普通高等教育“十一五”国家级规划教材辅导用书

线性代数学习指导和习题剖析

陈维新 涂黎晖 魏 麒 王聚丰 编

科学出版社

普通高等教育“十一五”国家级规划教材辅导用书

线性代数学习指导和习题剖析

陈维新　涂黎晖　魏　麒　王聚丰　编

科学出版社

北　京

内 容 简 介

本书是普通高等教育"十一五"国家级规划教材《线性代数简明教程》(第二版)(陈维新,科学出版社)的配套辅导用书. 全书分为 7 章,内容包括:行列式,线性方程组,矩阵,向量,向量空间,矩阵的相似、特征值和特征向量,二次型. 书中不仅有教材的全部习题解答,而且将习题归结为若干题型,以题型为纲,剖析并概括解题的思想方法. 附录中例题选取的是考研真题或模拟题,为立志考研的读者深入学习之用.

本书可作为普通高等院校理工、经管、医药、农林等专业本科生的学习辅导用书,也可作为自学考试、报考硕士研究生的参考用书.

图书在版编目(CIP)数据

线性代数学习指导和习题剖析/陈维新等编. —北京:科学出版社,2011
(普通高等教育"十一五"国家级规划教材辅导用书)
ISBN 978-7-03-031798-8

Ⅰ.①线… Ⅱ.①陈… Ⅲ.①线性代数-高等学校-教学参考资料
Ⅳ.①O151.2

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2011)第 131866 号

责任编辑:姚莉丽 房 阳 / 责任校对:陈玉凤
责任印制:张克忠 / 封面设计:陈 敬

科 学 出 版 社 出版
北京东黄城根北街 16 号
邮政编码: 100717
http://www.sciencep.com

骏 杰 印 刷 厂 印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

*

2011 年 7 月第 一 版 开本:720×1000 1/16
2011 年 7 月第一次印刷 印张:13 1/4
印数:1—4 000 字数:260 000

定价: 24.00 元

(如有印装质量问题,我社负责调换)

安徽理工大学 藏書 图書馆

前　　言

本书是陈维新编著的《线性代数简明教程》(第二版)[1](以下简称为教材)的配套辅导用书,书中不仅章节、概念、术语、记号均与教材相同(参见符号表),而且与教材同步,即完全按教材的顺序逐章逐节展开,在对习题作解析时严格遵循只用教材已讲过的知识和内容的原则. 有些习题在阅读教材后续内容后会有更简便的解法,这些解法均将放在注记中.

本书分两部分:正文是教材的习题全解,附录提高篇是为有志于继续深造的读者准备的考研辅导题. 作为习题全解,教材的每道习题都可以在本书中找到解答,只是解答的详略各有不同而已. 如教材习题 4.2 的习题均可在本书 4.2 节找到,不过顺序作了些调整,改成例题编序,原习题编号放在括号内,如本书例 4.2.5(习题 9)就是教材习题 4.2 的第 9 题. 本书的每一道例题的编号都是独一无二的,这就使得后面引用时明确无疑. 如读者读过正文后尚有余兴,不妨看看附录. 有了正文的基础,就有了提高的可能. 本科教学与考研的要求虽然有高低之分,但并无天壤之别. 两者之间若铺好台阶,顺着台阶一步一步地向上攀登,终能登顶,读者不妨一试.

本书是习题解,但更是线性代数的学习指导用书. 线性代数并不难学,关键要有好的学习方法,本书将致力于阐明学习线性代数的思想方法. 众所周知,做数学题先要找到思路和方法,然后才能具体动手做. 所以学习线性代数要记忆,但光靠记忆是远远不够的. 记忆所得往往是形式上"死"的知识,不会变通,题目稍有变化就束手无策,学线性代数重在理解,对本质的深入理解才是活的知识,以灵活应变才是成功之道. 然而理解需要循序渐进,要有一个由浅入深,由表及里的过程. 为此我们首先把形式上各不相同千姿百态的题目分成若干个题型,对每个题型都详细列出解题策略. 这可认为是初步理解,即把外表形式各异而实质相似的题目归并在一起,以一个思路去求解. 进而我们寻求不同题型间的贯通,如题型 4.2.1、题型 4.2.2,说的是向量间线性关系,但可转化为题型 2.3.1、题型 2.3.2 解线性方程组. 因而从更深层次上说,题型 4.2.1 与题型 2.3.1,题型 4.2.2 与题型 2.3.2 是同一类题的不同表述形式. 同样题型 7.2.2 用正交线性替换化实二次型为标准形与题型 6.4.1 实对称矩阵用正交矩阵化为对角矩阵也是同一类题的不同表述形式. 再进一步我们用题型 4.5.1 贯串前 4 章线索的一组题指出:"秩"是线性代数最重要的一个基本概念,"用初等变换将矩阵化为阶梯形"是线性代数解题中广泛使用的方法. 事实上这种层层推进逐步深入的做法正是我们撰写本书的着力点,循此立意全书在一些典型例题的分析中揭示思路,在注记及小结中跨越章节界限上联下伸贯串前后. 希望通过上述努力来加深读者对线性代数的认识和理解,从而学好线性代数.

编写本书是陈维新主持的线性代数课程建设的一个子项目. 浙江大学宁波理工学院历届院领导都十分关心支持课程建设，希望课程建设为学院培养高层次应用型人才服务. 宁波理工学院教务处、基础部等部门诸多领导对课程建设给予多方面的帮助和支持. 经过多年努力，陈维新主持的宁波理工学院线性代数课程建设有幸列入 2009 年浙江省精品课程建设项目，获得了省项目基金和院配套基金的资助；科学出版社大力支持使得本书得以面世，在此一并表示衷心感谢. 本书编写中得到浙江大学宁波理工学院同行的支持和帮助，龚乐春老师对初稿提出许多宝贵的意见，编者对此深表感谢.

陈维新编著的教材已在浙江大学宁波理工学院使用 10 年，发行量已逾 10 万册. 编写与该教材配套的学习辅导用书一直是我们的心愿，现将长期教学实践的点滴积累写出来，作为引玉之砖求教于大家，如蒙赐教，不胜感谢.

值此浙江大学宁波理工学院建院 10 周年之际，谨呈此书，以志祝贺.

编　者

2011 年 5 月

浙江大学求是村

浙江大学宁波理工学院

试读结束，需要全本PDF请购买 www.ertongbook.com

符　号　表

(按教材中出现顺序排列,页码指教材的页码)

符　号	意　义	页　码
P	数域	1
$\mathbf{Q}$	有理数域	1
$\mathbf{R}$	实数域	1
$\mathbf{C}$	复数域	1
$\mathbf{Z}$	全体整数	1
$i_1 i_2 \cdots i_n$	n 阶排列	1
$\tau(i_1 i_2 \cdots i_n)$	排列 $i_1 i_2 \cdots i_n$ 的逆序数	2
$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \lvert a_{ij} \rvert_n$	n 阶行列式	8
$\sum\limits_{j_1 j_2 \cdots j_n}$	对所有 n 阶排列 $j_1 j_2 \cdots j_n$ 求和	8
D^{T}	行列式 D 的转置行列式	12
$R_i \pm kR_j$	行列式(矩阵)第 i 行加上(减去)第 j 行 k 倍	16(39)
$C_i \pm kC_j$	行列式(矩阵)第 i 列加上(减去)第 j 列 k 倍	16(39)
$\sum$	连加号	18(199)
M_{ij}	行列式元素 a_{ij} 的余子式	20
A_{ij}	行列式元素 a_{ij} 的代数余子式	20
$D(a_1, a_2, \cdots, a_n)$	n 阶范德蒙德行列式	23
$\prod$	连乘号	24(201)
$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} = [a_{ij}]_{m \times n}$	$m \times n$ 矩阵	39(64)
$\bar{\mathbf{A}}$	($\mathbf{A}$ 的)增广矩阵	39
$R_{ij}(C_{ij})$	矩阵第 i 行(列),第 j 行(列)互换	39
$kR_i(kC_i)$	矩阵第 i 行(列)乘 k	39
秩($\mathbf{A}$)	矩阵 $\mathbf{A}$ 的秩	44
$A \Rightarrow B$	A 成立可推出 B 成立	49
$A \Leftrightarrow B$	A 成立的充要条件为 B 成立	49

续表

符　号	意　义	页　码
$\|\boldsymbol{A}\|$	方阵 $\boldsymbol{A}$ 的行列式	64
$\boldsymbol{O}(\boldsymbol{O}_{m\times n})$	零矩阵	65
$-\boldsymbol{A}$	矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的负矩阵	65
$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{E}_n)$	单位矩阵(n 阶单位矩阵)	70
$\lambda\boldsymbol{E}(\lambda\boldsymbol{E}_n)$	数量矩阵(n 阶数量矩阵)	70
$\mathrm{diag}[\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n]$	对角矩阵	70
$\boldsymbol{A}^k$	方阵 $\boldsymbol{A}$ 的 k 次方幂	70
$f(\boldsymbol{A})$	矩阵多项式	71
$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{A}')$	$\boldsymbol{A}$ 的转置矩阵	73
$\boldsymbol{E}_{ij}$	矩阵单位	76
$\mathrm{tr}\boldsymbol{A}$	$\boldsymbol{A}$ 的迹	76(159)
$\boldsymbol{A}^{-1}$	$\boldsymbol{A}$ 的逆矩阵	78
$\boldsymbol{A}^*$	$\boldsymbol{A}$ 的伴随矩阵	78
$\begin{bmatrix}\boldsymbol{A}_{11} & \boldsymbol{A}_{12} & \cdots & \boldsymbol{A}_{1q}\\ \boldsymbol{A}_{21} & \boldsymbol{A}_{22} & \cdots & \boldsymbol{A}_{2q}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ \boldsymbol{A}_{p1} & \boldsymbol{A}_{p2} & \cdots & \boldsymbol{A}_{pq}\end{bmatrix}$	分块矩阵	86
$\boldsymbol{E}(i,j)$	初等矩阵(互换)	92
$\boldsymbol{E}(i(k))$	初等矩阵(倍乘)	92
$\boldsymbol{E}(i+j(k),j)$	初等矩阵(倍加)	92
$\boldsymbol{O}=[0,0,\cdots,0]^{\mathrm{T}}$	零向量	107
$-\boldsymbol{\alpha}$	$\boldsymbol{\alpha}$ 的负向量	107
P^n	n 元向量空间	134
$\mathbf{R}^n$	实向量空间	134
$\mathrm{dim}V$	向量空间 V 的维数	135
$(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})$	$\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}$ 的内积	143
$\\|\boldsymbol{\alpha}\\|$	实向量 $\boldsymbol{\alpha}$ 的长度	143
$\boldsymbol{\alpha}\perp\boldsymbol{\beta}$	$\boldsymbol{\alpha}$ 与 $\boldsymbol{\beta}$ 正交	144
W_{λ_0}	属于 λ_0 的特征子空间	152
$f(\lambda)=\|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}\|$	$\boldsymbol{A}$ 的特征多项式	152
Δ_k	k 阶顺序主子式	188

目　　录

第 1 章　行　列　式

要求　**了解**行列式的概念，**理解**行列式的性质(包括行列式按行或按列展开定理)，**熟练掌握**行列式的计算，**会用**克拉默法则解线性方程组.

注记　要求分成三档，用不同的限定词表示. 对于概念与理论部分，从高到低，分别用**理解**、**了解**、**知道**区别；对于运算和方法部分，从高到低分别用**熟练掌握**、**掌握**、**会(用)**或**能(用)**区别.

1.1　数域与排列

本节是预备知识. 数域全书各章概念都要涉及；而排列是为行列式这个概念服务的.

关于数域只要求**知道**：

(1) **定义**. 数域 P 是对四则运算封闭且至少有两个不同复数的数集. 具体地说，全体有理数 $\mathbf{Q}$、全体实数 $\mathbf{R}$、全体复数 $\mathbf{C}$ 均为数域.

(2) **作用**. 线性代数中问题求解所涉及的计算均为数的四则运算，故若问题已知的是数域 P 中的数，则其结果必为 P 中的数. 例如，有理系数的线性方程组若有解，则其解必是有理数.

(3) 全体整数 $\mathbf{Z}$ 不是数域，因 $\mathbf{Z}$ 对除法不封闭，所以对一组整数进行四则运算，所得结果为有理数(习题 1).

对排列仅要求掌握排列的罗列和排列的奇偶性.

题型 1.1.1　排列的罗列

解题策略　由排列的定义知，排列是有序数组，故同为 n 个数码如次序不同就是不同排列，从而 n 阶排列共有 $n!$ 个. 罗列 n 阶排列要遵循的原则是**不漏**、**不重**. 为此可采取按数码大小顺序依次写出，即先写首位为 1 的，再写首位为 2 的，…，最后写首位为 n 的.

例 1.1.1(习题 2)　写出 4 个数码 1,2,3,4 的所有 4 阶排列.

解　共有 $4!=24$ 个，依次为

1234，　1243，　1324，　1342，　1423，　1432，

2134，　2143，　2314，　2341，　2413，　2431，
3124，　3142，　3214，　3241，　3412，　3421，
4123，　4132，　4213，　4231，　4312，　4321.

例 1.1.2(习题 6)　写出全体形如 5＊＊2＊及 2＊5＊3 的 5 阶排列，总结一下，有 k 个位置数码给定的 $n(n>k)$ 阶排列有多少个？

分析　本题不要求写出所有的 5 阶排列，而是要求写出形如 5＊＊2＊的 5 阶排列，这可视为除去 5，2 的 3 个数码 1，3，4 排入 3 个＊的一切可能的 3 阶排列，故有 3！个，据此本题可转化为上题方法解. 同理可推出其余两问.

解　形如 5＊＊2＊的 5 阶排列有 $(5-2)!=6$ 个依次为

51324，　51423，　53124，　53421，　54123，　54321.

形如 2＊5＊3 的 5 阶排列有 $(5-3)!=2$ 个，依次为：21543，24513.

同理，有 k 个位置数码给定的 $n(n>k)$ 阶排列可视为：有 $n-k$ 个数码排入 $n-k$ 个位置的一切可能的 $n-k$ 阶排列，所以有 $(n-k)!$ 个.

题型 1.1.2　排列的奇偶性

解题策略　先计算出 n 阶排列 $i_1i_2\cdots i_n$ 的逆序数

$$\begin{aligned}\tau(i_1i_2\cdots i_n)=&\tau_1(i_1\text{ 后面比 }i_1\text{ 小的数的个数})\\&+\tau_2(i_2\text{ 后面比 }i_2\text{ 小的数的个数})\\&+\cdots\\&+\tau_{n-1}(i_{n-1}\text{ 后面比 }i_{n-1}\text{ 小的数的个数}).\end{aligned}$$

再由 $\tau(i_1i_2\cdots i_n)$ 的奇偶性，确定 $i_1i_2\cdots i_n$ 的奇偶性.

例 1.1.3(习题 4)　计算以下各排列的逆序数，并指出它们的奇偶性：

(1) 314265；　(2) 314265789；　(3) 542391786；

(4) 987654321；　(5) 246813579；　(6) $n(n-1)\cdots21$.

解　(1) $\tau(314265)=\tau_1+\tau_2+\tau_3+\tau_4+\tau_5=2+0+1+0+1=4$，故 314265 为偶排列.

类似可得

(2) 逆序数为 4，偶排列.　(3) 逆序数为 15，奇排列.

(4) 逆序数为 36，偶排列.　(5) 逆序数为 10，偶排列.

(6) $\tau(n(n-1)\cdots21)=(n-1)+(n-2)+\cdots+2+1=\dfrac{n(n-1)}{2}$，当 $n=4k$ 时，$\dfrac{n(n-1)}{2}=2k(4k-1)$ 为偶数，故为偶排列；当 $n=4k+1$ 时，$\dfrac{n(n-1)}{2}=2k(4k+1)$ 为

试读结束，需要全本PDF请购买 www.ertongbook.com

偶数,故为偶排列;当 $n=4k+2$ 时,$\frac{n(n-1)}{2}=(2k+1)(4k+1)$ 为奇数,故为奇排列;当 $n=4k+3$ 时,$\frac{n(n-1)}{2}=(4k+3)(2k+1)$ 为奇数,故为奇排列.

按本例方法习题 3 容易解出.

(习题 3) 分别计算下列 4 个 4 阶排列的逆序数,然后指出奇排列是(A).

(A) 4312; (B) 4132; (C) 1342; (D) 2314.

例 1.1.4(习题 5) 在由 1,2,3,4,5,6,7,8,9 组成的下述 9 阶排列中,选择 i 与 j 使得

(1) $2147i95j8$ 为偶排列; (2) $1i25j4896$ 为奇排列;

(3) $412i5769j$ 为偶排列; (4) $i3142j786$ 为奇排列.

分析 题中已明确指出 $2147i95j8$ 是由 1,2,3,4,5,6,7,8,9 组成的 9 阶排列,所以 i 与 j 只能在 3,6 中选取.故可分别计算这两个排列的逆序数来确定奇偶性.

解 当 $i=3,j=6$ 时 $\tau(214739568)=1+0+1+3+0+3+0+0=8$,故为偶排列.当 $i=6,j=3$ 时 $\tau(214769538)=1+0+1+3+2+3+1+0=11$,故为奇排列.从而选取 $i=3,j=6$.

注记 注意到这两种 i,j 的选择可经过 1 次对换互相得到,而排列经过 1 次对换改变奇偶性,因而当计算得知排列 214739568 为偶排列,就可直接断定 214769538 为奇排列,即可得出正确选取.

类似可得:(2) $i=7,j=3$; (3) $i=8,j=3$; (4) $i=9,j=5$.

1.2 行列式的定义

本节从利用消元法寻求 n 个方程 n 个变量的线性方程组的公式解着手,引导出 n 阶行列式 $|a_{ij}|_n$ 的定义:$|a_{ij}|_n=\sum\limits_{j_1j_2\cdots j_n}(-1)^{\tau(j_1j_2\cdots j_n)}a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}$,其含义可理解为

(1) 通项 $a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}$ 是表示行列式 $|a_{ij}|_n$ 中不同行不同列的 n 个元素的乘积,其中 $j_1j_2\cdots j_n$ 是一个 n 阶排列.

(2) $(-1)^{\tau(j_1j_2\cdots j_n)}$ 是确定通项的符号,当 $j_1j_2\cdots j_n$ 是偶排列时取正号,当 $j_1j_2\cdots j_n$ 是奇排列时取负号.

(3) $\sum\limits_{j_1j_2\cdots j_n}$ 是表示对 $n!$ 项(所有的 n 阶排列 $j_1j_2\cdots j_n$)求和.

这表明 $|a_{ij}|_n$ 是从 a_{ij} $(i,j=1,2,\cdots,n)$ 按一定规则取 n 个元素相乘作为一项,再将不同的项经加减得到的.故当 a_{ij} 均为数时,$|a_{ij}|_n$ 为一个数.特别地当 a_{ij} 均为整数时,$|a_{ij}|_n$ 为整数(习题 9).而当 a_{ij} 中含有参变量 x 时,$|a_{ij}|_n$ 为 x 的一个多项式,比如第 6 章矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征多项式 $f(\lambda)=|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|$ 就是 λ 的一个多项式.

题型 1.2.1　确定行列式 $|a_{ij}|_n$ 中某一项的符号

解题策略　有 3 种解决方法:

方法 1　该项的行指标取标准排列时，由其列指标组成的排列的奇偶性确定：奇排列取负号，偶排列取正号.

方法 2　该项的列指标取标准排列时，由其行指标组成的排列的奇偶性确定：奇排列取负号，偶排列取正号.

方法 3　由该项行指标所组成的排列逆序数与该项列指标组成排列的逆序数之和的奇偶性确定：和为奇数取负号，和为偶数取正号.

例 1.2.1(习题 2)　在 6 阶行列式 $|a_{ij}|$ 中，下列各项应取什么符号？为什么？

(1) $a_{23}a_{31}a_{42}a_{56}a_{14}a_{65}$；　(2) $a_{32}a_{43}a_{54}a_{11}a_{66}a_{25}$；

(3) $a_{21}a_{53}a_{16}a_{42}a_{65}a_{34}$；　(4) $a_{51}a_{13}a_{32}a_{44}a_{26}a_{65}$.

解　(1) **方法 1**　因 $a_{23}a_{31}a_{42}a_{56}a_{14}a_{65}=a_{14}a_{23}a_{31}a_{42}a_{56}a_{65}$，得其列指标组成的排列为 431265，由 $\tau(431265)=6$ 知，该项取正号.

方法 2　因 $a_{23}a_{31}a_{42}a_{56}a_{14}a_{65}=a_{31}a_{42}a_{23}a_{14}a_{65}a_{56}$，得其行指标组成的排列为 342165. 由 $\tau(342165)=6$ 知，该项取正号.

方法 3　该项行指标组成排列为 234516，列指标组成排列为 312645. 由 $\tau(234516)+\tau(312645)=4+4=8$ 知，该项取正号.

类似地可解得

(2) 取负号；(3) 取负号；(4) 取正号.

例 1.2.2(习题 3)　当 $i=$________，$k=$________时 $a_{1i}a_{32}a_{4k}a_{25}a_{53}$ 成为 5 阶行列式 $|a_{ij}|$ 中一个取负号的项，为什么？

分析　本例是例 1.1.4 与例 1.2.1 两者的综合题.

解　因 $a_{1i}a_{32}a_{4k}a_{25}a_{53}=a_{1i}a_{25}a_{32}a_{4k}a_{53}$，据例 1.1.4 知，排列 $i52k3$ 中的 i,k 只能在 1,4 中选取. 若取 $i=1,k=4$ 时，由 $\tau(15243)=4$ 知，$a_{11}a_{32}a_{44}a_{25}a_{53}$ 取正号. 据例 1.1.4 的注记知，取 $i=4,k=1$ 时，$a_{11}a_{32}a_{41}a_{25}a_{53}$ 取负号，所以本题应填 $i=4,k=1$.

类似可解得

(习题 4)　若 $(-1)^{\tau(4k1i5)+\tau(12345)}a_{41}a_{k2}a_{13}a_{i4}a_{55}$ 是 5 阶行列式 $|a_{ij}|$ 中的一项，则当 $k=$__2__，$i=$__3__时该项符号为正；当 $k=$__3__，$i=$__2__时该项符号为负.

例 1.2.3(习题 5)　写出 4 阶行列式 $|a_{ij}|$ 中包含因子 $a_{42}a_{23}$ 的项，并指出正负号.

分析　本例是例 1.1.2 与例 1.2.1 两者的综合题.

解　据例 1.1.2 知所求项一般形式为：$a_{1i}a_{23}a_{3k}a_{42}$，其中 i,k 只能在 1,4 中选取. 当取 $i=1,k=4$ 时，由 $\tau(1352)=2$ 知，$a_{11}a_{23}a_{34}a_{42}$ 取正号，从而也可断定另一项 $a_{14}a_{23}a_{31}a_{42}$ 取负号(参见例 1.1.4 的注记).

类似可解得

（习题 6） 写出 4 阶行列式$|a_{ij}|$中所有取负号且包含 a_{23}的项.

解 $a_{11}a_{23}a_{32}a_{44}$； $a_{14}a_{23}a_{31}a_{42}$； $a_{12}a_{23}a_{34}a_{41}$.

题型 1.2.2 按行列式定义计算行列式$|a_{ij}|_n$

解题策略 （1）当 $n=2$,或 $n=3$ 时可用对角线法则计算.

（2）当 $n\geqslant4$ 时按定义计算$|a_{ij}|_n$要计算$n!$项的代数和,一般摒弃掉为零的项,计算非零项的代数和.

例 1.2.4（习题 1） 按行列式定义,计算下列行列式:

（1）$\begin{vmatrix} a & b \\ a^2 & b^2 \end{vmatrix}$； （2）$\begin{vmatrix} 1 & \log_b a \\ \log_a b & 1 \end{vmatrix}$； （3）$\begin{vmatrix} \tan\theta & \sin\theta \\ 1 & \cos\theta \end{vmatrix}$；

（4）$\begin{vmatrix} 0 & a & 0 \\ b & 0 & c \\ 0 & d & 0 \end{vmatrix}$； （5）$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$； （6）$\begin{vmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & c \\ 0 & d & e \end{vmatrix}$.

解 可用对角线法则,直接计算得

（1）ab^2-a^2b； （2）$1-\log_b a\log_a b=0$； （3）$\tan\theta\cos\theta-\sin\theta=0$； （4）0；

（5）$1+1-1+1+1+1=4$； （6）$abe-acd$.

类似可解得(习题 7 之(1))$\begin{vmatrix} -1 & 0 & 1 \\ a & -2 & 0 \\ 0 & b & -3 \end{vmatrix}=-6+ab$.

例 1.2.5（习题 7） 按行列式定义计算下列行列式:

（2）$D_4=\begin{vmatrix} a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b & 0 \\ 0 & c & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & d \end{vmatrix}$； （3）$D_5=\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 & b_5 \\ c_1 & c_2 & 0 & 0 & 0 \\ d_1 & d_2 & 0 & 0 & 0 \\ e_1 & e_2 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$；

（4）$D_n=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1,n-1} & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2,n-1} & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n-1,1} & a_{n-1,2} & \cdots & 0 & 0 \\ a_{n1} & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{vmatrix}$.

解 （3）按定义 $D_5=\sum\limits_{j_1j_2j_3j_4j_5}(-1)^{\tau(j_1j_2j_3j_4j_5)}a_{1j_1}a_{2j_2}a_{3j_3}a_{4j_4}a_{5j_5}$.

方法 1 D_5 为 $5!$ 项的和,而值为零的项在求和时可不计. 为此考察通项

$a_{1j_1}a_{2j_2}a_{3j_3}a_{4j_4}a_{5j_5}$，注意到 D_5 的第 5 行 $a_{53}=a_{54}=a_{55}=0$，所以只有 $j_5=1$，或 $j_5=2$ 才可能 $a_{5j_5}\neq0$. 当取 $j_5=1$ 时，类似推理 j_4 只能取 $j_4=2$ 才可能 $a_{4j_4}\neq0$. 这样一来 j_3 只能取 3,4,5 中某一个，但 $a_{33}=a_{34}=a_{35}=0$. 这表明展开项中每一项至少有一个因子为零. 而当取 $j_5=2$ 时，也可推得同样结论，所以 $D_5=0$.

方法 2　D_5 的通项不考虑符号为 $a_{1j_1}a_{2j_2}a_{3j_3}a_{4j_4}a_{5j_5}$，这表明 D_5 中每一项中最后 3 个因子 $a_{3j_3}a_{4j_4}a_{5j_5}$ 分别取值于 D_5 最后 3 行不同列的 3 个数，而 D_5 最后 3 行均只有 2 个数可能不为零，所以这 3 个因子 a_{3j_3}，a_{4j_4}，a_{5j_5} 至少有一个取零 . 从而 D_5 的每一项都含有因子零，故 D_5 展开式的每一项都为零，即得 $D_5=0$.

类似可解得　(2) $D_4=-abcd$；　(4) $D_n=(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}a_{1n}a_{2,n-1}\cdots a_{n-1,2}a_{n1}$.

利用本例(4)的结论可求出

$$\text{(习题 10)}\quad D_n=\begin{vmatrix}0&0&\cdots&0&-1\\0&0&\cdots&-1&0\\\vdots&\vdots&&\vdots&\vdots\\0&-1&\cdots&0&0\\-1&0&\cdots&0&0\end{vmatrix}=(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}\underbrace{(-1)(-1)\cdots(-1)}_{n}.$$

$$=(-1)^{\frac{n(n+1)}{2}}.$$

例 1.2.6* (习题 8*)　问 $D_4=\begin{vmatrix}a_{11}&0&0&a_{14}\\0&a_{22}&a_{23}&0\\0&a_{32}&a_{33}&0\\a_{41}&0&0&a_{44}\end{vmatrix}=a_{11}a_{22}a_{33}a_{44}-a_{14}a_{23}a_{32}a_{41}$

为什么错？正确答案是什么？

解　D_4 为 4 阶行列式，故不能用对角线法则(只有 8 项代数和)计算，所以说 $D_4=a_{11}a_{22}a_{33}a_{44}-a_{14}a_{23}a_{32}a_{41}$ 是错的. D_4 按定义应是 4！=24 项代数和. 这 24 项中除去为零的项，以及 $a_{11}a_{22}a_{33}a_{44}$，$a_{14}a_{23}a_{32}a_{41}$ 外，还应有：$a_{11}a_{23}a_{32}a_{44}$，$a_{14}a_{22}a_{33}a_{41}$. 所以

$$D_4=a_{11}a_{22}a_{33}a_{44}+a_{14}a_{23}a_{32}a_{41}-a_{11}a_{23}a_{32}a_{44}-a_{14}a_{22}a_{33}a_{41}.$$

注记　当 $n\geqslant4$ 时用行列式定义计算 n 阶行列式一般说来计算量大，很少采用，通常都要利用行列式性质计算，本例也如此. 在讲过 1.4 节后，本例有两种较简便的解法：

方法 1　将 D_4 按第 1 列展开得

$$D_4=a_{11}\begin{vmatrix}a_{22}&a_{23}&0\\a_{32}&a_{33}&0\\0&0&a_{44}\end{vmatrix}+(-1)^{4+1}a_{41}\begin{vmatrix}0&0&a_{14}\\a_{22}&a_{23}&0\\a_{32}&a_{33}&0\end{vmatrix}\text{(再均按第 3 列展开)}$$

$$=a_{11}a_{44}\begin{vmatrix}a_{22}&a_{23}\\a_{32}&a_{33}\end{vmatrix}-a_{41}a_{14}\begin{vmatrix}a_{22}&a_{23}\\a_{32}&a_{33}\end{vmatrix}$$

$$=a_{11}a_{44}(a_{22}a_{33}-a_{23}a_{32})-a_{14}a_{41}(a_{22}a_{33}-a_{23}a_{32})$$

$$=a_{11}a_{22}a_{33}a_{44}+a_{14}a_{23}a_{32}a_{41}-a_{11}a_{23}a_{32}a_{44}-a_{14}a_{22}a_{33}a_{41}.$$

方法 2 先将 D_4 的第 2 行与第 4 行互换，再将第 2 列与第 4 列互换得

$$D_4=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{14} & 0 & 0 \\ a_{41} & a_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_{22} & a_{23} \\ 0 & 0 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \xlongequal[\text{行列式}]{\text{分块}} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{14} \\ a_{41} & a_{44} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$=(a_{11}a_{44}-a_{14}a_{41})(a_{22}a_{33}-a_{23}a_{32})$$

$$=a_{11}a_{22}a_{33}a_{44}+a_{14}a_{23}a_{32}a_{41}-a_{11}a_{23}a_{32}a_{44}-a_{14}a_{22}a_{33}a_{41}.$$

同样道理，讲过下面两节后例 1.2.5 的第(2)题将 D_4 的第 2 列与第 3 列互换即化为上三角行列式；而第(3)题 D_5 是一个分块行列式可直接用公式算出，计算就很简便.

将上述情况概括起来可以说除 2 阶行列式外，一般行列式计算都不采用定义法，而是用行列式性质使之计算简捷，所以下面两节的行列式计算更为重要，是需**熟练掌握**的.

虽说一般行列式计算不采用定义法，但用定义法可得出四类行列式的计算公式：

上(下)三角形行列式有

$$\begin{vmatrix} a_{11} & & & * \\ & a_{22} & & \\ & & \ddots & \\ O & & & a_{nn} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}=\begin{vmatrix} a_{11} & & & O \\ & a_{22} & & \\ & & \ddots & \\ * & & & a_{nn} \end{vmatrix};$$

副对角线一侧全为零行列式有

$$\begin{vmatrix} * & & & a_{1n} \\ & & a_{2,n-1} & \\ & \iddots & & \\ a_{n1} & & & O \end{vmatrix}=(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}a_{1n}a_{2,n-1}\cdots a_{n1}$$

$$=\begin{vmatrix} O & & & a_{1n} \\ & & a_{2,n-1} & \\ & \iddots & & \\ a_{n1} & & & * \end{vmatrix}.$$

这四类行列式的计算公式，特别是上(下)三角形是行列式计算的基石，在下面的行列式计算中将发挥重要作用，一定要**熟记**，这一点是要特别强调的.

1.3 行列式的性质

本节和下一节是本章的重点，须**熟练掌握**. 本节所论述的行列式的 6 条性质和 3

条推论不仅有理论意义，而且利用这些性质和推论可简化行列式计算，所以牢记这些性质和推论是**必须的**. 但仅仅牢记是**远远不够的**，更重要的是**能熟练地用这些性质和推论正确简捷地计算行列式**. 为此要对不同类型的行列式，分析其不同的特点，采用恰当的解决方法. 这就需要多做，多练，而且在做前要先分析，找出思路，再动手做. 需要说明的是同一个行列式可以有多种不同的解法，本书不可能一一枚举，文中所列出的解法未必是最简的，读者有充分发挥的空间.

题型 1.3.1　可用行列式性质和推论解的行列式

解题策略　一看二想三做，"一看"是指首先要仔细地阅题，对题目作一番观察，找出其特点；"二想"是指针对题目的特点，找到思路；最后才动手做. 这也表明对一道题目从不同角度去思考会有不同的解法.

例 1.3.1(习题 4)　证明：

$$D=\begin{vmatrix} a^2 & (a+1)^2 & (a+2)^2 & (a+3)^2 \\ b^2 & (b+1)^2 & (b+2)^2 & (b+3)^2 \\ c^2 & (c+1)^2 & (c+2)^2 & (c+3)^2 \\ d^2 & (d+1)^2 & (d+2)^2 & (d+3)^2 \end{vmatrix}=0.$$

分析　观察到 $D=|a_{ij}|_4$ 中的元素 a_{ij} 都是平方形式，故可考虑利用公式 $x^2-y^2=(x+y)(x-y)$，注意到当 $x=y+1$ 时有 $x^2-y^2=x+y$，而 D 中相邻列的对应元素恰好有此性质，故采用相邻列相减来解.

解　$D\xlongequal[C_2-C_1]{\substack{C_4-C_3\\ C_3-C_2}}\begin{vmatrix} a^2 & 2a+1 & 2a+3 & 2a+5 \\ b^2 & 2b+1 & 2b+3 & 2b+5 \\ c^2 & 2c+1 & 2c+3 & 2c+5 \\ d^2 & 2d+1 & 2d+3 & 2d+5 \end{vmatrix}\xlongequal[C_3-C_2]{C_4-C_3}\begin{vmatrix} a^2 & 2a+1 & 2 & 2 \\ b^2 & 2b+1 & 2 & 2 \\ c^2 & 2c+1 & 2 & 2 \\ d^2 & 2d+1 & 2 & 2 \end{vmatrix}=0.$

类似可得(习题 2 之(1)) $\begin{vmatrix} 1998 & 1999 & 2000 \\ 2001 & 2002 & 2003 \\ 2004 & 2005 & 2006 \end{vmatrix}=0.$

例 1.3.2(习题 2 之(3))　计算 $D=\begin{vmatrix} x_1y_1 & x_1y_2 & x_1y_3 \\ x_2y_1 & x_2y_2 & x_2y_3 \\ x_3y_1 & x_3y_2 & x_3y_3 \end{vmatrix}.$

分析　注意到 D 的第 1，第 2，第 3 列分别有公因子 y_1,y_2,y_3，先提公因子解之(也可先提各行的公因子求解).

解　$D=y_1y_2y_3\begin{vmatrix} x_1 & x_1 & x_1 \\ x_2 & x_2 & x_2 \\ x_3 & x_3 & x_3 \end{vmatrix}\xlongequal[\text{相同}]{\text{各列}}0.$

试读结束，需要全本PDF请购买 www.ertongbook.com