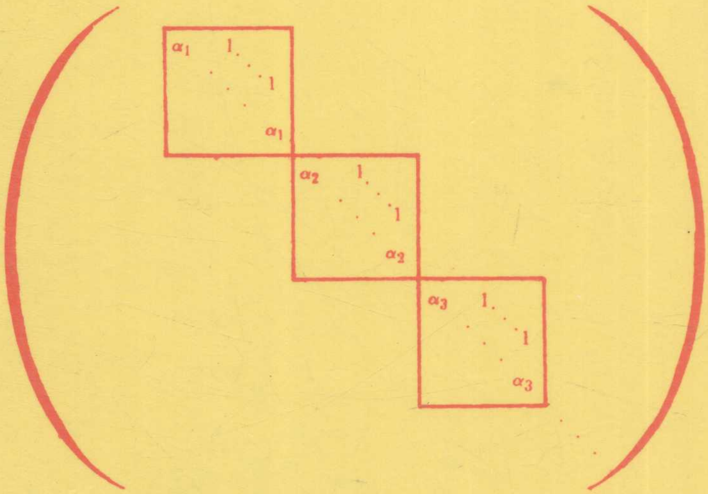
線性代數

（第二版）

原著者　Serge Lang
譯者　林子建



曉園出版社

線性代數

（第二版）

原著者 Serge Lang
譯者 林子建

曉園出版社

再版 1990年11月第五次印刷發行

線 性 代 數

定價：新臺幣　　元　港幣　　元

原著者：Serge Lang
譯著者：林子建
發行人：黃旭政
發行所：曉園出版社有限公司
臺北市青田街7巷5號
電話：(02) 394-9931 (六線)
郵撥：1075734-4號
FAX：3417931
門市部：臺北市新生南路三段96號之三
電話：(02) 3637012・3627375
FAX：3637012
香港所：九龍又一村達之路30號地下後座
電話：3-805807 3-805705
印刷所：復大印刷廠
臺北市武成街36巷16弄15號

出版登記：局版臺業字第 1244 號
著作執照：臺內著字第　　號

ISBN 957-12-0268-1

序　　言

本書的目的在作為大學線性代數課程的教科書。書中的教材足供一年課程使用，但是經過適當的刪減，也可以作為一個學期的教材。

在過去十年中，大學代數課程的重點逐漸趨向線性代數的討論。這個轉變部分的原因在於線性代數較代數其他部分易於了解，（抽象的部分較少，而且多半可以由空間幾何推導出），另外是因為線性代數在其他領域中有廣泛的應用。作者在本書的開始先介紹實數歐幾里得空間中向量的基本概念，來確立以後討論的一般模型。書中所以專章討論群和環主要是因為它們與線性代數有相當重要的關聯，可逆線性映射（或矩）所成的群與向量空間上線性映射所成的環就是最明顯的例子。一個佈於體的向量空間可視為佈於其自同態映射所成環的一個模，這一個事實在線性代數課程應該值得重視。然而，因為本書的主要目的不在此，所以這些章的完整性並未達到應有的程度。但是，這些有關基本代數結構（群，環，體，集合等等）的簡短討論，也可以作為獨立的一學期課程來講授，尤其是對那些以數學為主修課程的學生。

張量乘積和交錯乘積雖然在微積分中非常重要，但是在本書中用途有限，所以我們將其濃縮簡化。

在第一章中將有關定義在緊緻集合與封閉集合上的連續函數的一些事實視為當然成立。我們在凸集合的附錄中再深入討論。因此在閱讀第一章以及了解線性映射的定義之後，也可以緊接著閱讀此附錄。在第二個附錄中包括一些零碎的討論（包括複數代數封閉性的證明），這些討論可視講授者的需要，作適當的安排。

本書的主要部分在於向量空間、矩　、線性映射以及行列式，這些課程現在加入了一些簡單的敘述與內容（例如：只討論佈於實數的向量

空間，只考慮正定純量積，省略了對偶空間，………，等）而分開獨自成一本書“ Introduction to linear algebra ”。那些省略的部分，都是在初學時較不值得重視的部分。然而，對一本較完整的線性代數教科書而言，這些課程當然要包含在內，特別是關於結構定理方面，例如：分譜定理，三角化定理（包括約旦正規型式），質因式分解，舒而引理，Wedderburn-Rieffel 定理（含有Rieffel漂亮簡潔的證明），……等，這些我們將在第二篇中討論。當然，程度較好的學生可以同時參考更完整的書，但是作者希望這樣的安排，對其他的學生更有助益。

在第二版中，作者修改了部分章節，同時增加了一些新的題材與習題。

1970 年于紐約

Serge Lang

目　錄

第一篇　基本定理

第一章　向　量

1. N維空間中點的定義 3 /2. 向量位置 8 /3. 純量積 11 /4. 向量的模 15 /5. 直線與平面 28 /6. 叉積 38 /7. 複數 40

第二章　向量空間

1. 定義 47 /2. 基底 55 /3. 向量空間的維數 62 /4. 和與直和 67

第三章　矩　陣

1. 矩陣向量空間 71 /2. 線性方程組 78 /3. 矩陣的乘積 84 / 附錄：消去法 98

第四章　線性映射

1. 映射 103 /2. 線性映射 112 /3. 線性映射的核與像 121 /4. 線性映射的合成與逆映射 128 /5. 幾何應用 135

第五章　線性映射與矩陣

1. 伴隨矩陣的線性映射 145 /2. 線性映射的相伴矩陣 147 /3. 基底、矩陣與線性映射 152

第六章　純量積與正交

1. 純量積 163 /2. 正交基底 171 /3. 線性方程組的應用 183 /4.

雙線性映射與矩陣 189 /5. 一般正交基底 195 /6. 對偶空間 198

第七章 行列式

1. 二階行列式 207 /2. 行列式的存在性 210 /3. 行列式的其他性質 217 /4. Cramer 氏法則 226 /5. 排列 231 /6. 唯一性 238 7. 轉置矩陣的行列式 243 /8. 矩陣乘積的行列式 244 /9. 矩陣的反元素 245 /10. 矩陣的秩與子行列式 249 /11. 行列式與面積、體積 252

第二篇 結構定理

第八章 双線性形式與標準運算子

1. 雙線性形式 267 /2. 二次形式 274 /3. 對稱運算子 277 /4. 厄米特運算子 283 /5. 單式運算子 289 /6. 西偉士特定理 293

第九章 多項式與矩陣

1. 多項式 299 /2. 矩陣多項式與線性映射 302 /3. 特徵向量與特徵值 306 /4. 特徵多項式 314

第十章 矩陣與線性映射的三角化

1. 三角化的存在性 321 /2. 漢米爾頓-凱雷定理 325 /3. 單式映射的對角化 327

第十一章 分譜定理

1. 對稱線性映射的特徵向量 331 /2. 分譜定理 335 /3. 複數的情形 342 /4. 單式運算子 344

第十二章 多項式與質因式分解

1. 歐幾里得輾轉相除法 351 /2. 最大公因式 354 /3. 因式分解的唯一性 357 /4. 整數 363 /5. 向量空間分解的應用 365 /6. 舒而引理 369 /7. 約旦標準式 371

第 三 篇　與其他結構的關係

第十三章　多線性乘積

1. 張量乘積 379 /2. 張量乘積的同構映射 384 /3. 交錯乘積：特殊情形 388 /4. 交錯乘積：一般情形 393 /附錄：由一集合所生成的向量空間 405

第十四章　群

1. 群和群的例題 409 /2. 群的簡單性質 412 /3. 陪集與正規子群 421 /4. 循環群 427 /5. 自由交換群 432

第十五章　環

1. 環與理想 437 /2. 同態映射 443 /3. 模 448 /4. 因子模 453

附 錄 一　凸集合

1. 定義 459 /2. 超平面分割 459 /3. 極點與輔助超平面 462 /4. Krein-Milman 定理 464

附 錄 二　一些基本觀念

1. 歸納法 469 /2. 複數的代數封閉性 470 /3. 等價關係 472

附 錄 三　角　477

習題答案　485

索　　引　493

第一篇

基本定理

第一章

向　　量

向量的概念爲本課程的基礎，它對我們未來的討論提供了幾何上的誘導，因此向量的代數與幾何性質將被完全地討論。

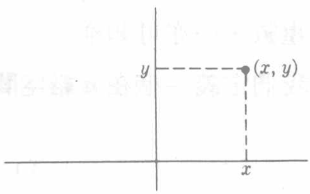
關於叉積的討論，只是爲了向量理論的完整性，在本書的其餘部份，幾乎都沒有應用到。而它亦是向量理論中，唯一的一個僅在3維空間中有效的理論（在2，4或n維空間都不行）。本書所有的敍述和證明幾乎都有一個特色（叉積和行列式例外）；即在3維或n維空間的證明既不比在2維空間更容易或更難。

第一節　N維空間中點的定義

我們知道只要選定單位長，就能以一數來表示線上的一點。

一數對（x，y）能用來表示平面上的一點。這些表法可由下列圖形來說明。

(a) 直線上的點



(b) 平面上的點

圖 1

一個三重數（x，y，z），可以用來表示3維空間中的一點。我們只需在平面上多加另一軸。舉例說明如下圖。

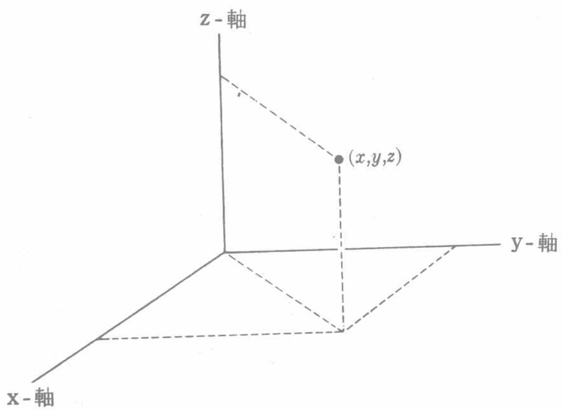


圖 2

我們亦可用（ x_1 ， x_2 ， x_3 ）來代替（ x ， y ， z ）。線可稱爲 1 維空間，而平面可稱爲 2 維空間。

因此我們可用單獨一個數代表 1 維空間中的一點。用一數對代表 2 維空間中的一點。三重數代表 3 維空間中的一點。

雖然我們不能更進一步的描圖，但我們仍可將四重數

$$(x_1, x_2, x_3, x_4)$$

想像爲 4 維空間中的一點，五重數爲 5 維空間中的一點。同樣六重數，七重數……亦可類推。

我們定義一個在 n **維空間的點**爲一 n 重數

$$(x_1, x_2, \cdots\cdots, x_n),$$

此處 n 爲正整數。我們以大寫字母 X 表 n 重數，同時以小寫字母表數，以大寫字母表點。我們稱 x_1 ， x_2 ，……， x_n 爲點 X 的**坐標**。例如在 3 維空間中，2 爲點（ 2 ， 3 ， -4 ）的第一坐標，而 -4 爲第三坐標。

本書中我們大多數的例子都是取 $n=2$ 或 $n=3$ 的情形。然而讀者必須瞭解兩點：㈠實際上假設 $n=2$ 或 $n=3$ 並不能使公式或定理

更簡單。(二)在物理學上的確發生 $n=4$ 的情形，且在實際或理論上常出現 $n=n$ 的情形。再者，我們的部分目的也是要顯示，在一般的情形也是與 $n=2$ 或 $n=3$ 時相似。

例題　我們所居住的空間就是一個3維空間的典型例子。只要我們選定一個原點及坐標系，則我們就可利用三個坐標值來描出點的位置。在很早以前，我們就知道將3維空間加入一個第四坐標——時間，是相當方便的。而時間的起點可任意選定，如基督的誕生（亦可選太陽系的誕生，或地球的誕生爲起點，只要我們能精確的決定即可），則一點的時間坐標若爲負則爲紀元前，而正時間坐標的點爲紀元後。

但勿有"時間就是第4維空間"的觀念。上述4維空間的例子僅是一個可能的例子而已。例如在經濟學上，將企業花費金錢的數目當作坐標，就用到了一個非常不同的空間。例如我們可用下列企業作爲對應坐標來處理一個7維空間：

1. 鋼鐵	2. 汽車	3. 農產品	4. 魚
5. 化學品	6. 衣服	7. 運輸	

我們每年以百萬爲衡量的單位，則點（1000，800，550，300，700，200，900）在7維空間裡的意義是鋼鐵企業每年花費十億元，而化學品企業爲七億元。

現在我們來定義點的加法，若 A，B 爲兩點，

$$A=(a_1,\cdots\cdots,a_n),\quad B=(b_1,\cdots\cdots,b_n),$$

則定義 $A+B$ 爲

$$(a_1+b_1,\cdots\cdots,a_n+b_n).$$

例如，若 $A=(1,2)$，$B=(-3,5)$，則 $A+B=(-2,7)$。在3維空間若 $A=(-1,\pi,3)$，$B=(\sqrt{2},7,-2)$，則

$$A+B=(\sqrt{2}-1,\ \pi+7,\ 1)$$

再者，若 c 是任一數，我們定義點 cA 的坐標爲

$$(ca_1,\cdots\cdots,ca_n).$$

若 $A=(2,-1,5)$，$c=7$，則 $cA=(14,-7,35)$

由上述的定義，我們知道加法滿足下列的規則：

(1) $(A+B)+C=A+(B+C)$

(2) $A+B=B+A$

(3) $c(A+B)=cA+cB$

(4)若 c_1，c_2 爲數，則

$$(c_1+c_2)A=c_1A+c_2A \text{ 且 } (c_1c_2)A=c_1(c_2A)$$

(5)若令 $O=(0,\cdots\cdots,0)$ 爲一點，而其坐標皆爲 0，則

$O+A=A+O=A$　對所有的 A 都成立。

(6) $1\cdot A=A$，且若以 $-A$ 表 $(-1)A$，則 $A+(-A)=O$

〔通常我們以 $A-B$ 代表 $A+(-B)$〕。

這些性質都很容易證明，我們建議讀者以實例來證明它們。在此僅對性質(3)作詳細的證明。

令 $A=(a_1,\cdots\cdots,a_n)$，$B=(b_1,\cdots\cdots,b_n)$。則

$$A+B=(a_1+b_1,\cdots\cdots,a_n+b_n)$$

且

$$\begin{aligned} c(A+B) &= (c(a_1+b_1),\cdots\cdots,c(a_n+b_n)) \\ &= (ca_1+cb_1,\cdots\cdots,ca_n+cb_n) \\ &= cA+cB \end{aligned}$$

由 n 重數的加法定義得知最後一步爲眞。其他性質的證明留作習題。

注意　勿將數 0 和 n 重數 $(0,0,\cdots\cdots,0)$ 混淆。通常我們

以O表n重數（0，0，……，0），亦將其稱爲零。因爲在實用上不致於發生混淆。

現在我們藉著數在平面上的幾何性質來解釋加法和乘法（讀者可同時察覺在3維空間所發生的情形。）

例如，設$A=(2,3)$，

$B=(-1,1)$。

則$A+B=(1,4)$

圖形看起來像一個平行四邊形（圖3）

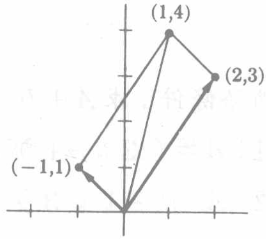


圖 3

另外再舉例，設$A=(3,1)$，$B=(1,2)$。則$A+B=(4,3)$。

我們可再看到加法的幾何表示法，又像一個平行四邊形（圖4）。

若乘上一個數，則其所代表的是什麼？令$A=(1,2)$，$c=3$，則$cA=(3,6)$，如圖5(a)

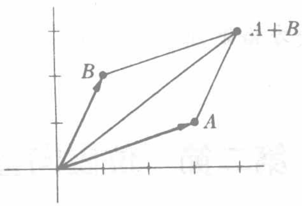


圖 4

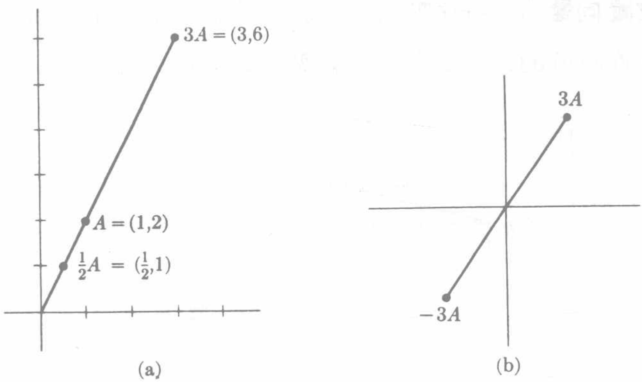


圖 5

乘上3，即將A的長度延伸3倍。同樣地$1/2\ A$將A的長度縮短

1/2倍，即將A縮短爲原來的一半。一般而言，若t是一個數，$t>0$，我們說tA是與A相同方向的點，但與原點的距離爲A的t倍。

反之，乘上一個負數則得相反的方向，$-3A$如圖5(b)所示。

習　題

依所給條件，求$A+B$，$A-B$，$3A$，$-2B$，

1. $A=(2,-1)$，$B=(-1,1)$
2. $A=(-1,3)$，$B=(0,4)$
3. $A=(2,-1,5)$，$B=(-1,1,1)$
4. $A=(-1,-2,3)$，$B=(-1,3,-4)$
5. $A=(\pi,3,-1)$，$B=(2\pi,-3,7)$
6. $A=(15,-2,4)$，$B=(\pi,3,-1)$
7. 將1～4點繪於方格紙上。
8. 令A，B如1所示，畫出$A+2B$，$A+3B$，$A-2B$，$A-3B$，$A+1/2\,B$於方格紙上。

第二節　位置向量

我們定義**位置向量**爲一有序點對，其表示法爲$\overrightarrow{AB}$（此不爲一乘積）。A稱爲位置向量的起點，B爲其終點，如圖6

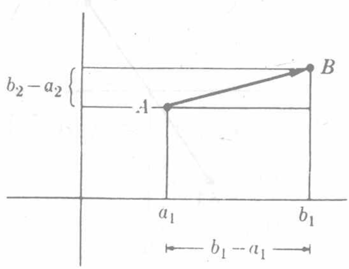


圖 6

B的坐標如何由A的坐標求得呢？我們由平面中觀察得

$$b_1 = a_1 + (b_1 - a_1)$$

同樣的

$$b_2 = a_2 + (b_2 - a_2)$$

即

$$B = A + (B - A)$$

令 $\overrightarrow{AB}$ 與 $\overrightarrow{CD}$ 爲兩位置向量，若 $B - A = D - C$ 則我們說它們等價，每一位置向量等價於起點爲原點的一個位置向量，蓋因 $\overrightarrow{AB}$ **等價**於 $\overrightarrow{O(B-A)}$。很明顯地，這是唯一起點爲原點且等價於 $\overrightarrow{AB}$ 的位置向量。若你能想到平面上的平行四邊形定律，則位置向量的等價關係可用幾何來解釋；若兩點對所定的線段長度相等，且所指的方向相同，則兩位置向量等價。

在下圖中我們描繪出位置向量 $\overrightarrow{O(B-A)}$，$\overrightarrow{AB}$ 和 $\overrightarrow{O(A-B)}$，$\overrightarrow{BA}$

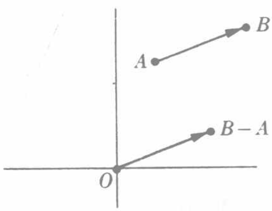


圖 7

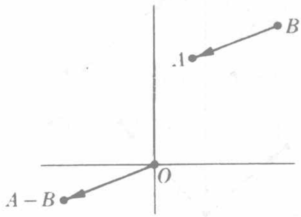


圖 8

以原點爲起點的位置向量 $\overrightarrow{OC}$，我們稱之爲**坐落在原點**的向量。任一位置向量 $\overrightarrow{AB}$ 稱爲**坐落在 A 點**的向量。

坐落在原點的位置向量，完全由其終點來決定。以此觀點，我們可稱 n 重數爲 n 維點或向量。

兩個位置向量 $\overrightarrow{AB}$ 和 $\overrightarrow{PQ}$，如果存在 $c \neq 0$ 使得 $(B - A) = c (Q - P)$，則稱爲**平行**。若 $c > 0$ 則爲**同方向**，$c < 0$ 則**反方向**。如下圖：