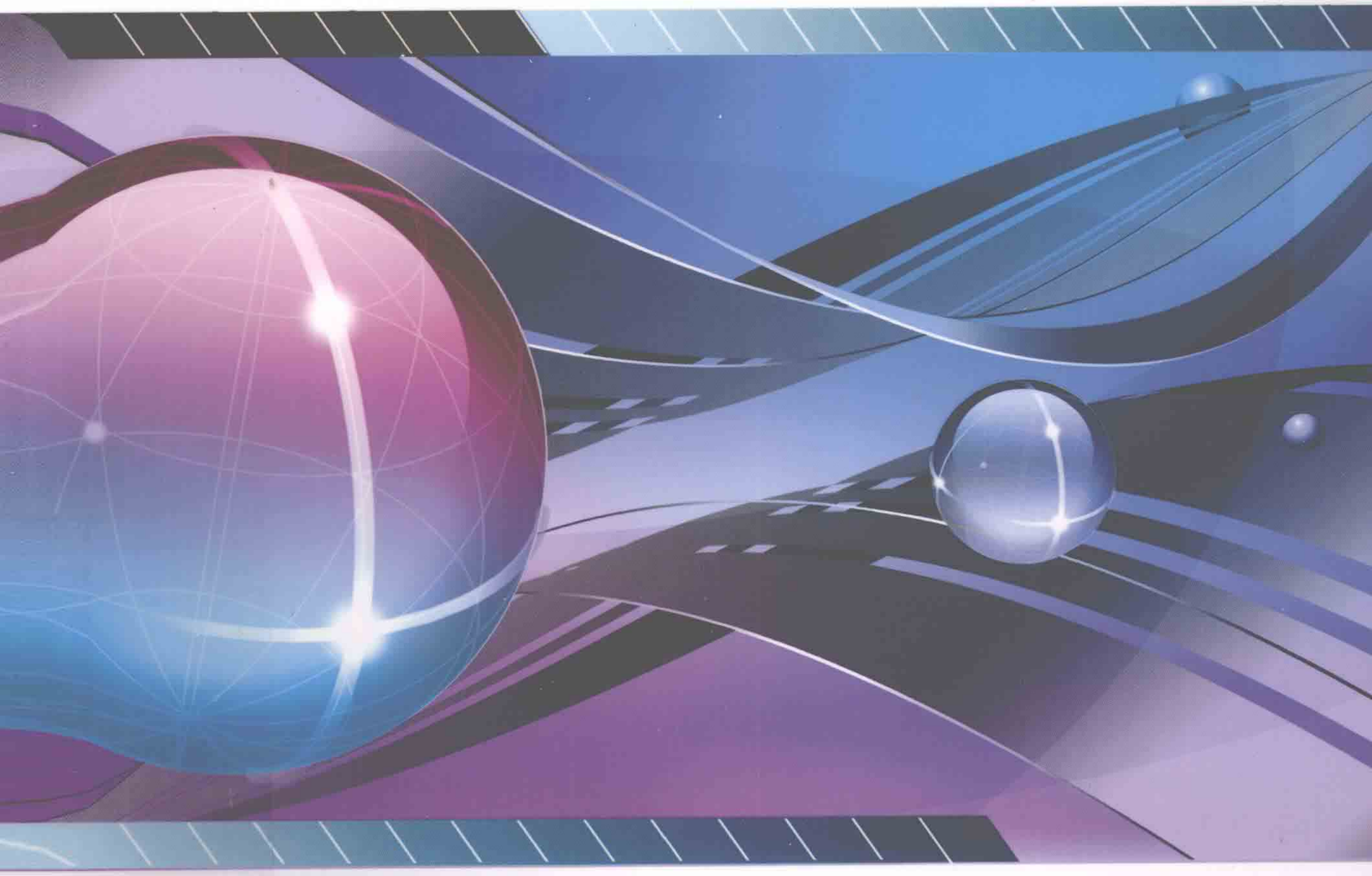
高等学校教材

线性代数选讲

马建荣　刘三阳　编著



電子工業出版社
PUBLISHING HOUSE OF ELECTRONICS INDUSTRY
http://www.phei.com.cn

高等学校教材

线性代数选讲

马建荣　刘三阳　编著

電子工業出版社
Publishing House of Electronics Industry
北京·BEIJING

内容简介

本书将线性代数的主要内容按问题分类，通过对其若干专题的引申、强化、深化与扩充，对有代表性的典型例题的分析与求解，对常用解题方法和技巧的归纳与总结，使学生温故知新，系统地掌握线性代数的基本概念、基本理论和基本方法，深入理解诸多概念之间的内在联系，提高分析问题和解决问题的能力，得到一次综合训练和充实提高的机会。本书例题丰富多样，既重视一题多解（证），又强调多题一解（证）、一法多用、以例示理、以题释法、借题习法。通过选讲，帮助读者开阔视野，扩展思路，加深理解高等代数、线性代数的主要内容，熟练掌握各种解题方法、技巧和规律。

本书可供高等学校的学生学习、复习，以及考研的同学备考高等数学、线性代数时使用，也可供数学教师教学参考。

图书在版编目(CIP)数据

线性代数选讲/马建荣，刘三阳编著. —北京：电子工业出版社，2011.4
ISBN 978-7-121-13228-5

Ⅰ. ①线… Ⅱ. ①马… ②刘… Ⅲ. ①线性代数－高等学校－教材 Ⅳ. ①O151.2

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2011)第 055637 号

策划编辑：陈晓莉
责任编辑：陈晓莉
印　　刷：
装　　订：北京市李史山胶印厂
出版发行：电子工业出版社
　　　　　北京市海淀区万寿路 173 信箱　邮编 100036
开　　本：787×1092　1/16　印张：18　字数：461 千字
印　　次：2011 年 4 月第 1 次印刷
印　　数：4000 册　定价：34.00 元

凡所购买电子工业出版社图书有缺损问题，请向购买书店调换。若书店售缺，请与本社发行部联系，联系及邮购电话：(010)88254888。

质量投诉请发邮件至 zlts@phei.com.cn，盗版侵权举报请发邮件至 dbqq@phei.com.cn。

服务热线：(010)88258888。

前　言

线性代数是理工、经管等学科大学生的一门重要的数学基础课程，也是研究生入学考试的必考内容。随着计算机技术的飞速发展和广泛应用，大量工程和科研中的问题可以通过线性代数计算方法得到定量的解决，线性代数方法日益渗透到工程技术和经济社会的众多领域，其重要性和实用性与日俱增。因此，线性代数已经成为理工科大学生学习后续课程的必备基础和科技人员解决实际问题的有力工具。线性代数课程内容较多、较抽象，且有一套特有的理论体系和思维方法，学生初学时，往往感到抽象难懂，解题困难，不易融会贯通. 为了帮助学生更好地掌握这门课程，我们编写了这本《线性代数选讲》。

《线性代数选讲》一书按照加强基础、面向前沿、突出思想、关注应用和方便阅读的原则，将线性代数的主要内容按问题分类，通过对线性代数若干内容的引申、强化、深化与扩充，对有代表性的典型例题的分析和求解，对常用解题方法和技巧的归纳总结，使学生系统地掌握线性代数的基本概念、基本理论和基本方法，深入理解诸多概念之间的内在联系，提高学生分析问题和解决问题的能力。本书取材基于而又略深于高等代数和线性代数教材，与其若即若离，不即不离，是其自然引申、补充、推广和深化，本书例题题型多样、内容广泛，其中大部分选自往年研究生入学试题，且有一定的梯度，除基本题外，还有不少较有深度的典型例题，解答时往往需要一定的技巧。通过选讲，帮助读者开阔视野、扩展思路，掌握方法，提高解题技能。

作者诚挚地感谢西北大学博士生导师赵宪钟教授，他仔细审阅了全部书稿，并提出了许多宝贵的建议。

本书的写作和出版得到了电子工业出版社出版基金的资助和西安电子科技大学理学院、教务处有关领导的大力支持。电子工业出版社的陈晓莉编辑做了大量卓有成效的工作，在此对他们表示感谢！

由于编者水平有限，不当之处在所难免，敬请读者指正。作者的电子邮址为：

马建荣　jrma@mail. xidian. edu. cn

刘三阳　liusanyang@126. com

编　者

2011 年 2 月

目　录

第一讲　行列式的计算

行列式是一个重要的数学工具,在线性代数中有较多的应用.对于一个学习线性代数的学生来说,能熟练迅速地计算行列式是学好线性代数课程的基本功.

1.1　重要的定理与公式

1. n 阶行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{j_1 j_2 \cdots j_n} (-1)^{\tau(j_1 j_2 \cdots j_n)} a_{1j_1} a_{2j_2} \cdots, a_{nj_n} \tag{1.1}$$

其中,$j_1 j_2 \cdots j_n$是 $1,2,\cdots,n$ 的一个 n 元排列;$\sum\limits_{j_1 j_2 \cdots j_n}$ 表示对所有 n 元排列 $j_1 j_2 \cdots j_n$求和.

2. n 阶行列式 $D=|a_{ij}|$等于它的任一行(列)的所有元素与其对应的代数余子式乘积的和,即

$$D=a_{i1}A_{i1}+a_{i2}A_{i2}+\cdots+a_{in}A_{in} \quad (i=1,2,\cdots,n)$$

或

$$D=a_{1j}A_{1j}+a_{2j}A_{2j}+\cdots+a_{nj}A_{nj} \quad (j=1,2,\cdots,n)$$

3. n 阶行列式 $D=|a_{ij}|$的任一行(列)各元素与另一行(列)对应元素的代数余子式乘积之和为零,即

$$\sum_{k=1}^{m} a_{ik}A_{jk}=0 \quad (i \neq j) \quad 或 \quad \sum_{k=1}^{n} a_{ki}A_{kj}=0 \quad (i \neq j)$$

将以上定理 2 与定理 3 结合起来,便得下面的重要公式:

$$\sum_{k=1}^{n} a_{ik}A_{jk}=\begin{cases} D, & 当\ i=j\ 时 \\ 0, & 当\ i \neq j\ 时 \end{cases}, \qquad \sum_{k=1}^{n} a_{ki}A_{kj}=\begin{cases} D, & 当\ i=j\ 时 \\ 0, & 当\ i \neq j\ 时 \end{cases} \tag{1.2}$$

4. 上(下)三角形行列式:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & & & \mathbf{0} \\ a_{21} & a_{22} & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ & & \ddots & \vdots \\ \mathbf{0} & & & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn} \tag{1.3}$$

对角行列式:

$$\begin{vmatrix} d_1 & & & \\ & d_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & d_n \end{vmatrix} = d_1 d_2 \cdots d_n \tag{1.4}$$

次对角线的行列式:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1,n-1} & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2,n-1} & \\ \cdots & \begin{smallmatrix} & & \cdot \\ & \cdot & \\ \cdot & & \end{smallmatrix} & & \\ a_{n1} & & & \mathbf{0} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \mathbf{0} & & & a_{1n} \\ & & a_{2,n-1} & a_{2n} \\ & \begin{smallmatrix} & & \cdot \\ & \cdot & \\ \cdot & & \end{smallmatrix} & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,n-1} & a_{nn} \end{vmatrix} = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} a_{1n}a_{2,n-1}\cdots a_{n1}$$

5. 范德蒙德(Vandermonde)行列式:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 & \cdots & x_n \\ x_1^2 & x_2^2 & x_3^2 & \cdots & x_n^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & x_3^{n-1} & \cdots & x_n^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{1\leqslant j<i\leqslant n}(x_i - x_j) \tag{1.5}$$

6. 设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 都是 n 阶矩阵,则 $|\boldsymbol{AB}|=|\boldsymbol{A}||\boldsymbol{B}|$.

7. 设 $\boldsymbol{A}$ 是 n 阶矩阵,$\boldsymbol{D}$ 是 m 阶矩阵,则

$$\begin{vmatrix} \boldsymbol{A} & \mathbf{0} \\ \boldsymbol{C} & \boldsymbol{D} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{B} \\ \mathbf{0} & \boldsymbol{D} \end{vmatrix} = |\boldsymbol{A}||\boldsymbol{D}|, \quad \begin{vmatrix} \mathbf{0} & \boldsymbol{A} \\ \boldsymbol{D} & \boldsymbol{B} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{C} & \boldsymbol{A} \\ \boldsymbol{D} & \mathbf{0} \end{vmatrix} = (-1)^{mn}|\boldsymbol{A}||\boldsymbol{D}| \tag{1.6}$$

一般地,若 $\boldsymbol{A}$ 是 n 阶可逆矩阵,则

$$\begin{vmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{B} \\ \boldsymbol{C} & \boldsymbol{D} \end{vmatrix} = |\boldsymbol{A}||\boldsymbol{D}-\boldsymbol{C}\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B}|; \tag{1.7}$$

若 $\boldsymbol{D}$ 是 m 阶可逆矩阵,则

$$\begin{vmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{B} \\ \boldsymbol{C} & \boldsymbol{D} \end{vmatrix} = |\boldsymbol{D}||\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}\boldsymbol{D}^{-1}\boldsymbol{C}|; \tag{1.8}$$

特别地,当 $\boldsymbol{A}$ 是 n 阶可逆矩阵,$\boldsymbol{D}$ 是 m 阶可逆矩阵,则

$$|\boldsymbol{A}||\boldsymbol{D}-\boldsymbol{C}\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B}| = \begin{vmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{B} \\ \boldsymbol{C} & \boldsymbol{D} \end{vmatrix} = |\boldsymbol{D}||\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}\boldsymbol{D}^{-1}\boldsymbol{C}| \tag{1.9}$$

8. 设 $\boldsymbol{A}$ 是 $n\times m$ 矩阵,$\boldsymbol{B}$ 是 $m\times n$ 矩阵,当 $n\geqslant m$ 时,对任意数 λ,则有

$$|\lambda\boldsymbol{E}_n \pm \boldsymbol{AB}| = \lambda^{n-m}|\lambda\boldsymbol{E}_m \pm \boldsymbol{BA}|. \tag{1.10}$$

特别地,当 $m=1$,$\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}$ 为 n 维列向量时,有

$$|\lambda\boldsymbol{E}_n \pm \boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}| = \lambda^{n-1}(\lambda \pm \boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}) = \lambda^{n-1}(\lambda \pm \boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\beta}) \tag{1.11}$$

9. 设 $\boldsymbol{A}$ 是 n 阶矩阵,$\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}$ 均为 n 维列向量,$\boldsymbol{A}^*$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的伴随矩阵,则

$$\det(\boldsymbol{A}\pm\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}) = \det(\boldsymbol{A}) \pm \boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{\alpha} \tag{1.12}$$

特别地,当 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶可逆矩阵,则

$$\det(\boldsymbol{A}\pm\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}) = (1\pm\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{\alpha}) \cdot \det \boldsymbol{A} \tag{1.13}$$

10. 循环矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的行列式

$$\det(\boldsymbol{A}) = \begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & \cdots & a_{n-2} & a_{n-1} \\ a_{n-1} & a_0 & a_1 & \cdots & a_{n-3} & a_{n-2} \\ a_{n-2} & a_{n-1} & a_0 & \cdots & a_{n-4} & a_{n-3} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_2 & a_3 & a_4 & \cdots & a_0 & a_1 \\ a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_{n-1} & a_0 \end{vmatrix} = f(1)f(\omega)\cdots f(\omega^{n-1}) \tag{1.14}$$

其中 $f(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_{n-1}x^{n-1}$,$\omega=\exp(2\pi\mathrm{i}/n)=\cos\dfrac{2\pi}{n}+\mathrm{i}\sin\dfrac{2\pi}{n}$, $1,\omega,\omega^2,\cdots,$

ω^{n-1}互异且均为方程 $x^n=1$ 的根.

上面的公式,读者可能有些比较熟悉,有些则不然.我们在后面的讨论中,将给出证明,今后读者在计算行列式时可直接引用这些公式.

1.2 利用行列式的定义计算行列式

【例 1-1】 已知 n 阶行列式 D 中至少有 n^2-n+1 个元素是零,证明:$D=0$.

证明 由于 n 阶行列式中共有 n^2 个元素,若其中至少有 n^2-n+1 个元素是零,故非零元素最多有 $n-1$ 个.根据行列式的定义,行列式中的每一项都是 n 个元素的连乘积,因而该行列式的每一项至少有一个零元素,所以每一项都等于零,故 $D=0$.

【例 1-2】 求行列式 $f(x)=\begin{vmatrix} 5x & x & 2 & 4 \\ 1 & x & 1 & 2 \\ 1 & 2 & x & 3 \\ x & 1 & 2 & 3x \end{vmatrix}$ 展开式中 x^4 与 x^3 的系数.

分析 按行列式的定义,行列式中的每一项都是取自不同行不同列的元素的乘积.由于此行列式中每个元素的次数不超过 1,所以,要构成 x^4 必须各行各列都要取到 x,因此只能是 $a_{11}a_{22}a_{33}a_{44}$.至于 x^3,可判断该项必不含 a_{11}.若含 a_{12},则可由 $a_{12}a_{21}a_{33}a_{44}$,$a_{12}a_{24}a_{33}a_{41}$ 分别构成;若不含 a_{12},则可由 $a_{14}a_{22}a_{33}a_{41}$,构成,可见构成 x^3 共有三项.

解 按行列式的定义,当且仅当 a_{11},a_{22},a_{33},a_{44} 四元素相乘时才会出现 x^4,故含 x^4 为:$(-1)^{\tau(1234)}a_{11}a_{22}a_{33}a_{44}=15x^4$,因此,$x^4$ 的系数为 15.

由于 $a_{12}a_{21}a_{33}a_{44}$,$a_{12}a_{24}a_{33}a_{41}$,$a_{14}a_{22}a_{33}a_{41}$,都含有 x^3,从而

$(-1)^{\tau(2134)}a_{12}a_{21}a_{33}a_{44}=-3x^3$,$(-1)^{\tau(2431)}a_{12}a_{24}a_{33}a_{41}=2x^3$,$(-1)^{\tau(4231)}a_{14}a_{22}a_{33}a_{41}=-4x^3$,

故 x^3 的系数为 -5.

【例 1-3】 证明下列等式

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & \cdots & a_{1n} \\ 0 & \cdots & a_{2,n-1} & a_{2n} \\ \vdots & \iddots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,n-1} & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1,n-1} & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2,n-1} & 0 \\ \vdots & \iddots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & 0 & 0 \end{vmatrix} = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} a_{1n}a_{2,n-1}\cdots a_{n1}$$

证明 首先考察行列式

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & \cdots & a_{1n} \\ 0 & \cdots & a_{2,n-1} & a_{2n} \\ \vdots & \iddots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,n-1} & a_{nn} \end{vmatrix}$$

我们知道,n 阶行列式的一般项为 $a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}$,所带符号是$(-1)^{\tau(j_1j_2\cdots j_n)}$.因为此行列式第 1 行除了 a_{1n}外,其他数都是 0,因而要得到非零项,第 1 行只能取 a_{1n},即 $j_1=1$.这样第 2 行不能选 a_{2n}(因每列只能选一个数),故只能取 $a_{2,n-1}$.类似地,第 3 行只能取 $a_{3,n-2}$,….因此这个行列式只有唯一的一项,即

$$a_{1n}a_{2,n-1}\cdots a_{n-1,2}a_{n1}$$

有可能不为零,而这一项列标所组成的排列的逆序数为

$$\tau(n,n-1,\cdots,2,1)=(n-1)+\cdots+1+0=\frac{1}{2}n(n-1)$$

于是
$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & \cdots & a_{1n} \\ 0 & \cdots & a_{2,n-1} & a_{2n} \\ \vdots & \iddots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,n-1} & a_{nn} \end{vmatrix}=(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}a_{1n}a_{2,n-1}\cdots a_{n1} \tag{1.15}$$

完全类似地可以证明
$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1,n-1} & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2,n-1} & 0 \\ \vdots & \iddots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & 0 & 0 \end{vmatrix}=(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}a_{1n}a_{2,n-1}\cdots a_{n1} \tag{1.16}$$

【例 1-4】 计算行列式
$$D=\begin{vmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 2 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & n-2 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ n-1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & n \end{vmatrix}$$

解 根据行列式的定义，n 阶行列式中项的一般形式为 $a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}$，注意到该行列式的第一行除 $a_{1,n-1}$外全为零. 第二行除 $a_{2,n-2}$外全为零，……，因而除去
$$a_{1,n-1}a_{2,n-2}\cdots a_{n-1,1}a_{nn}$$
这一项外，其余项全是零，而这一项的列标所组成的排列的逆序数为
$$\tau(n-1,n-2,\cdots,1,n)=(n-2)+\cdots+1+0+0=\frac{1}{2}(n-1)(n-2).$$
于是
$$D=(-1)^{\tau(n-1,n-2,\cdots,1,n)}1\times2\times\cdots\times n=(-1)^{\frac{1}{2}(n-1)(n-2)}n!.$$

【例 1-5】 计算 5 阶行列式
$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} \\ a_{31} & a_{32} & 0 & 0 & 0 \\ a_{41} & a_{42} & 0 & 0 & 0 \\ a_{51} & a_{52} & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

解 由题设知，当 $k>2$ 时，$a_{3k}=a_{4k}=a_{5k}=0$，而行列式 D 中的一般项是
$$a_{1j_1}a_{2j_2}a_{3j_3}a_{4j_4}a_{5j_5}.$$
由于 j_3,j_4,j_5互不相同且取自 1～5，故其中至少有一个大于或等于 3，因此 $a_{3j_3},a_{4j_4},a_{5j_5}$ 中至少有一个是零，于是行列式 D 的展开式中每一项都是 0，所以行列式 $D=0$.

1.3 计算行列式的基本方法

行列式定义表达式是一个复杂的计算式，n 阶行列式共有 $n!$ 项求和，而每一项又是由 n 个元素的乘积构成，直接利用定义计算行列式是很困难的. 例如，对于 25 阶行列式，乘法的次

数约为 3.7227×10^{26}.假如用每秒能做一百万亿次乘法的计算机来计算这个行列式,需要 12 万年.所以行列式的定义只能用于推理和低阶行列式以及零元素很多的行列式的计算.通常计算行列式的方法有:定义法、化三角形法、降阶法、递推法、加边法、数学归纳法等.在计算行列式时要根据行列式元素的特点选择相应的计算办法.

1.3.1 化三角形法

利用行列式的性质将行列式化为特殊的行列式,而这些特殊行列式的值很容易计算.如化为三角形行列式、对角行列式等.

在计算行列式时,为了使计算过程清晰醒目,约定如下记号:

交换行列式的第 i 行(列)与第 j 行(列),简记为 $r_i \leftrightarrow r_j (c_i \leftrightarrow c_j)$.

给行列式的第 i 行(列)同乘以数 k,简记为 $kr_i (kc_i)$.

把行列式的 j 行(列)的 k 倍加到第 i 行(列),简记为 $r_i + kr_j (c_i + kc_j)$.

【例 1-6】 计算 4 阶行列式

$$D=\begin{vmatrix} 3 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 4 & 7 \\ 2 & 2 & 1 & 4 \end{vmatrix}$$

解

$$D \xlongequal{r_1 \leftrightarrow r_2} -\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & -1 & 0 \\ 2 & 3 & 4 & 7 \\ 2 & 2 & 1 & 4 \end{vmatrix} \xlongequal[r_4-2r_1]{\substack{r_2-3r_1 \\ r_3-2r_1}} -\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -4 & -6 \\ 0 & 3 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & -1 & 0 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[r_4-2r_2]{r_3-3r_2} -\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -4 & -6 \\ 0 & 0 & 14 & 21 \\ 0 & 0 & 7 & 12 \end{vmatrix} \xlongequal[r_4-2r_3]{r_3 \leftrightarrow r_4} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -4 & -6 \\ 0 & 0 & 7 & 12 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{vmatrix} = -21$$

【例 1-7】 计算 4 阶行列式

$$D=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}$$

解

$$D \xlongequal[1/10r_1]{\substack{r_1+r_2 \\ r_1+r_3 \\ r_1+r_4}} 10\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} \xlongequal{\substack{r_2-2r_1 \\ r_3-3r_1 \\ r_4-4r_1}} 10\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -2 & -1 \\ 0 & -3 & -2 & -1 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{\substack{r_3-r_2 \\ r_4+3r_2}} 10\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & -4 \end{vmatrix} \xlongequal{r_4+r_3} 10\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -4 \end{vmatrix} = 160$$

评注 从上面的例 1-6,例 1-7 两题可以看出,对于数字元素行列式要化成为三角形行列式,首先将元素 a_{11} 变换为较为简单的数字,例如 1 或者 −1,这一般可通过行(列)交换、用

$1/a_{11}$ 乘以第 1 行(列)或者用 $r_i+kr_j(c_i+kc_j)$ 等性质来实现，但要注意保持行列式的值不变，同时要避免把元素变成分数，否则将给后面的计算增加难度. 然后把第 1 行(列)分别乘以适当的数加到第 2，第 3，…，第 n 行(列)上去，这样就把第 1 列(行) a_{11} 以下(右)的元素全化为零；再依次用类似的方法把主对角线元素以下(以上)的元素全部化为零，就将所给行列式就化为上(或下)三角形行列式了.

【例 1-8】 设 α,β,γ 是三次方程 $x^3+px+q=0$ 的根，计算

$$D=\begin{vmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ \gamma & \alpha & \beta \\ \beta & \gamma & \alpha \end{vmatrix}$$

解 因行列式 D 的行和(列和)都等于 $\alpha+\beta+\gamma$. 先把各列加到第 1 列，提出公因式，有

$$D=\begin{vmatrix} \alpha+\beta+\gamma & \beta & \gamma \\ \alpha+\beta+\gamma & \alpha & \beta \\ \alpha+\beta+\gamma & \gamma & \alpha \end{vmatrix}=(\alpha+\beta+\gamma)\begin{vmatrix} 1 & \beta & \gamma \\ 1 & \alpha & \beta \\ 1 & \gamma & \alpha \end{vmatrix}$$

因 α,β,γ 是三次方程 $x^3+px+q=0$ 的根，由一元三次方程的根与系数的关系知，$\alpha+\beta+\gamma=0$. 故 $D=0$.

【例 1-9】 计算 n 阶行列式

$$D_n=\begin{vmatrix} a_1+1 & a_2 & \cdots & a_n \\ a_1 & a_2+1 & \cdots & a_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_n+1 \end{vmatrix}$$

分析 通过观察可知，此行列式每一行的所有元素的和都相等. 因此，将第 2，第 3，…，第 n 列全加到第 1 列，提出公因式，再化简.

解

$$D_n=\begin{vmatrix} a_1+1 & a_2 & \cdots & a_n \\ a_1 & a_2+1 & \cdots & a_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_n+1 \end{vmatrix}\xlongequal[i=2,\cdots,n]{c_1+c_i}\left(1+\sum_{k=1}^{n}a_k\right)\begin{vmatrix} 1 & a_2 & \cdots & a_n \\ 1 & a_2+1 & \cdots & a_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & a_2 & \cdots & a_n+1 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[i=2,\cdots,n]{r_i-r_1}\left(1+\sum_{k=1}^{n}a_k\right)\begin{vmatrix} 1 & a_2 & \cdots & a_n \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{vmatrix}=1+\sum_{k=1}^{n}a_k$$

评注 仔细观察例 1-8，例 1-9 中的行列式，不难发现，这两个行列式的每一行(或者列)的所有元素的和都相等. 对于此类行列式，可将各行(列)加到第 1 行(列)，提出公因式，再利用行列式的性质将行列式化为三角形行列式.

【例 1-10】 计算 $n+1$ 阶行列式

$$D_{n+1}=\begin{vmatrix} c_0 & a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ b_1 & c_1 & 0 & \cdots & 0 \\ b_2 & 0 & c_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_n & 0 & 0 & \cdots & c_n \end{vmatrix},\quad c_1c_2\cdots c_n\neq 0$$

解 由题设知，$c_1,c_2,\cdots,c_n$全不为零，依次给行列式 D_{n+1}的第 2、第 3、…、第 $n+1$ 列分别乘以$-\frac{b_1}{c_1},-\frac{b_2}{c_2},\cdots,-\frac{b_n}{c_n}$加到第 1 列，由行列式的性质可得

$$D_{n+1}=\begin{vmatrix} c_0-\frac{a_1b_1}{c_1}-\frac{a_2b_2}{c_2}-\cdots-\frac{a_nb_n}{c_n} & a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ 0 & c_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & c_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & c_n \end{vmatrix}.$$

所以，
$$D_{n+1}=\left(c_0-\frac{a_1b_1}{c_1}-\frac{a_2b_2}{c_2}-\cdots-\frac{a_nb_n}{c_n}\right)c_1c_2\cdots c_n$$
$$=\left(c_0+\sum_{k=1}^{n}\frac{a_kb_k}{c_k}\right)\prod_{i=1}^{n}c_i$$

评注 这个行列式的特点是除第 1 行，第 1 列和主对角线元素而外，其余元素均为零. 它的所有非零元素组成一个汉字“爪”，所以，它也称为爪形行列式. 由于有许多行列式可化为爪形行列式，因此此类行列式化为三角形的方法应熟练掌握.

【例 1-11】 计算行列式

$$D=\begin{vmatrix} a^2 & (a+1)^2 & (a+2)^2 & (a+3)^2 \\ b^2 & (b+1)^2 & (b+2)^2 & (b+3)^2 \\ c^2 & (c+1)^2 & (c+2)^2 & (c+3)^2 \\ d^2 & (d+1)^2 & (d+2)^2 & (d+3)^2 \end{vmatrix}$$

解 将行列式 D 中的第 1 列的(-1)倍加到第 2、3、4 列，整理可得

$$D=\begin{vmatrix} a^2 & 2a+1 & 4a+4 & 6a+9 \\ b^2 & 2b+1 & 4b+4 & 6b+9 \\ c^2 & 2c+1 & 4c+4 & 6c+9 \\ d^2 & 2d+1 & 4d+4 & 6d+9 \end{vmatrix}\xlongequal[c_3-2c_2]{c_4-3c_2}\begin{vmatrix} a^2 & 2a+1 & 2 & 6 \\ b^2 & 2b+1 & 2 & 6 \\ c^2 & 2c+1 & 2 & 6 \\ d^2 & 2d+1 & 2 & 6 \end{vmatrix}=0$$

1.3.2 降阶法

利用行列式按行(列)展开定理，将高阶行列式化为相对比较低阶的行列式来计算. 一般来说，低阶行列式比高阶行列式更容易计算. 如果在用展开定理之前，先用行列式的性质，对行列式作恒等变形，使行列式某行(列)的大多数元素化为零(最好只剩下一个非零元素)或有公因式，再使用展开定理计算行列式将更为简便.

【例 1-12】 计算行列式

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 3 & 0 & 1 & 5 \\ 1 & -2 & 0 & 3 \\ -2 & -4 & 1 & 6 \end{vmatrix}$$

解 原式$=\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 3 & 0 & 1 & 5 \\ 1 & -2 & 0 & 3 \\ -2 & -4 & 1 & 6 \end{vmatrix}\xlongequal[r_4+r_1]{r_2+r_1}\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 4 & 2 & 0 & 7 \\ 1 & -2 & 0 & 3 \\ -1 & -2 & 0 & 8 \end{vmatrix}\xlongequal{\text{按第 3 列展开}}-\begin{vmatrix} 4 & 2 & 7 \\ 1 & -2 & 3 \\ -1 & -2 & 8 \end{vmatrix}$

$$\xlongequal[r_3+r_1]{r_2+r_1}-\begin{vmatrix}4&2&7\\5&0&10\\3&0&15\end{vmatrix}\xlongequal{\text{按第2列展开}}2\begin{vmatrix}5&10\\3&15\end{vmatrix}=90$$

【例 1-13】 计算行列式

$$D=\begin{vmatrix}1+a&1&1&1\\1&1-a&1&1\\1&1&1+b&1\\1&1&1&1-b\end{vmatrix}$$

解 将该行列式的第 2 行乘以(-1)加到第 1 行，再将第 4 行乘以(-1)加到第 3 行，得

$$D=\begin{vmatrix}a&a&0&0\\1&1-a&1&1\\0&0&b&b\\1&1&1&1-b\end{vmatrix}$$

从第 1 行提出 a 后，将第 1 行的(-1)倍加到第 2 行及第 4 行，再按第 1 列，第 2 列展开得

$$D=a\begin{vmatrix}1&1&0&0\\0&-a&1&1\\0&0&b&b\\0&0&1&1-b\end{vmatrix}=-a^2\begin{vmatrix}b&b\\1&1-b\end{vmatrix}=a^2b^2.$$

【例 1-14】 记行列式$\begin{vmatrix}x-2&x-1&x-2&x-3\\2x-2&2x-1&2x-2&2x-3\\3x-3&3x-2&4x-5&3x-5\\4x&4x-3&5x-7&4x-3\end{vmatrix}$为 $f(x)$，问方程 $f(x)=0$ 的根的个数有多少？

解 将行列式第 1 列乘以(-1)并加到其余各列，得

$$f(x)=\begin{vmatrix}x-2&1&0&-1\\2x-2&1&0&-1\\3x-3&1&x-2&-2\\4x&-3&x-7&-3\end{vmatrix}\xlongequal{c_4+c_2}\begin{vmatrix}x-2&1&0&0\\2x-2&1&0&0\\3x-3&1&x-2&-1\\4x&-3&x-7&-6\end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix}x-2&1\\2x-2&1\end{vmatrix}\begin{vmatrix}x-2&-1\\x-7&-6\end{vmatrix}=(-x)(-5x+5)$$

所以 $f(x)=0$ 有两个根 $x=0,x=1$.

【例 1-15】 计算 n 阶行列式

$$D_n=\begin{vmatrix}1&2&3&\cdots&n-1&n\\1&-1&0&\cdots&0&0\\0&2&-2&\cdots&0&0\\\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots&\vdots\\0&0&0&\cdots&2-n&0\\0&0&0&\cdots&n-1&1-n\end{vmatrix}$$

解 将上面行列式第 $2,3,\cdots,n$ 列分别加到第 1 列，得

$$D_n=\begin{vmatrix} \frac{n(n+1)}{2} & 2 & 3 & \cdots & n-1 & n \\ 0 & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -2 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 2-n & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & n-1 & 1-n \end{vmatrix}$$

按第 1 列展开，得

$$D_n=\frac{n(n+1)}{2}\begin{vmatrix} -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 2 & -2 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 2-n & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & n-1 & 1-n \end{vmatrix}=(-1)^{n-1}\frac{n(n+1)}{2}(n-1)!$$

【例 1-16】 计算 n 阶行列式

$$D_n=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n-1 & n \\ 2 & 3 & 4 & \cdots & n & 1 \\ 3 & 4 & 5 & \cdots & 1 & 2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ n-1 & n & 1 & \cdots & n-3 & n-2 \\ n & 1 & 2 & \cdots & n-2 & n-1 \end{vmatrix}$$

解 将上面的行列式从第 $n-1$ 行开始直至第 1 行，每行乘以 (-1) 加到下一行，可得

$$D_n=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n-1 & n \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1-n \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1-n & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 1 & 1 & 1-n & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & 1-n & 1 & \cdots & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

再将上面的行列式第 $2,3,\cdots,n$ 列都加到第 1 列，按第 1 列展开，得

$$D_n=\begin{vmatrix} \frac{n(n+1)}{2} & 2 & 3 & \cdots & n-1 & n \\ 0 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1-n \\ 0 & 1 & 1 & \cdots & 1-n & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 1 & 1-n & \cdots & 1 & 1 \\ 0 & 1-n & 1 & \cdots & 1 & 1 \end{vmatrix}=\frac{n(n+1)}{2}\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 & 1-n \\ 1 & 1 & \cdots & 1-n & 1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 1 & 1-n & \cdots & 1 & 1 \\ 1-n & 1 & \cdots & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[j=2,\cdots,n-1]{c_1+c_j}\frac{n(n+1)}{2}\begin{vmatrix} -1 & 1 & \cdots & 1 & 1-n \\ -1 & 1 & \cdots & 1-n & 1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ -1 & 1-n & \cdots & 1 & 1 \\ -1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \end{vmatrix}\xlongequal[j=2,\cdots,n-1]{c_j+c_1}\frac{n(n+1)}{2}\begin{vmatrix} -1 & 0 & \cdots & 0 & -n \\ -1 & 0 & \cdots & -n & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ -1 & -n & \cdots & 0 & 0 \\ -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

$$=\frac{n(n+1)}{2}(-1)^{\frac{(n-1)(n-2)}{2}}\cdot(-1)\cdot(-n)^{n-2}=(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}\frac{n^{n-1}(n+1)}{2}$$

【例 1-17】 计算 n 阶行列式

$$D_n=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & \mathrm{C}_2^1 & \mathrm{C}_3^1 & \mathrm{C}_4^1 & \cdots & \mathrm{C}_n^1 \\ 1 & \mathrm{C}_3^2 & \mathrm{C}_4^2 & \mathrm{C}_5^2 & \cdots & \mathrm{C}_{n+1}^2 \\ 1 & \mathrm{C}_4^3 & \mathrm{C}_5^3 & \mathrm{C}_6^3 & \cdots & \mathrm{C}_{n+2}^3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & \mathrm{C}_n^{n-1} & \mathrm{C}_{n+1}^{n-1} & \mathrm{C}_{n+2}^{n-1} & \cdots & \mathrm{C}_{2n-2}^{n-1} \end{vmatrix}$$

解 将上面的行列式从第 $n-1$ 行开始直至第 1 行，每行乘以 (-1) 加到下一行，由于行列式的每个元素均为组合数 C_m^k，由组合数公式 $\mathrm{C}_{m+1}^k=\mathrm{C}_m^k+\mathrm{C}_m^{k-1}$，可得

$$D_n=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & 1 & \mathrm{C}_2^1 & \mathrm{C}_3^1 & \cdots & \mathrm{C}_{n-1}^1 \\ 0 & \mathrm{C}_2^2 & \mathrm{C}_3^2 & \mathrm{C}_4^2 & \cdots & \mathrm{C}_n^2 \\ 0 & \mathrm{C}_3^3 & \mathrm{C}_4^3 & \mathrm{C}_5^3 & \cdots & \mathrm{C}_{n+1}^3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \mathrm{C}_{n-1}^{n-1} & \mathrm{C}_n^{n-1} & \mathrm{C}_{n+1}^{n-1} & \cdots & \mathrm{C}_{2n-3}^{n-1} \end{vmatrix}$$

将该行列式按第一列展开后，再从第 $n-2$ 列开始直至第 1 列，每列乘以 (-1) 加到下一列，由于该行列式的每个元素均为组合数 C_m^k，由组合数公式可得

$$D_n=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & \mathrm{C}_2^1 & \mathrm{C}_3^1 & \mathrm{C}_4^1 & \cdots & \mathrm{C}_{n-1}^1 \\ 1 & \mathrm{C}_3^2 & \mathrm{C}_4^2 & \mathrm{C}_5^2 & \cdots & \mathrm{C}_n^2 \\ 1 & \mathrm{C}_4^3 & \mathrm{C}_5^3 & \mathrm{C}_6^3 & \cdots & \mathrm{C}_{n+1}^3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & \mathrm{C}_{n-1}^{n-2} & \mathrm{C}_n^{n-2} & \mathrm{C}_{n+1}^{n-2} & \cdots & \mathrm{C}_{2n-4}^{n-2} \end{vmatrix}=D_{n-1}$$

由于 $D_n=D_{n-1}$，所以 $D_n=D_{n-1}=\cdots=D_2=D_1=1$.

【例 1-18】 计算 n 阶行列式

$$D_n=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & \cdots & n-1 & n \\ 1 & 1 & 2 & 3 & \cdots & n-2 & n-1 \\ 1 & x & 1 & 2 & \cdots & n-3 & n-2 \\ 1 & x & x & 1 & \cdots & n-4 & n-3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 1 & x & x & x & \cdots & 1 & 2 \\ 1 & x & x & x & \cdots & x & 1 \end{vmatrix}\quad (n\geqslant 2)$$

解 从上面行列式的第 n 行减去第 $n-1$ 行，从第 $n-1$ 行减去第 $n-2$ 行，依次下去，直到从第 2 行减去第 1 行，得到

$$D_n=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & \cdots & n-1 & n \\ 0 & -1 & -1 & -1 & \cdots & -1 & -1 \\ 0 & x-1 & -1 & -1 & \cdots & -1 & -1 \\ 0 & 0 & x-1 & -1 & \cdots & -1 & -1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & x-1 & -1 \end{vmatrix}\quad (n\geqslant 2)$$