

高等院校信息与通信工程系列教材

现代数字信号处理 及其应用习题解答



何子述 夏威 程婷 贾可新 编著

清华大学出版社

高等院校信息与通信工程系列教材

现代数字信号处理 及其应用习题解答

何子述 夏威 程婷 贾可新 编著

清华大学出版社

北京

出版说明

信息与通信工程学科是信息科学与技术的重要组成部分。改革开放以来,我国在发展通信系统与信息系统方面取得了长足的进步,形成了巨大的产业与市场,如我国的电话网络规模已位居世界首位,同时该领域的一些分支学科出现了为国际认可的技术创新,得到了迅猛的发展。为满足国家对高层次人才的迫切需求,当前国内大量高等学校设有信息与通信工程学科的院系或专业,培养大量的本科生与研究生。为适应学科知识不断更新的发展态势,他们迫切需要内容新颖又符合教改要求的教材和教学参考书。此外,大量的科研人员与工程技术人员也迫切需要学习、了解、掌握信息与通信工程学科领域的基础理论与较为系统的前沿专业知识。为了满足这些读者对高质量图书的渴求,清华大学出版社组织国内信息与通信工程国家级重点学科的教学与科研骨干以及本领域的一些知名学者、学术带头人编写了这套高等院校信息与通信工程系列教材。

该套教材以本科电子信息工程、通信工程专业的专业必修课程教材为主,同时包含一些反映学科发展前沿的本科选修课程教材和研究生教学用书。为了保证教材的出版质量,清华大学出版社不仅约请国内一流专家参与了丛书的选题规划,而且每本书在出版前都组织全国重点高校的骨干教师对作者的编写大纲和书稿进行了认真审核。

祝愿《高等院校信息与通信工程系列教材》为我国培养与造就信息与通信工程领域的高素质科技人才,推动信息科学的发展与进步作出贡献。

北京邮电大学
陈俊亮

前 言

现代数字信号处理理论研究的信号对象通常是离散时间随机过程,所涉及的系统包括时变和非线性系统,采用的理论工具除传统的数字信号处理理论外,还包括概率论与数理统计、检测与估计理论、优化理论、代数与矩阵计算等数学工具,这使得现代数字信号处理课程呈现出概念多、理论推导复杂烦琐、结论不一定是一个简单的表达式(结果)而是一系列迭代公式(计算步骤)的特点。

为使学生对该课程的理论和方法有深刻的理解和认识,完成适当的习题和仿真作业是学习中不可或缺的重要环节。习题通常是书中主要理论的具体应用和拓展,通过做习题,可实现对书中概念和理论的重新梳理和深入理解,并在一定程度上达到融会贯通的目的;通过计算机上仿真作业的完成,使学生对书中主要迭代算法的性能、适用条件、计算量等有所了解,为工程实际应用打下基础。

由于教材中习题多数是以理论推导、证明为主,有一定难度(有些直接来自发表的文献),为解决部分学生在完成习题和仿真作业过程中的实际困难,我们整理编写了这本习题解答,作为学生学习过程中的辅导材料。为便于学生在完成习题过程中的使用,在每章习题解答之前对本章内容进行了归纳总结。

使用中建议读者在完成习题时,尽量先独立思考、自己完成后,再参考本习题解答。

本书除何子述、夏威、程婷、贾可新四位主要作者外,协助参与稿件整理工作的还有王晓、李金政、徐萍、刘正平、赵洪涛、李亚星、李永哲、刘宏鹤等,郑浩洲、雷超、符林强、杨继波、梁立林、夏娟、刘洋、汪霜玲、李超、郭贺等参加了稿件完善、校对工作,在此对他们的辛勤付出深表感谢!

本书的完成得到了电子科技大学研究生院、电子工程学院等部门的热情帮助和支持,作者深表感谢!

限于作者水平,书中定有不当和错误之处,恳请读者批评指正。

何子述

2011年4月于成都

目 录

第 1 章 离散时间信号与系统	1
1.1 离散时间信号与系统基础	1
1.2 离散时间信号与系统的傅里叶分析	2
1.3 离散时间信号的 Z 变换	5
1.4 LTI 离散时间系统性能描述	6
1.5 离散时间系统的格型结构	8
1.6 连续时间信号的离散化及其频谱关系	8
1.7 离散时间实信号的复数表示	9
1.8 窄带信号的正交解调与数字基带信号.....	10
1.9 多相滤波与信道化处理.....	11
1.10 习题解答	12
第 2 章 离散时间平稳随机过程	31
2.1 离散时间平稳随机过程基础.....	31
2.2 平稳随机过程的自相关矩阵及其性质.....	36
2.3 离散时间平稳随机过程的功率谱密度.....	38
2.4 离散时间平稳随机过程的参数模型.....	39
2.5 随机过程高阶累积量和高阶谱的概念.....	42
2.6 习题解答.....	45
第 3 章 功率谱估计和信号频率估计方法	59
3.1 经典功率谱估计方法.....	59
3.2 平稳随机过程的 AR 参数模型功率谱估计.....	63
3.3 MA 参数模型和 ARMA 参数模型功率谱估计原理	65
3.4 MVDR 信号频率估计方法	66
3.5 APES 算法	67
3.6 基于相关矩阵特征分解的信号频率估计.....	69
3.7 习题解答.....	73
3.8 仿真题.....	88

第 4 章 维纳滤波原理及自适应算法	95
4.1 自适应横向滤波器及其学习过程	95
4.2 维纳滤波原理	96
4.3 维纳滤波器的最陡下降求解方法	98
4.4 LMS 算法	99
4.5 多级维纳滤波器理论	101
4.6 习题解答	105
4.7 仿真题	113
第 5 章 维纳滤波在信号处理中的应用	121
5.1 维纳滤波在线性预测中的应用	121
5.2 前后向线性预测及其格型滤波器结构	123
5.3 信道均衡	126
5.4 语音信号的线性预测编码	129
5.5 习题解答	130
5.6 仿真题	138
第 6 章 最小二乘估计理论及算法	144
6.1 预备知识: 线性方程组解的形式	144
6.2 最小二乘估计原理	144
6.3 用奇异值分解求解最小二乘问题	146
6.4 基于 LS 估计的 FBLP 原理及功率谱估计	147
6.5 递归最小二乘(RLS)算法	147
6.6 基于 QR 分解的递归最小二乘(QR-LS)算法原理	148
6.7 习题解答	151
6.8 仿真题	160
第 7 章 卡尔曼滤波	169
7.1 基于新息过程的递归最小均方误差估计	169
7.2 系统状态方程和观测方程的概念	170
7.3 卡尔曼滤波原理	171
7.4 卡尔曼滤波的统计性能	173
7.5 卡尔曼滤波的推广	173
7.6 卡尔曼滤波的应用	175
7.7 习题解答	181
7.8 仿真题	190

第 8 章 阵列信号处理与空域滤波	203
8.1 阵列接收信号模型	203
8.2 空间谱与 DOA 估计	205
8.3 基于 MUSIC 算法的信号 DOA 估计方法.....	205
8.4 信号 DOA 估计的 ESPRIT 算法	205
8.5 干涉仪测向原理	206
8.6 空域滤波与数字波束形成	207
8.7 基于 MVDR 算法的 DBF 方法	208
8.8 空域 APES 数字波束形成和 DOA 估计方法	210
8.9 多旁瓣对消数字自适应波束形成方法	211
8.10 阵列信号处理中的其他问题.....	212
8.11 习题解答.....	214
8.12 仿真题.....	226
第 9 章 盲信号处理	239
9.1 盲信号处理的基本概念	239
9.2 Busgang 盲均衡原理	240
9.3 SIMO 信道模型及子空间盲辨识原理	241
9.4 SIMO 信道的 CR 盲辨识原理及自适应算法	243
9.5 基于阵列结构的盲波束形成	245
9.6 基于信号恒模特性的盲波束形成	245
9.7 习题解答	246
9.8 仿真题	252

第 1 章 离散时间信号与系统

1.1 离散时间信号与系统基础

1.1.1 离散时间信号的定义与分类

1. 离散时间信号的定义

信号是承载信息的工具。离散时间信号则是指信号值仅在某些离散时刻有定义,而在其他时间无定义的信号。离散时间信号也常被称为离散时间序列。

如果将离散时间信号的信号值用有限位数的二进制数来表示,则称这样的离散时间信号为数字信号。在不考虑有限位二进制数引入的量化误差时,可认为数字信号就是离散时间信号。

2. 离散时间信号的分类

根据不同的信号特征可获得多种信号分类方法,包括确定信号与随机信号、实信号与复信号、离散时间周期信号与非周期信号、能量信号与功率信号等。

1.1.2 离散时间信号的差分和累加

1. 前向差分和后向差分

一阶前向差分

$$\Delta f(n) \stackrel{\text{def}}{=} f(n+1) - f(n) \quad (1.1)$$

一阶后向差分

$$\nabla f(n) \stackrel{\text{def}}{=} f(n) - f(n-1) \quad (1.2)$$

2. 累加

对信号 $f(n)$, 其累加信号 $y(n)$ 定义为

$$y(n) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{k=-\infty}^n f(k) \quad (1.3)$$

1.1.3 离散时间系统的定义及 LTI 特性

离散时间系统是用于处理、传输离散时间信号的物理装置,在数学上可表示为输入信号与输出信号之间的一种映射关系,为

$$y(n) = M[f(n)] \quad (1.4)$$

若输入信号 $f_1(n)$ 的响应为 $y_1(n) = M[f_1(n)]$, 输入信号 $f_2(n) = af_1(n)$ 的响应为 $y_2(n) = M[f_2(n)]$, 且满足 $y_2(n) = ay_1(n)$, 则称系统具有齐次性。

若输入 $f(n) = f_1(n) + f_2(n)$ 的响应为 $y(n) = M[f(n)]$, 且满足 $y(n) = y_1(n) + y_2(n)$, 则称系统具有可加性。

同时满足齐次性和可加性的系统, 称为线性系统。系统线性可简述为“和的响应等于响应的和”, 表示为

$$y(n) = M[a_1 f_1(n) + a_2 f_2(n)] = a_1 y_1(n) + a_2 y_2(n) \quad (1.5)$$

若输入信号 $f_1(n)$ 的响应为 $y_1(n) = M[f_1(n)]$, 输入信号 $f_2(n) = f_1(n - n_0)$ 的响应为 $y_2(n) = M[f_1(n - n_0)]$, 且 $y_2(n) = y_1(n - n_0)$, 则称系统为时不变系统。

系统的时不变性可简述为“时延的响应等于响应的时延”。

同时满足线性和时不变性的系统, 称为线性时不变系统, 常简称为 LTIT 系统 (linear time-invariant system)。

1.1.4 LTI 离散时间系统响应——卷积和

系统的单位冲激响应 $h(n)$ 是指当系统输入信号为 $\delta(n)$ 时的零状态响应。

对冲激响应为 $h(n)$ 的 LTI 系统, 输入 $f(n)$ 的零状态响应可表示为卷积和 (简称为卷积):

$$y(n) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} f(m)h(n-m) = f(n) * h(n) \quad (1.6)$$

1.1.5 离散时间信号相关函数及卷积表示

若离散时间信号 $x(n)$ 和 $y(n)$ 均为能量信号, 其互相关函数定义为

$$r_{xy}(m) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)y^*(n-m) \quad (1.7)$$

当 $x(n) = y(n)$ 时, 则有自相关函数, 即

$$r_x(m) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)x^*(n-m) \quad (1.8)$$

相关函数可用卷积表示为

$$r_{xy}(m) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)y^*(n-m) = x(m) * y^*(-m) \quad (1.9)$$

1.2 离散时间信号与系统的傅里叶分析

1.2.1 复指数信号通过 LTI 系统的响应

对冲激响应为 $h(n)$ 的 LTI 系统, 设输入为 $f(n) = z_0^n$, z_0 为复数, 则系统响应为

$$y(n) = H(z_0)z_0^n \quad (1.10)$$

其中 $H(z_0) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} h(m)z_0^{-m}$ 。

常将复指数信号 z_0^n 称为 LTI 离散时间系统的特征函数, $H(z_0)$ 为相应的特征值。

1.2.2 离散时间信号的傅里叶级数和傅里叶变换

对于周期为 N 的离散时间信号, 其傅里叶级数表示(或复指数分解)为

$$f(n) = \sum_{k=\langle N \rangle} a_k e^{jk\omega_0 n} \quad (1.11)$$

$$a_k = \frac{1}{N} \sum_{n=\langle N \rangle} f(n) e^{-jk\omega_0 n} \quad (1.12)$$

其中, $\omega_0 = 2\pi/N$; $k=\langle N \rangle$ 和 $n=\langle N \rangle$ 表示在一个周期 N 的范围。

当周期信号的周期 N 趋于无穷大时, 周期信号将趋于非周期信号, 此时, 信号的傅里叶级数表示将演化为信号的傅里叶变换(Fourier transform, FT), 为

$$F(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(n) e^{-j\omega n} \quad (1.13)$$

$$f(n) = \frac{1}{2\pi} \int_{2\pi} F(\omega) e^{j\omega n} d\omega \quad (1.14)$$

傅里叶变换对常简记为

$$f(n) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} F(\omega) \quad (1.15)$$

$F(\omega)$ 称为离散时间信号的频谱密度函数, 简称频谱。 $F(\omega)$ 的模和相角分别称为信号 $f(n)$ 的幅度谱和相位谱。

1.2.3 傅里叶变换的性质

线性

$$af_1(n) + bf_2(n) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} aF_1(\omega) + bF_2(\omega) \quad (1.16)$$

时移与频移性质

$$f(n - n_0) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} e^{-j\omega n_0} F(\omega) \quad (1.17)$$

$$e^{jn_0 n} f(n) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} F(\omega - \omega_0) \quad (1.18)$$

共轭对称性

$$f^*(n) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} F^*(-\omega) \quad (1.19)$$

若 $f(n)$ 是实序列, 则其傅里叶变换为共轭对称的, 即

$$F(\omega) = F^*(-\omega) \quad (1.20)$$

时域展宽特性

$$f_1(n) = \begin{cases} f\left(\frac{n}{N}\right), & n \text{ 为 } N \text{ 的整数倍} \\ 0, & \text{其他} \end{cases} \quad (1.21)$$

$$f_1(n) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} F(N\omega) \quad (1.22)$$

$$f(-n) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} F(-\omega) \quad (1.23)$$

频域微分特性

$$(-jn)f(n) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} \frac{dF(\omega)}{d\omega} \quad (1.24)$$

时域卷积定理

$$f(n) * h(n) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} F(\omega)H(\omega) \quad (1.25)$$

频域卷积定理

$$f(n)h(n) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} F(\beta)H(\omega - \beta) d\beta \quad (1.26)$$

帕斯瓦尔定理

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |f(n)|^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |F(\omega)|^2 d\omega \quad (1.27)$$

1.2.4 离散时间系统的频率响应与理想滤波器

1. 离散时间系统频率响应的定义

输入为 $f(n)$ 、输出为 $y(n)$ 的 LTI 离散时间系统, 可用差分方程描述:

$$y(n) + a_1 y(n-1) + \cdots + a_N y(n-N) = b_0 f(n) + \cdots + b_M f(n-M) \quad (1.28)$$

定义 LTI 离散时间系统的频率响应 $H(\omega)$ 为

$$H(\omega) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{Y(\omega)}{F(\omega)} = \frac{b_0 + b_1 e^{-j\omega} + \cdots + b_M e^{-jM\omega}}{1 + a_1 e^{-j\omega} + \cdots + a_N e^{-jN\omega}} = |H(\omega)| e^{j\varphi_H(\omega)} \quad (1.29)$$

其中, $|H(\omega)|$ 称为系统的幅频特性; $\varphi_H(\omega)$ 称为系统的相频特性。

系统冲激响应 $h(n)$ 和系统频率响应 $H(\omega)$ 是一对傅里叶变换, 即

$$h(n) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} H(\omega) \quad (1.30)$$

2. 离散时间理想滤波器

离散时间理想低通滤波器

$$H(\omega) = \begin{cases} 1, & |\omega| < \omega_c \\ 0, & \omega_c < |\omega| \leq \pi \end{cases}, \quad \text{或} \quad h(n) = \frac{\sin(\omega_c n)}{\pi n} \quad (1.31)$$

离散时间理想高通滤波器

$$H(\omega) = \begin{cases} 0, & |\omega| < \omega_c \\ 1, & \omega_c < |\omega| \leq \pi \end{cases}, \quad \text{或} \quad h(n) = \delta(n) - \frac{\sin(\omega_c n)}{\pi n} \quad (1.32)$$

离散时间理想带通滤波器

$$H(\omega) = \begin{cases} 1, & 0 < \omega_1 < |\omega| < \omega_2 < \pi \\ 0, & \text{其他} \end{cases}, \quad \text{或} \quad h(n) = \frac{\sin(\omega_2 n)}{\pi n} - \frac{\sin(\omega_1 n)}{\pi n} \quad (1.33)$$

1.2.5 离散时间信号的 DFT 和 FFT

1. 离散傅里叶变换

考虑一个持续长度为 L 的有限长离散时间信号 $f(n)$, 即 $f(n) = 0, n < 0$ 和 $n \geq L$, 且设 $N \geq L$, 离散傅里叶变换 (discrete Fourier transform, DFT) 和离散傅里叶逆变换 (inverse discrete Fourier transform, IDFT) 分别为

$$\bar{F}(k) = \sum_{n=0}^{N-1} f(n) e^{-jk\omega_0 n}, \quad k = 0, 1, \dots, N-1 \quad (1.34)$$

$$f(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \bar{F}(k) e^{jk\omega_0 n}, \quad n = 0, 1, \dots, N-1 \quad (1.35)$$

2. FFT 的概念

快速傅里叶变换(fast Fourier transform, FFT)是 DFT 的一种高效的计算方法。当 $N=1024$ 时,采用 FFT 需要 5120 次的复乘,大约为 DFT 所需复乘次数 1 048 576 的 0.488%。

1.3 离散时间信号的 Z 变换

1.3.1 Z 变换的概念

$$F(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(n) z^{-n} \quad (1.36)$$

$$f(n) = \frac{1}{2\pi j} \oint F(z) z^{n-1} dz \quad (1.37)$$

使 $F(z)$ 收敛的 z 的取值范围(或 r 的取值范围)称为 Z 变换的收敛域(region of convergence, ROC)。它通常是圆心在原点的同心圆环。

当 Z 变换的收敛域包含单位圆时,傅里叶变换与 Z 变换的关系为

$$F(\omega) = F(z) \Big|_{z=e^{j\omega}} \quad (1.38)$$

1.3.2 Z 变换的性质

线性

$$af_1(n) + bf_2(n) \xleftrightarrow{z} aF_1(z) + bF_2(z) \quad \text{ROC: } R_c \supseteq R_1 \cap R_2 \quad (1.39)$$

时移特性

$$f(n - n_0) \xleftrightarrow{z} z^{-n_0} F(z) \quad \text{ROC: } R_c = R \quad (1.40)$$

Z 域尺度变换

$$z_0^n f(n) \xleftrightarrow{z} F\left(\frac{z}{z_0}\right) \quad \text{ROC: } R_c = |z_0| R \quad (1.41)$$

共轭特性

$$f^*(n) \xleftrightarrow{z} F^*(z^*) \quad \text{ROC: } R \quad (1.42)$$

时域展宽特性: 信号 $f(n)$ 时间上展宽 N 倍的信号 $f_1(n)$ 如式(1.21)所示, $f_1(n)$ 的 Z 变换为

$$f_1(n) \xleftrightarrow{z} F(z^N) \quad \text{ROC: } R_c = R^{1/N} \quad (1.43)$$

时域反转特性

$$f(-n) \xleftrightarrow{z} F\left(\frac{1}{z}\right) \quad \text{ROC: } R_c = \frac{1}{R} \quad (1.44)$$

Z 域微分特性

$$nf(n) \xleftrightarrow{z} -z \frac{dF(z)}{dz} \quad \text{ROC: } R_c = R \quad (1.45)$$

时域卷积特性

$$f_1(n) * f_2(n) \xleftrightarrow{z} F_1(z)F_2(z) \quad \text{ROC: } R_c \supseteq R_1 \cap R_2 \quad (1.46)$$

初值定理: 若 $f(n)$ 为一右边序列, 即当 $n < n_0$ 时, $f(n) = 0$, $f(n)$ 的 Z 变换为 $F(z)$, 那么

$$f(n_0) = \lim_{z \rightarrow \infty} [z^{n_0} F(z)] \quad (1.47)$$

终值定理: 若信号 $f(n)$ 为右边序列, $f(n)$ 的 Z 变换为 $F(z)$, 且 $(1 - z^{-1})F(z)$ 的收敛域包含单位圆, 则

$$f(\infty) = \lim_{n \rightarrow \infty} f(n) = \lim_{z \rightarrow 1} [(1 - z^{-1})F(z)] \quad (1.48)$$

1.3.3 离散时间系统的 Z 域描述——系统函数

LTI 离散时间系统的系统函数 $H(z)$ 为

$$H(z) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{Y(z)}{F(z)} = \frac{b_0 + b_1 z^{-1} + \dots + b_M z^{-M}}{1 + a_1 z^{-1} + \dots + a_N z^{-N}} \quad (1.49)$$

可见

$$Y(z) = H(z)F(z) \quad (1.50)$$

1.3.4 离散时间系统的方框图和信号流图表示

系统函数(1.49)所描述的系统, 可用直接型方框图表示(见图 1.1), 且设 $N \geq M$ 。

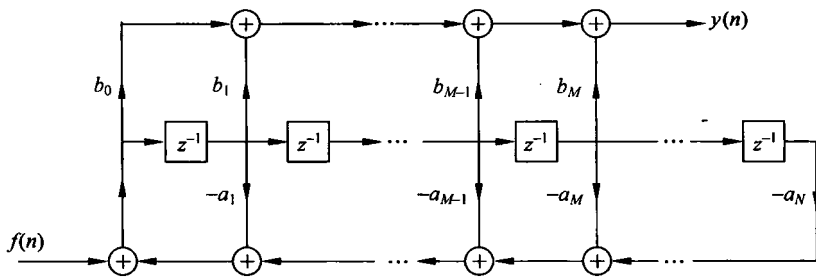


图 1.1 N 阶系统的直接型方框图

1.4 LTI 离散时间系统性能描述

1.4.1 系统的记忆性

对任意系统, 如果系统在任意时刻 n_0 的响应 $y(n_0)$ 仅与 n_0 时刻的输入 $f(n_0)$ 有关, 而与其他时刻的输入 $f(n)$ 无关, 则称该系统为非记忆系统, 否则称为记忆系统。系统的记忆性有时也被称为动态特性。

对于无记忆 LTI 系统, 其系统冲激响应为

$$h(n) = K\delta(n) \quad (1.51)$$

系统函数和系统频率响应为

$$H(\omega) = H(z) = K \quad (1.52)$$

其中 K 为一常数。

1.4.2 系统的因果性

如果系统任意 n_0 时刻的响应 $y(n_0)$ 与 n_0 以后的输入 $f(n)$ 无关, 则该系统称为因果系统, 否则为非因果系统。

对于因果 LTI 系统, 其系统冲激响应满足

$$h(n) = 0, \quad n < 0 \quad (1.53)$$

1.4.3 系统的可逆性

设信号 $f_1(n)$ 、 $f_2(n)$ 通过系统的响应分别为 $y_1(n)$ 、 $y_2(n)$, 如果 $f_1(n) \neq f_2(n)$, 一定有 $y_1(n) \neq y_2(n)$ 成立, 则称系统为可逆系统。

对可逆系统, 若 LTI 系统的冲激响应为 $h(n)$, 其逆系统的冲激响应为 $h_{\text{inv}}(n)$, 则二者之间满足

$$h(n) * h_{\text{inv}}(n) = \delta(n) \quad (1.54)$$

其频域和 Z 域满足

$$H(\omega)H_{\text{inv}}(\omega) = 1, \quad H(z)H_{\text{inv}}(z) = 1 \quad (1.55)$$

1.4.4 系统的稳定性和最小相位系统

对任意系统, 如果任意信号 $f(n)$ 满足 $|f(n)| < A_1 < \infty$, 且 $f(n)$ 通过系统的响应 $y(n)$ 满足 $|y(n)| < A_2 < \infty$, 其中 A_1 、 A_2 均为有界常数, 则称该系统是稳定系统。

对有理系统函数的 LTI 离散时间系统, 系统稳定的充要条件是系统函数的收敛域包含单位圆。

如果一个因果稳定系统的零点和极点都在单位圆内, 这个系统就称为最小相位系统, 最小相位系统的逆系统也是因果和稳定的。

1.4.5 线性相位系统与系统的群时延

1. 线性相位系统的概念

LTI 离散时间系统的频率响应可表示为 $H(\omega) = |H(\omega)|e^{j\varphi_H(\omega)}$, 如果系统的相频特性 $\varphi_H(\omega)$ 是频率 ω 的线性函数, 即 $\varphi_H(\omega)$ 可表示为

$$\varphi_H(\omega) = -\omega\tau_0 \quad (1.56)$$

其中 τ_0 是常数, 则称该 LTI 系统是线性相位系统, 否则称为非线性相位系统。

2. 群时延的概念

LTI 离散时间系统的群时延定义为

$$\tau(\omega) = -\frac{d\varphi_H(\omega)}{d\omega} \quad (1.57)$$

1.5 离散时间系统的格型结构

全零点滤波器的格型结构

一个 M 阶的全零点系统的系统函数可表示为

$$H(z) = B(z) = 1 + \sum_{i=1}^M b_i^{(M)} z^{-i} \quad (1.58)$$

系统的格型结构可表示为图 1.2 所示的形式。

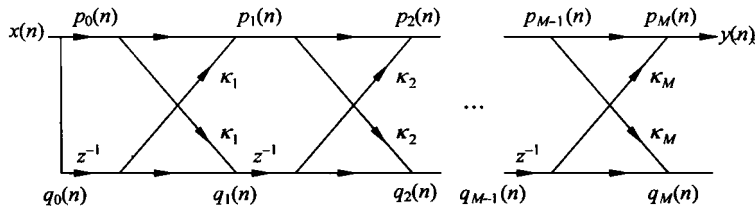


图 1.2 全零点滤波器的格型结构

算法 1.1 (求解全零点系统格型结构各系数的计算步骤)

步骤 1 给定 M 阶系统函数 $H(z)$ 后, $b_i^{(M)}$ ($i=1, 2, \dots, M$) 即被确定, 令 $\kappa_M = b_M^{(M)}$ 。

步骤 2 根据 κ_M 和 $b_i^{(M)}$, $i=1, 2, \dots, M$, 利用式

$$\kappa_m = b_m^{(m)}, \quad b_i^{(m-1)} = \frac{b_i^{(m)} - \kappa_m b_{m-i}^{(m)}}{1 - \kappa_m^2}$$

可求出 $B_{M-1}(z)$ 的 $M-1$ 个系数 $b_i^{(M-1)}$, $i=1, 2, \dots, M-1$, 并令 $\kappa_{M-1} = b_{M-1}^{(M-1)}$ 。

步骤 3 重复步骤 2 即可将其余的 κ_i 及 $B_i(z)$ 系数求出, $i=1, 2, \dots, M-2$ 。

1.6 连续时间信号的离散化及其频谱关系

分别用 $f_c(t)$ 和 $f_d(n)$ 表示连续时间信号和离散时间信号, 且 $f_d(n) \stackrel{\text{def}}{=} f_c(nT_s)$, 定义

$$y(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f_c(nT_s) \delta(t - nT_s) \quad (1.59)$$

且设采样周期 T_s 满足奈奎斯特采样定理 ($\Omega_s > 2\Omega_M$), 则有

$$F_d(\omega) = Y(\Omega) \Big|_{\Omega = \frac{\omega}{T_s}} \quad \text{或} \quad Y(\Omega) = F_d(\omega) \Big|_{\omega = \Omega T_s} \quad (1.60)$$

且

$$Y(\Omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f_c(nT_s) e^{-j\Omega n T_s}$$

连续时间信号 $f_c(t)$ 与离散时间信号 $f_d(n)$ 间的信号波形和信号频谱关系如图 1.3 所示, 且有数字角频率满足 $\omega = \Omega T_s < \pi$ 。

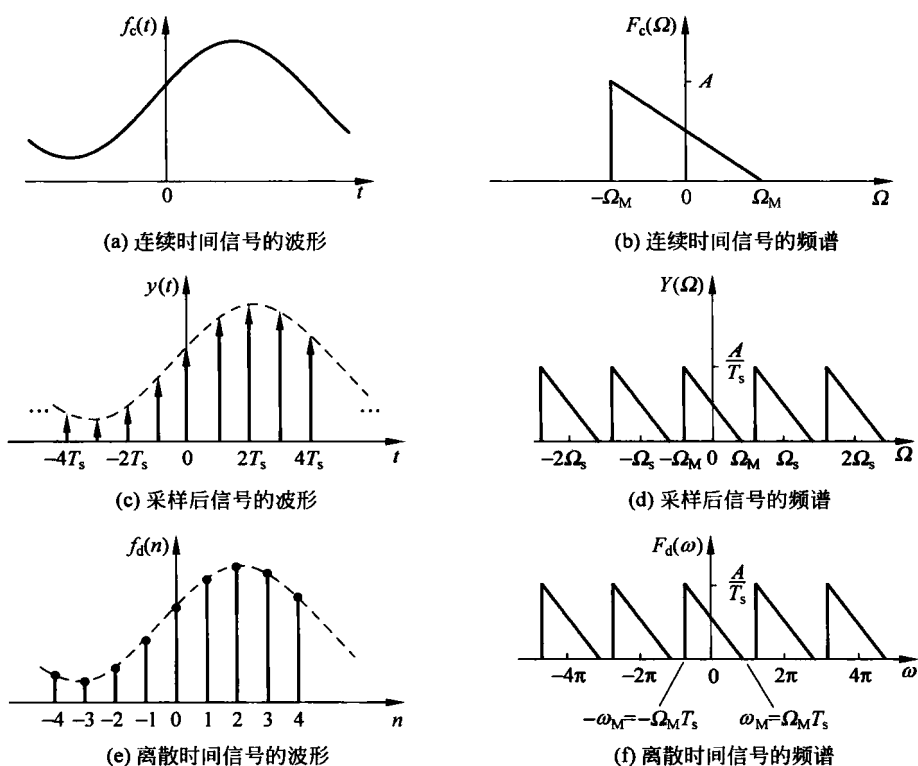


图 1.3 连续时间信号的采样及离散化

1.7 离散时间实信号的复数表示

1.7.1 离散时间解析信号(预包络)

实信号 $f(n)$ 的频谱 $F(\omega)$ 满足 $F(\omega) = F^*(-\omega)$, 定义单边频谱信号 $z(n)$ 的离散时间傅里叶变换 $Z(\omega)$ 为

$$Z(\omega) \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} 0, & -\pi < \omega < 0 \\ 2F(\omega), & 0 < \omega < \pi \end{cases} \quad (1.61)$$

$Z(\omega)$ 的傅里叶逆变换 $z(n)$ 通常是一个复数信号, 称为实信号 $f(n)$ 的解析信号或预包络。

1.7.2 离散时间希尔伯特变换

式(1.61)所定义的 $Z(\omega)$ 可用频域阶跃信号 $U(\omega)$ 表示为

$$Z(\omega) = 2F(\omega)U(\omega) \quad (1.62)$$

根据时域卷积特性, 解析信号 $z(n)$ 可表示为

$$z(n) = 2f(n) * \left[\frac{1}{2}\delta(n) + j \frac{1 - (-1)^n}{2\pi n} \right] = f(n) + j \left[f(n) * \frac{1 - (-1)^n}{n\pi} \right] \quad (1.63)$$

定义信号 $f(n)$ 的希尔伯特变换为

$$\hat{f}(n) \stackrel{\text{def}}{=} f(n) * \frac{1 - (-1)^n}{n\pi} = \frac{1}{\pi} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{1 - (-1)^k}{k} f(n-k) \quad (1.64)$$

由于 $h(n) = [1 - (-1)^n] / (n\pi)$ 的傅里叶变换 $H(\omega)$ 为

$$H(\omega) = -j \operatorname{sgn}(\omega) = \begin{cases} j, & -\pi < \omega < 0 \\ -j, & 0 < \omega < \pi \end{cases} \quad (1.65)$$

所以, $\hat{f}(n)$ 的频谱 $\hat{F}(\omega)$ 为

$$\hat{F}(\omega) = F(\omega)H(\omega) \quad (1.66)$$

于是, 解析信号的频谱为

$$Z(\omega) = F(\omega) + j\hat{F}(\omega) \quad (1.67)$$

1.7.3 离散时间窄带信号的复数表示(复包络)

对离散时间窄带实信号 $f(n) = a(n) \cos[\omega_0 n + \varphi(n)]$, 其复包络(或称基带信号, 零中频信号)可表示为

$$g(n) = a(n) \cos[\varphi(n)] + ja(n) \sin[\varphi(n)] = g_I(n) + jg_Q(n) \quad (1.68)$$

其中

$$g_I(n) = a(n) \cos[\varphi(n)], \quad g_Q(n) = a(n) \sin[\varphi(n)] \quad (1.69)$$

$g_I(n)$ 和 $g_Q(n)$ 分别称为复包络 $g(n)$ 的同相分量和正交分量, 或简称为 I 分量和 Q 分量。

窄带实信号 $f(n) = a(n) \cos[\omega_0 n + \varphi(n)]$ 的解析信号满足

$$z(n) = g(n) e^{j\omega_0 n} \quad (1.70)$$

1.8 窄带信号的正交解调与数字基带信号

1.8.1 模拟正交解调与采集电路原理

模拟正交解调获得离散时间复包络的方法如图 1.4 所示。其中, LO 代表本振, LPF 为低通滤波器。

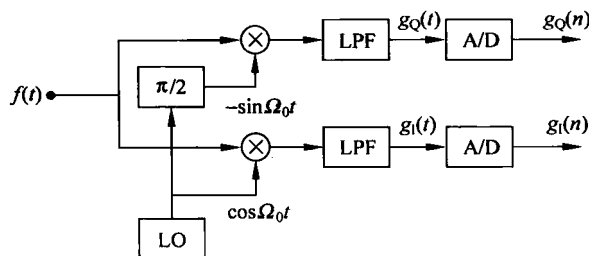


图 1.4 模拟正交解调与采集电路原理框图

$f(t)$ 是实的连续时间窄带信号, 为 $f(t) = a(t) \cos[\Omega_0 t + \varphi(t)]$, 经过图 1.4 的系统后, 获得 $f(t)$ 的离散时间基带信号的同相和正交分量分别为

$$g_I(n) = a(n) \cos[\varphi(n)], \quad g_Q(n) = a(n) \sin[\varphi(n)] \quad (1.71)$$