适用于各版本教材
SHIYONGYUGEBANBENJIAOCAI

总顾问：吴宏文
主　编：胡仁仪

新课标

中学生优秀教辅

初中

奥赛王

全国金牌教师主编 黄冈名师精心打造

第四次修订

九年级

数学

★ 学生步入重点中
★ 家长辅导孩子的
★ 适用于新课标各版本教材
★ 适用于各年级同步辅导

江苏美术出版社

初中

AOSAIWANG

奥赛王

九年级数学

主　　编　胡仁义

副 主 编　王福政　毕庆能　孙德云

编　　委　陶月电　王希林　黄远海

周代学　刘长仙　肖进阳

余盛民　董俊峰　廖荣坤

金立淑　张国怀　夏永忠

王福政　毕庆能　孙德云

江苏美术出版社

图书在版编目(CIP)数据

初中奥赛王. 九年级数学/胡仁仪主编. —南京:
江苏美术出版社,2011.7

ISBN 978-7-5344-3925-4

Ⅰ. ①初… Ⅱ. ①胡… Ⅲ. ①中学数学课—初中—教学参考资料Ⅳ. ①G634

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2011)第 138203 号

出 品 人 周海歌
项目统筹 程继贤 周宇慧
市场统筹 段 炼 刘晓东
责任编辑 王林军 魏申申
特邀编辑 韩 芹
装帧设计 千里象设计
插图设计 黄如驹
责任校对 刁海裕
责任监印 贲 炜

书 名 初中奥赛王·九年级数学
出版发行 凤凰出版传媒集团(南京市湖南路1号A楼 邮编:210009)
凤凰出版传媒股份有限公司
江苏美术出版社(南京市中央路165号 邮编:210009)
集团网址 http://www.ppm.cn
出版社网址 http://www.jsmscbs.com.cn
经 销 凤凰出版传媒股份有限公司
印 刷 南京师范大学印刷厂
开 本 880mm×1230mm 1/32
印 张 10
版 次 2011年11月第1版 2011年11月第1次印刷
标准书号 ISBN 978-7-5344-3925-4
定 价 19.80元

营销部电话 025-68155667 68155670 营销部地址 南京市中央路165号5楼
江苏美术出版社图书凡印装错误可向承印厂调换

前言

《初中奥赛王》丛书，是针对新课标编写的竞赛与培优系列教辅资料，它以新课标竞赛知识点为主线，同时与新课标教材知识同步来编写，体例设计力求创新。我们编写丛书的目的是：为学生升入重点中学（大学）服务，为各级各类学科竞赛服务。

《初中奥赛王》丛书具有以下突出特点：

一、全面丰富实用

全书内容丰富，题量充足，信息量大。丛书解读详细，分析透彻，归纳全面，训练到位。

二、体例设计全新

全书栏目特色是：

《课标导航》——理念新。每讲开头用了生动活泼的导语（名言、诗词、小故事、趣题等），让学生在全新的知识背景下步入课题，启迪性强。

《赛点解读》——结构新。每讲按教材同步的基础知识，结合竞赛知识来解读，同时又归纳了热门赛点，层次感强。

《赛题详解》——讲法新。针对各节赛点，配用独到的《教练点拨》、《完全解答》、《特别关注》三个小栏目，实现讲解内容的“实、精、透”与学生能力的“培、提、升”有效统一。

《实战演练》——练法新。丛书选用最新的中（高）考题及最新的各级各类竞赛题，配以精典题与原创题，分三个方面《赛点整合，步步为营》、《智能升级，链接赛题》、《练后反思，方法提炼》来练，从练“点”、练“面”到最后学生知识的“内化”，形成完美的统一。

三、作者阵容强大

《初中奥赛王》丛书作者全部是黄冈市在竞赛辅导一线工作多年的国家级教练员。他们不仅培养出“湖北省理科状元”,而且辅导学生参加全国竞赛获国家级奖百余人次。卓有成效的辅导经验,保证了丛书的领航性、科学性、实用性。

四、适用对象全面

丛书策划考虑到各地区教材版本的多样性,采用以竞赛知识点为线索编写,适用各种版本教材的使用。考虑到读者的知识层次,采用结合教材内容同步编写,适用各年级各章节同步辅导。

我们相信丛书一定能为老师进行培优与竞赛辅导助一臂之力,一定能给学生进入重点中学(大学),获得竞赛奖牌助一臂之力。

本丛书虽然从策划到编写,再到出版,精心设计,认真操作,可谓竭心尽力,但疏漏之处在所难免,诚望广大读者批评指正。

《初中奥赛王》丛书编委会

2011年8月于黄冈·牛坡山

目录

MU LU

一　二次根式

课标导航

想一想

用计算器计算$\sqrt{2}$，得$\sqrt{2}=1.414213562$；反过来用计算器计算 1.414213562 的平方，结果是 1.999999999，即是说将 2 先开方再平方的结果并不等于 2，因此，我们求得 1.414213562 仅仅是$\sqrt{2}$的一个近似值.

用高级计算器计算$\sqrt{2}$，得：

$$\sqrt{2}=1.414213562373095048801688724209698078569671875376948073176679737990732478462107038850387534327641572764157273501384623091229702483605585073721264412149709993583141322266592750559275579995050115278206057\,15\cdots$$

显然将上述得到的数再平方后的结果仍然不等于 2，因此上面解到的值也是的一个近似值.

议一议

(1)从上述的结果你能得出什么结论吗？

(2)请用几何图形解释 $\sqrt{(2)^2}=2$

(3)你能在数轴上找到表示$\sqrt{2}$的点吗？

赛点解读

二次根式的主要性质是：

(1)$\sqrt{a}\geqslant 0(a\geqslant 0)$反映了二次根式的双重非负性；

(2)$(\sqrt{a})^2=a(a\geqslant 0)$；

(3)$\sqrt{a^2}=|a|=\begin{cases}a(a<0),\\0(a=0),\\-a(a<0);\end{cases}$

(4)$\sqrt{ab}=\sqrt{a}\cdot\sqrt{b}(a\geqslant 0,b\geqslant 0)$；

(5)$\sqrt{\frac{a}{b}}=\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}(a\geqslant 0,b>0)$；

(6)若 $a>b>0$，则$\sqrt{a}>\sqrt{b}>0$，反之亦然.

二次根式的运算是以下列运算为基础的：

(1)$a\sqrt{c}+b\sqrt{c}=(a\pm b)\sqrt{c}(c\geqslant 0)$；

(2)$\sqrt{a}\cdot\sqrt{b}=\sqrt{ab}(a\geqslant 0,b\geqslant 0)$；

(3)$\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}=\sqrt{\frac{a}{b}}(a\geqslant 0,b>0)$；

(4)$(\sqrt{a})^n=\sqrt{a^n}(a\geqslant 0)$.

最简二次根式:满足下列两个条件的二次根式,叫做最简二次根式.

(1)被开方数的因数是整数,因式是整式;

(2)被开方数中不含能开得尽方的因数或因式.

同类二次根式:几个二次根式化成最简二次根式以后,如果被开方数相同,这几个二次根式就叫做同类二次根式.

有理化因式与分母有理化:两个含有二次根式的代数式相乘,若它们的积不含二次根式,则称这两个代数式互为有理化因式;把分母中的根号化去,叫做分母有理化.

最简二次根式,同类二次根式,有理化因式是二次根式中的重要概念,它们贯穿于二次根式运算的始终,二次根式的化简与求值问题常涉及最简根式、同类根式、分母有理化等概念,常用到分解、拆项、换元等技巧.

本节涉及到的热门赛点有:

1. 算术平方根及应用.
2. 二次根式的运算、化简.
3. 无理数的整数、小数部分的应用.
4. 二次根式的求值.

赛题详解

赛点1:算术平方根及应用

例1 化简$-a\sqrt{-\frac{1}{a}}$.

【教练点拨】此题主要是把根式内的分母化去,有两种方法:移因式于根号外和移因式于根号内.

【完全解答】方法1:移分母于根号外

$\because \sqrt{-\frac{1}{a}}$是算术平方根,

$\therefore \frac{-1}{a}>0(a\neq 0)$,故$a<0$.

$\therefore -a\sqrt{\frac{-1}{a}}=-a\sqrt{\frac{-a}{a^2}}=-a\cdot\frac{1}{|a|}\sqrt{-a}=-a\cdot\frac{1}{-a}\sqrt{-a}=\sqrt{-a}$.

方法2:移因式于根号内

$\because a<0$,　　　　$\therefore -a=|a|=\sqrt{a^2}$.

由方法①知:$-a\sqrt{-\frac{1}{a}}=\sqrt{a^2}\cdot\sqrt{\frac{-1}{a}}=\sqrt{-a^2\cdot\frac{1}{a}}=\sqrt{-a}$.

【特别关注】对于二次根式化简中的因式外移或内移问题,应充分挖掘"$\sqrt{a}$"中$a\geqslant 0$这一隐含条件,灵活运用$\sqrt{a^2}=|a|$这一性质.

例2 若$\sqrt{x-4\sqrt{x-4}}$和$\sqrt{y+6-6\sqrt{y-3}}$互为相反数,求$\frac{x}{y}$的值.

【教练点拨】由题设知两二次根式之和为零,由二次根式的非负性,可得两根式分别为零,再对根式进行化简,可使问题求解.

【完全解答】由题设知:由题设知:$\sqrt{x-4\sqrt{x-4}}+\sqrt{y+6-6\sqrt{y-3}}=0$.

$\because \sqrt{x-4\sqrt{x-4}}\geqslant 0$,$\sqrt{y+6-6\sqrt{y-3}}\geqslant 0$,

$$\therefore\begin{cases}\sqrt{x-4\sqrt{x-4}}=0,\\ \sqrt{y+6-6\sqrt{y-3}}=0,\end{cases}\text{即}\begin{cases}\sqrt{(\sqrt{x-4}-2)^2}=0,\\ \sqrt{(\sqrt{y-3}-3)^2}=0.\end{cases}$$

$$\therefore\begin{cases}|\sqrt{x-4}-2|=0,\\ |\sqrt{y-3}-3|=0.\end{cases}\text{解得：}\begin{cases}x=8,\\ y=12.\end{cases}$$

$$\therefore\sqrt{\frac{x}{y}}=\sqrt{\frac{8}{12}}=\sqrt{\frac{2}{3}}=\frac{\sqrt{6}}{3}.$$

【特别关注】充分利用“$\sqrt{a}\geqslant0$”这一性质，再根据“几个非负数之和等于零，当且仅当每一个非负数等于零”这一性质求解.

例3 已知实数 a,b 满足 $3\sqrt{a}+5|b|=7$，$S=2\sqrt{a}-3|b|$，求 S 的取值范围.

（全国初中数学联赛题）

【教练点拨】可将已知条件和所求结论这两个等式看作关于$\sqrt{a}$，$|b|$的方程组，利用其非负性求出 S 的取值范围.

【完全解答】联立$\begin{cases}3\sqrt{a}+5|b|=7,\\ 2\sqrt{a}-3|b|=S.\end{cases}$

解得$\sqrt{a}=\dfrac{21+5S}{19}$，　$|b|=\dfrac{14-3S}{19}$.

$\because\sqrt{a}\geqslant0,|b|\geqslant0.$

$\therefore\begin{cases}\dfrac{21+5S}{19}\geqslant0,\\ \dfrac{14-3S}{19}\geqslant0,\end{cases}$解之得：$-\dfrac{21}{5}\leqslant S\leqslant\dfrac{14}{3}$.

【特别关注】解有关算术平方根问题时，要充分利用算术平方根的双重非负性

赛点2：二次根式的运算、化简

例4 化简：$\dfrac{1}{2+\sqrt{2}}+\dfrac{1}{3\sqrt{2}+2\sqrt{3}}+\cdots+\dfrac{1}{100\sqrt{99}+99\sqrt{100}}$.

【教练点拨】带省略号的二次根式的计算，结构较复杂，要认真观察仔细分析题目的特征，从而寻求其一般规律. 本题各项均可写成

$\dfrac{1}{(k+1)\sqrt{k}+k\sqrt{k+1}}(k=1,2,3,\cdots,100)$

又因为$\dfrac{1}{(k+1)\sqrt{k}+k\sqrt{k+1}}=\dfrac{1}{\sqrt{k}}-\dfrac{1}{\sqrt{k+1}}$，

所以原式中的每项均可以进行裂项.

【完全解答】考察一般情形：

$$\frac{1}{(k+1)\sqrt{k}+k\sqrt{k+1}}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{k}\cdot\sqrt{k+1}\cdot(\sqrt{k+1}+\sqrt{k})}$$

$$=\frac{\sqrt{k+1}-\sqrt{k}}{\sqrt{k}\cdot\sqrt{k+1}\cdot(\sqrt{k+1}+\sqrt{k})(\sqrt{k+1}-\sqrt{k})}$$

$=\dfrac{\sqrt{k+1}-\sqrt{k}}{\sqrt{k}\cdot\sqrt{k+1}}$

$=\dfrac{1}{\sqrt{k}}-\dfrac{1}{\sqrt{k+1}}$,

∴原式$=1-\dfrac{1}{\sqrt{2}}+\dfrac{1}{\sqrt{2}}-\dfrac{1}{\sqrt{3}}+\cdots+\dfrac{1}{\sqrt{99}}-\dfrac{1}{\sqrt{100}}$

$=1-\dfrac{1}{10}=\dfrac{9}{10}$.

【特别关注】凡带有省略号的二次根式的运算、化简问题，将其一般化，寻找规律是常用有效的解题方法.

例5 化简$\dfrac{3\sqrt{15}-\sqrt{10}-2\sqrt{6}+3\sqrt{3}-\sqrt{2}+18}{\sqrt{5}+2\sqrt{3}+1}$.

（山东省数学竞赛题）

【教练点拨】若直接进行分母有理化，则使计算、化简复杂化.观察分子与分母的数字特点，通过分解因式，可使问题得以解决.

【完全解答】原式$=\dfrac{\sqrt{5}(3\sqrt{3}-\sqrt{2})+2\sqrt{3}(3\sqrt{3}-\sqrt{2})+3\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\sqrt{5}+2\sqrt{3}+1}$

$=\dfrac{(\sqrt{5}+2\sqrt{3}+1)(3\sqrt{3}-\sqrt{2})}{\sqrt{5}+2\sqrt{3}+1}$

$=3\sqrt{3}-2$.

【特别关注】对分子、分母为多项的二次根式计算、化简问题，如果能够仔细观察分子、分母的特点，探究分子、分母之间潜在的关系，通过因式分解、约分，常常会得到一些巧妙简捷的解法

例6 化简：$\sqrt{2+\sqrt{3}}+\sqrt{2-\sqrt{3}}$.

（北京市中学生数学竞赛）

【教练点拨】可尝试用配方法、平方法、换元法等方法化简复合二次根式.

【完全解答】方法1：原式$=\sqrt{\dfrac{4+2\sqrt{3}}{2}}+\sqrt{\dfrac{4-2\sqrt{3}}{2}}$

$=\sqrt{\dfrac{(\sqrt{3}+1)^2}{2}}+\sqrt{\dfrac{(\sqrt{3}-1)^2}{2}}$

$=\dfrac{\sqrt{3}+1+\sqrt{3}-1}{\sqrt{2}}$

$=\dfrac{2\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$

$=\sqrt{6}$.

方法2（平方法）：原式$=\sqrt{(\sqrt{2+\sqrt{3}}+\sqrt{2-\sqrt{3}})^2}$

$=\sqrt{2+\sqrt{3}+2\cdot\sqrt{2+\sqrt{3}}\cdot\sqrt{2-\sqrt{3}}+2-\sqrt{3}}$

$=\sqrt{6}$.

方法3（换元法）：设$x=\sqrt{2+\sqrt{3}}$，$y=\sqrt{2-\sqrt{3}}$.

则 $xy=1, x^2+y^2=4$，

原式 $=x+y=\sqrt{(x+y)^2}=\sqrt{x^2+y^2+2xy}=\sqrt{6}$.

【特别关注】复合二次根式化简常用方法有：配方法，平方法，换元法.

例7 计算 $(\sqrt{5}+1)^{2005}-2(\sqrt{5}+1)^{2004}-4(\sqrt{5}+1)^{2003}+2012$.

【教练点拨】注意因式分解的作用.

【完全解答】原式 $=(\sqrt{5}+1)^{2003}\left[(\sqrt{5}+1)^2-2(\sqrt{5}+1)-4\right]+2012$

$=(\sqrt{5}+1)^{2003}\left[6+2\sqrt{5}-2\sqrt{5}-2-4\right]+2012$

$=2012$.

【特别关注】二次根式的高次方运算，常用因式分解或利用有理化因式的积为“1”或“-1”进行求解.

例8 计算：$\sqrt{2010\sqrt{2009\sqrt{2008\sqrt{2007\times2005+1}+1}+1}+1}$.

【教练点拨】这里有多重根号，可先从内层起进行试验，由于 $2007\times2005+1=(2006+1)(2006-1)+1=2006^2$ 故可化简这层根号，反复使用此法，由内向外逐次可将原式化简.

【完全解答】方法1：原式

$=\sqrt{2010\sqrt{2009\sqrt{2008\sqrt{(2006+1)(2006-1)+1}+1}+1}+1}$

$=\sqrt{2010\sqrt{2009\sqrt{2008\times2006+1}+1}+1}$

$=\sqrt{2010\sqrt{2009\sqrt{(2007+1)(2007-1)+1}+1}+1}$

$=\sqrt{2010\sqrt{2009\times2007+1}+1}$

$=\sqrt{2010\sqrt{(2008+1)(2008-1)+1}+1}$

$=\sqrt{2010\times2008+1}$

$=\sqrt{(2009+1)(2009-1)+1}$

$=2009$.

方法2：(常值换元法)令 $2007=n$

原式 $=\sqrt{(n+3)\sqrt{(n+2)\sqrt{(n+1)\sqrt{n(n-2)+1}+1}+1}+1}$

$=\sqrt{(n+3)\sqrt{(n+2)\sqrt{(n+1)(n-1)+1}+1}+1}$

$=\sqrt{(n+3)\sqrt{(n+2)n+1}+1}$

$=\sqrt{(n+3)(n+1)+1}$

$=\sqrt{n^2+4n+4}$

$=n+2$

$=2009$.

【特别关注】从一点入手，层层类推，以达到化简一个复杂算式的目的，这是递推方法的特点，熟练掌握这种方法是解决一些貌似复杂且形式重复的问题的法宝.

赛点3：无理数的整数、小数部分的应用

例9 设 $\dfrac{\sqrt{5}+1}{\sqrt{5}-1}$ 的整数部分为 x，小数部分为 y，求 $x^2+\dfrac{1}{2}xy+y^2$ 的值.

【教练点拨】先对$\frac{\sqrt{5}+1}{\sqrt{5}-1}$进行分母有理化，然后利用不等式$2<\sqrt{5}<3$来估算.

【完全解答】$\frac{\sqrt{5}+1}{\sqrt{5}-1}=\frac{(\sqrt{5}+1)^2}{(\sqrt{5}-1)(\sqrt{5}+1)}=\frac{6+2\sqrt{5}}{4}=\frac{3+\sqrt{5}}{2}$.

$\because 2<\sqrt{5}<3$,

$\therefore 5<3+\sqrt{5}<6$.

$\therefore 2<\frac{5}{2}<\frac{3+\sqrt{5}}{2}<3$.

$\therefore x=2, y=\frac{3+\sqrt{5}}{2}-2=\frac{\sqrt{5}-1}{2}$,

$$\begin{aligned}\therefore x^2+\frac{1}{2}xy+y^2&=2^2+\frac{1}{2}\times 2\times\frac{\sqrt{5}-1}{2}+\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^2\\&=4+\frac{\sqrt{5}-1}{2}+\frac{3-\sqrt{5}}{2}\\&=5.\end{aligned}$$

【特别关注】求含有$\sqrt{a}$($a>0$,且a为非完全平方数)的无理数的整数部分和小数部分，常常需对$\sqrt{a}$的值进行估算，确定它在哪两个连续正整数之间. 如$1<\sqrt{2}<2$，$2<\sqrt{5}<3$，$2<\sqrt{7}<3$等，然后再根据题目的需要进行变形，确定所求无理数的值的范围.

例10 设a为$\sqrt{3+\sqrt{5}}-\sqrt{3-\sqrt{5}}$的小数部分，$b$为$\sqrt{6+3\sqrt{3}}-\sqrt{6-3\sqrt{3}}$的小数部分，试求$\frac{2}{b}-\frac{1}{a}$的值.

【教练点拨】本题的两个无理数都是复合二次根式，按照化简复合二次根式的常用方法，将其化简.

【完全解答】$\because \sqrt{3+\sqrt{5}}-\sqrt{3-\sqrt{5}}$

$$\begin{aligned}&=\sqrt{\frac{6+2\sqrt{5}}{2}}-\sqrt{\frac{6-2\sqrt{5}}{2}}\\&=\frac{\sqrt{2}}{2}\left(\sqrt{(\sqrt{5}+1)^2}-\sqrt{(\sqrt{5}-1)^2}\right)\\&=\frac{\sqrt{2}}{2}(\sqrt{5}+1-\sqrt{5}+1)=\sqrt{2}.\end{aligned}$$

同理 $\sqrt{6+3\sqrt{3}}-\sqrt{6-3\sqrt{3}}$

$$\begin{aligned}&=\sqrt{\frac{12+6\sqrt{3}}{2}}-\sqrt{\frac{12-6\sqrt{3}}{2}}\\&=\frac{\sqrt{2}}{2}(3+\sqrt{3}-3+\sqrt{3})\\&=\sqrt{6}.\end{aligned}$$

$\therefore a=\sqrt{2}-1, b=\sqrt{6}-2$.

$\therefore \frac{2}{b}-\frac{1}{a}=\frac{2}{\sqrt{6}-2}-\frac{1}{\sqrt{2}-1}$

$=\sqrt{6}+2-(\sqrt{2}+1)$

$=\sqrt{6}-\sqrt{2}+1.$

【特别关注】解这类问题，先按照复合二次根式化简方法进行化简，再运用例 9 的方法估值确定范围.

例 11 求不超过$(\sqrt{7}+\sqrt{5})^6$的值最大整数.

【教练点拨】此题虽然可以通过近似计算求得结果，但若如此进行势必有较繁琐的运算且结果的准确性难以令人放心，这里可借助其有理化因式进行求解.

【完全解答】令$\sqrt{7}+\sqrt{5}=a$，$\sqrt{7}-\sqrt{5}=b$，则

$a+b=2\sqrt{7}$，$ab=2$，

所以$a^2+b^2=(a+b)^2-2ab=24$，

$a^6+b^6=(a^2+b^2)^3-3(ab)^2(a^2+b^2)$

$=24^3-3\times2^2\times24=13536.$

即$(\sqrt{7}+\sqrt{5})^6+(\sqrt{7}-\sqrt{5})^6=13536.$

又因为　$0<\sqrt{7}-\sqrt{5}<1$，

所以　　$0<(\sqrt{7}-\sqrt{5})^6<1.$

$13535<(\sqrt{7}+\sqrt{5})^6<13536.$

故不超过$(\sqrt{7}+\sqrt{5})^6$的最大整数是 13535.

【特别关注】二次根式计算、化简、求值，借助其有理化因式是常用的有效途径.

赛点 4：二次根式的求值

例 12 已知$x=\frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}$，$y=\frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}$，那么代数式$\frac{\sqrt{xy}+(x+y)^2}{\sqrt{xy}-(x+y)^2}$的值为________.

【教练点拨】若直接将 x，y 的值代入所求代数式求值较繁，注意到已知条件，易先求出 $x+y$，xy 的值，再把 $x+y$、xy 的值整体代入较为简便.

【完全解答】$\because x=\frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}=5+2\sqrt{6}$，$y=\frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}=5-2\sqrt{6}$

$\therefore x+y=10$，$xy=1$

$\therefore \frac{\sqrt{xy}+(x+y)^2}{\sqrt{xy}-(x+y)^2}=\frac{1+10^2}{1-10^2}=\frac{101}{-99}=-\frac{101}{99}$

【特别关注】对于条件所给 x，y 的分子、分母互为有理化因式时，先进行分母有理化化简，再根据 x，y 互为有理化因式，常常算出 $x+y$，xy，$x-y$，再采用整体代入的方法求值.

例 13 已知 $x=4-\sqrt{3}$，试求$\frac{x^4-6x^2-2x^2+18x+23}{x^2-8x+15}$的值.

【教练点拨】本题不宜将 x 值直接代入，应将 $x=4-\sqrt{3}$构造相关等式，整体代入求值.

【完全解答】$\because x=4-\sqrt{3}$，

$\therefore (x-4)^2=(-\sqrt{3})^2$ 即 $x^2-8x+13=0$.

由综合除法得:

$$原式=\frac{(x^2-8x+13)(x^2+2x+1)+10}{x^2-8x+13+2}$$

$$=\frac{10}{2}=5.$$

【特别关注】根据代数式的特征,构造相关等式,整体代入求值,是解有关二次根式求值的问题的较优途径.

实战演练

赛点整合,步步为营

1.化简:$\frac{9+4\sqrt{5}}{2+\sqrt{5}}=$________.

(2011年"希望杯"初二第1试题)

2.已知$\sqrt{a}-\frac{1}{\sqrt{a}}=\sqrt{5}$,则 $a-\frac{1}{a}=$________.

(2010年全国数赛荆州预赛)

3.若 $a+|a|=0$,则化简 $\sqrt{(a-1)^2}+\sqrt{a^2}$的结果为(　　)

A. 1　　B. -1　　C. $2a-1$　　D. $1-2a$

(2011年全国初中数赛海南初赛)

4.若 $a=\sqrt{2007^2+2007^2\times2008^2+2008^2}$,则关于 a 的说法正确的是(　　)

A.是正数,而且是偶数　　B.是正整数,而且是奇数

C.不是正整数,而是无理数　　D.无法确定

("希望杯"数学大赛)

5.当 $x>2$ 时,化简代数式 $\sqrt{x+2\sqrt{x-1}}+\sqrt{x-2\sqrt{x-1}}$,得________.

(2010年"城市杯"能力竞赛)

6.设等式 $\sqrt{a(x-a)}+\sqrt{a(y-a)}=\sqrt{x-a}-\sqrt{a-y}$在实数范围内成立,其中 a、x、y 是两两不同的实数,则$\frac{3x^2+xy-y^2}{x^2-xy+y^2}$的值是(　　)

A. 3　　B. $\frac{1}{3}$　　C. 2　　D. $\frac{5}{3}$

(全国初中数学联赛)

7.设 $a=\sqrt{3}-\sqrt{2}$,$b=2-\sqrt{3}$,$c=\sqrt{\sqrt{5}-2}$,则 a,b,c 的大小关系是(　　)

A. $b<a<c$　　B. $a<b<c$　　C. $c<b<a$　　D. $b<c<a$

(2011年全国初中数赛天津初赛)

8.化简$\frac{\sqrt{3+2\sqrt{2}}}{\sqrt{17+12\sqrt{2}}}-\frac{\sqrt{3-2\sqrt{2}}}{\sqrt{17-12\sqrt{2}}}$结果是(　　)

A. $\sqrt{2}$　　B. $-\sqrt{2}$　　C. 2　　D. -2

(2011年全初中数赛江西初赛)

9.求和:$S=\frac{1}{6\sqrt{4}+4\sqrt{6}}+\frac{1}{8\sqrt{6}+6\sqrt{8}}+\frac{1}{10\sqrt{8}+8\sqrt{10}}+\cdots$

$\dfrac{1}{100\sqrt{98}+98\sqrt{100}}=(\quad)$

A. $\dfrac{1}{5}$　　B. $\dfrac{1}{5\sqrt{2}}$　　C. $\dfrac{1}{7\sqrt{2}}$　　D. $\dfrac{7-\sqrt{2}}{14}$

（"五羊杯"数学竞赛试题）

10. 化简$\dfrac{\sqrt{3+\sqrt{5-\sqrt{13+\sqrt{48}}}}}{\sqrt{6}+\sqrt{2}}$的结果是(　　)

A. $\sqrt{2}$　　B. $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$　　C. 2　　D. $\dfrac{1}{2}$

（2010 年全国联赛江西初赛）

11. 设m、x、y均为正整数，且$\sqrt{m-\sqrt{28}}=\sqrt{x}-\sqrt{y}$，则$x+y+m$值是___________.

（"希望杯"数学邀请赛初二试题）

12. 已知$a=4+\sqrt{3}$，$b=4-\sqrt{3}$，求$\dfrac{a}{a-\sqrt{ab}}-\dfrac{\sqrt{b}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}$的值________.

（2010 年高州市数学竞赛）

13. 计算或化简：

(1) $\dfrac{\sqrt{3}+\sqrt{5}}{3-\sqrt{6}-\sqrt{10}+\sqrt{15}}$；

（"希望杯"全国邀请赛试题）

(2) $\dfrac{2\sqrt{6}}{\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5}}$；

（上海市初中数学竞赛）

(3) $\dfrac{\sqrt{10}+\sqrt{14}-\sqrt{15}-\sqrt{21}}{\sqrt{10}+\sqrt{14}+\sqrt{15}+\sqrt{21}}$；

（"五市"联赛题）

(4) $\dfrac{1}{3+\sqrt{3}}+\dfrac{1}{5\sqrt{3}+3\sqrt{5}}+\dfrac{1}{7\sqrt{5}+5\sqrt{7}}+\cdots+\dfrac{1}{49\sqrt{47}+47\sqrt{49}}$.

（天津市初二竞赛题）

智能升级，链接赛题

14. 已知非零实数a、b满足$|2a-4|+|b+2|+\sqrt{(a-3)b^2}+4=2a$，则$a+b$等于(　　)

A. -1　　B. 0　　C. 1　　D. 2

（全国初中数学竞赛）

15. 计算：$\dfrac{1}{1+\sqrt{2}}+\dfrac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}+\dfrac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{4}}+\cdots+\dfrac{1}{\sqrt{2003}+\sqrt{2004}}=$________.

（全国初中数学联赛）

16. 设 $a=\frac{\sqrt{5}-1}{2}$，则 $\frac{a^5+a^4-2a^3-a^2-a+2}{a^3-a}=$ ________.

（全国联赛试题）

17. 若 m 适合关系式 $\sqrt{3x+5y-2-m}+\sqrt{2x+3y-m}=\sqrt{x-199+y}\times\sqrt{199-x-y}$，试确定 m 的值.

（北京市初二竞赛题）

18. 若 $\sqrt{a^2+2005}$ 是整数，则所有满足条件的正整数 a 的和为（　）

A. 396　　B. 1002　　C. 1200　　D. 2004

（武汉"CASIO 杯"选拔赛）

19. 满足等式 $x\sqrt{y}+\sqrt{xy}-\sqrt{2003x}-\sqrt{2003y}+\sqrt{2003xy}=2003$ 的正整数对 (x,y) 的个数是（　）

A. 1　　B. 2　　C. 3　　D. 4

20. 若 $a=\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5}}$，$b=2+\sqrt{6}-\sqrt{10}$，则 $\frac{a}{b}$ 的值为（　）

A. $\frac{1}{2}$　　B. $\frac{1}{4}$　　C. $\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}$　　D. $\frac{1}{\sqrt{6}+\sqrt{10}}$

（全国初中数学联赛）

21. 设 $r\geqslant 4$，$a=\frac{1}{r}-\frac{1}{r+1}$，$b=\frac{1}{\sqrt{r}}-\frac{1}{\sqrt{r+1}}$，$c=\frac{1}{r(\sqrt{r}+\sqrt{r+1})}$ 则下列选项中，一定成立的是（　）

A. $a>b>c$　　B. $b>c>a$　　C. $c>a>b$　　D. $c>b>a$

（全国联赛题）

22. 设 n,k 为正整数，$A_1=\sqrt{(n+3)(n-1)+4}$，$A_2=\sqrt{(n+5)A_1+4}$，$A_3=\sqrt{(n+7)A_2+4}$，$A_4=\sqrt{(n+9)A_3+4}\cdots A_k=\sqrt{(n+2k+1)A_{k-1}+4}$，…已知，$A_{100}=2005$，则 $n=$（　）

A. 1806　　B. 2005　　C. 3612　　D. 4011

（"五羊杯"数学竞赛初三试题）

23. 设 $x_1,x_2,x_3,\cdots,x_{2007}$ 为实数，且满足 $x_1x_2x_3\cdots x_{2007}=x_1-x_2x_3\cdots x_{2007}=x_1x_2-x_3\cdots x_{2007}=\cdots=x_1x_2x_3\cdots x_{2006}-x_{2007}=1$，则 x_{2007} 的值是________.

（浙江省复赛题）

24. 设 $x=\frac{1}{\sqrt{2}-1}$，a 是 x 的小数部分，b 是 $-x$ 的小数部分，则 $a^3+b^3+3ab=$ ________.

（全国初中数学竞赛）

25. 求不超过 $(\sqrt{3}+\sqrt{2})^6$ 的最大整数.

练后反思，方法提炼

第 6、13 题利用算术平方根的非负性，第 5、10、13 题考查二次根式各种形式的计算、化简、求值.