x})$ 达到最大的未知参数估值 $\hat{\boldsymbol{x}}$ 为最佳估值。因此，极大似然估计是以

$$f(\boldsymbol{l}/\boldsymbol{x})=\max \tag{2.2.1}$$

为准则求 $\hat{\boldsymbol{X}}$ 最佳估值的方法。通常把 $\hat{\boldsymbol{X}}$ 叫做 $\boldsymbol{X}$ 的极大似然估值，并记作 $\hat{\boldsymbol{X}}_{\mathrm{ML}}(\boldsymbol{L})$ 或 $\hat{\boldsymbol{X}}_{\mathrm{ML}}$。它满足于

$$\left.\frac{\partial f(\boldsymbol{l}/\boldsymbol{x})}{\partial \boldsymbol{x}}\right|_{\boldsymbol{x}=\hat{\boldsymbol{X}}_{\mathrm{ML}}(\boldsymbol{L})}=\boldsymbol{0} \tag{2.2.2}$$

为了计算上的方便，一般将似然函数取对数。因为对数函数为单调增函数，取对数并不影响极值解，即 $\ln f(\boldsymbol{l}/\boldsymbol{x})$、$f(\boldsymbol{l}/\boldsymbol{x})$ 都在相同的 $\boldsymbol{x}$ 值处达到最大。因此上式等价于

$$\left.\frac{\partial \ln f(\boldsymbol{l}/\boldsymbol{x})}{\partial \boldsymbol{x}}\right|_{\boldsymbol{x}=\hat{\boldsymbol{X}}_{\mathrm{ML}}(\boldsymbol{L})}=\boldsymbol{0} \tag{2.2.3}$$

通常称方程(2.2.3)为似然方程，$f(\boldsymbol{l}/\boldsymbol{x})$ 为似然函数，$\ln f(\boldsymbol{l}/\boldsymbol{x})$ 为对数似然函数。

如果参数 $\boldsymbol{X}$ 是非随机量，则

$$f(\boldsymbol{l}/\boldsymbol{x})=f(\boldsymbol{l},\boldsymbol{x}) \tag{2.2.4}$$

于是，相应的极大似然估计准则为