国际数学奥林匹克题库

Olympic

# 环球城市数学奥林匹克试题解

林 常 编译



ZHEJIANG UNIVERSITY PRESS
浙江大学出版社

**国际数学奥林匹克题库**

# 环球城市数学奥林匹克试题解

林　常　编译



ZHEJIANG UNIVERSITY PRESS
浙江大学出版社

**图书在版编目(CIP)数据**

环球城市数学奥林匹克试题解 / 林常编译. —杭州：浙江大学出版社，2011.3
ISBN 978-7-308-08432-1

Ⅰ.①环… Ⅱ.①林… Ⅲ.①数学课－中学－解题 Ⅳ.①G634.605

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2011)第 024214 号

**环球城市数学奥林匹克试题解**

林 常 编译

**责任编辑** 杨晓鸣
**封面设计** 刘依群
**出版发行** 浙江大学出版社
(杭州市天目山路 148 号 邮政编码 310007)
(网址:http://www.zjupress.com)
**排 版** 浙江时代出版服务有限公司
**印 刷** 德清县第二印刷厂
**开 本** 787mm×960mm 1/16
**印 张** 17.5
**字 数** 345 千字
**版 印 次** 2011 年 3 月第 1 版 2011 年 3 月第 1 次印刷
**书 号** ISBN 978-7-308-08432-1
**定 价** 29.00 元



浙江大学出版社发行部邮购电话 (0571)88925591

# 前　　言

环球城市数学竞赛（International Mathematics Tournament of Towns，Международный математический Турнир Городов）始于苏联1980年的莫斯科—基辅—里加三市邀请赛，现已成为国际性的比赛。由俄罗斯科学院主办，有上百个城市，数十万名学生参加，来自如下国家和地区：俄罗斯、保加利亚、塞尔维亚、澳大利亚、加拿大、哥伦比亚、阿根廷、巴西、德国、法国、瑞典、奥地利、英国、卢森堡、希腊、西班牙、以色列、新西兰、美国等。

从1982年开始，每届举行两季比赛：秋季赛（10—11月）和春季赛（次年2—3月）。每季分初级（O水平）及高级（A水平）两轮，间隔一周考试。每轮分初中组（Juniors）及高中组（Seniors）两张试卷。

第1～19届试题解答已有中译本（中国数学奥林匹克委员会编译）。

第20～30届试题解答由林常编译，浙江大学出版社出版。

# 目 录

# 一、环球城市数学竞赛试题

## 1. 第20届秋季赛(1998)

| | 初中组 | 高中组 |
|---|---|---|
| O水平 | 1,2,3,4,5 | 6,7,8,9,10 |
| A水平 | 11(1),12,13,14,15,16 | 11,13,17,18,19,20 |

**1.** 边长为20的正方体分割成8000个单位方块,每块中写一个数. 已知,平行于格线的每行(三种方向)20个方块之和都等于1. 设一个方块中的数为10,过这个方块有三个平行层(分别平行于正方体的三面),试求这三层之外的所有数之和.

**2.** 一个整数的平方十进制末两位是09. 求证:百位数码是偶数.

**3.** 在三角形$ABC$的$BC$,$CA$,$AB$边上分别取点$A_1$,$B_1$,$C_1$,已知$\angle AC_1B_1=\angle B_1A_1C$,$\angle CB_1A_1=\angle A_1C_1B$,$\angle BA_1C_1=\angle C_1B_1A$. 求证:$A_1$,$B_1$,$C_1$分别是三边之中点.

**4.** 十二个候选人竞选市长,在电视上辩论,过了一段时间,第一个候选人说:“有人说了一个谎话。”第二个说:“现在有两个谎话了。”第三个说:“现在有三个了.”如此类推,直至第十二个候选人说:“现在有十二个谎话了.”辩论至此结束. 他们所说的当前谎话的数量最少有一个人正确,求他们说谎话的总数.

**5.** 设$n$和$m$为任意正整数,棋子$(n,m)$马,每步横行$n$格然后直行$m$格,或直行$n$格然后横行$m$格. 求证:在无限大的方格棋盘上,可用黑白两色染方格,使$(n,m)$马每步的起点与终点总是不同色.

**6.** 19 个砝码重量分别为 1,2,…,19 克. 其中 9 个是铁质,9 个铜质,1 个金质. 已知,铁砝码的总重量比铜砝码多 90 克,求金砝码的重量.

**7.** 平面上 $n$ 个半径为 1 的圆形纸片的圆周过同一点,而且这个点位于全体圆片的并集区域内. 此区域是一个曲边多边形. 求它的周长.

**8.** $8\times8$ 棋盘上任选 17 个方格. 求证:其中必有两格,棋子马从一格走到另一格需要不少于 3 步.

**9.** 实数组$(x_1,x_2,\cdots,x_{20})$的每项都属于区间$[0,1]$,并满足 $x_1x_2\cdots x_{20}=(1-x_1)(1-x_2)\cdots(1-x_{20})$. 求使 $x_1x_2\cdots x_{20}$最大的所有这种数组.

**10.** 设在下述过程中每人有固定的智商值,而一国的均商等于该国当时全体居民的智商的平均值.

(1)设 $A$ 国一些人移居 $B$ 国,求证,有可能两国的均商都得到提高.

(2)然后 $B$ 国一些人移居 $A$ 国(允许其中有原先从 $A$ 来的),是否可能两国的均商都再次得到提高?

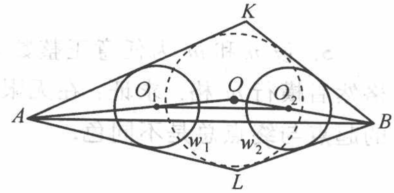
(3)设 $A$ 国一些人移居 $B$ 国,$B$ 国一些人移居 $C$ 国,使得三国的均商都得到提高. 然后进行反方向移居:$C$ 国一些人移居 $B$ 国,$B$ 国一些人移居 $A$ 国. 是否可能三国的均商都再次得到提高?

**11.** (1)$a,b$ 为正整数,若最小公倍数$[a,a+5]=[b,b+5]$,求证,$a=b$.

(2)是否存在正整数 $a,b,c$ 使得$[a,b]=[a+c,b+c]$?

**12.** Игоря 和 Вали 各有一张白色的 $8\times8$ 表,分别将同样个数的方格染蓝色. 求证,他们分别可将各自的表剪成 $1\times2$ 块,然后改拼成 $8\times8$,使得二者的所有蓝色方格位置相同.

**13.** 线段 $AB$ 平行于二等圆的连心线并与两圆相交(交点都在 $AB$ 内),分别过 $A$,$B$ 作较靠近自己的一圆的两切线,设这四条切线围成的四边形包含两圆. 求证,这个四边形有内切圆.



**14.** 正 25 边形中作出所有的对角线. 求证,没有 9 条对角线交于一个内点.

**15.** 设有 10 种颜色的 20 粒珠子(每色两粒),装在 10 个盒子中. 已知可从每盒取出一粒,使得各色都有. 求证,取法数是 2 的正整数次方.

**16.** 一伙强盗抢到一袋银币,每枚的面值都是整数元. 已知,丢掉任一枚后余下的银币都可以平均分配(每人得到的钱数相同). 求证,银币的个数等于强盗人数的整数倍加 1.

**17.** 9 个数排成 3×3 表 $\begin{array}{|c|c|c|}\hline a_1 & a_2 & a_3 \\ \hline b_1 & b_2 & b_3 \\ \hline c_1 & c_2 & c_3 \\ \hline\end{array}$. 设三个行和与三个列和彼此相等:

$a_1+a_2+a_3=b_1+b_2+b_3=c_1+c_2+c_3=a_1+b_1+c_1=a_2+b_2+c_2=a_3+b_3+c_3$.

求证,行积之和等于列积之和: $a_1a_2a_3+b_1b_2b_3+c_1c_2c_3=a_1b_1c_1+a_2b_2c_2+a_3b_3c_3$.

**18.** 委员会的 12 个成员参加圆桌会议,每个座位上放好每人的名片. 尼古拉头一个进入会议室,但他错坐在自己位子的顺时针下一位. 其他 11 人逐个进入,每人先找到自己的位置,若还空着就坐下,否则就坐到顺时针的头一个空位. 12 个人全部坐下得到一种坐位方式. 对于后面 11 个人的所有进入次序,共有多少种不同的坐位方式?

**19.** 称一个长方体的长,宽,高之和为它的尺度. 一个长方体能否覆盖尺度比它大的另一个长方体?

**20.** 设函数 $f(x)=\dfrac{x^2+ax+b}{x^2+cx+d}$,二次三项式 $x^2+ax+b$ 与 $x^2+cx+d$ 无公共根. 求证,以下两个命题等价:

(1)存在一个非退化区间不含 $f(x)$ 的值;

(2) $f(x)$ 是复合函数 $f(x)=f_1(f_2(\cdots f_{n-1}(f_n(x))\cdots))$,每个 $f_i(x)$ 为 $kx+m$, $\dfrac{1}{x}$, $x^2$ 之一. (只要求等式在两边的公共定义域上成立)

# 2. 第 20 届春季赛(1999)

| | 初中组 | 高中组 |
|---|---|---|
| $O$ 水平 | 1,2,3,4,5 | 6,2,3,7,8 |
| $A$ 水平 | 9,10,11,12,13,14 | 15,16,17,12,18,14 |

**1.** 父子两人以各自的匀速度沿圆周滑冰,同向滑行时父亲不时超过儿子,而反向时相遇的频率增大为 5 倍. 父亲的速度是儿子的多少倍?

**2.** 直角三角形 $ABC$ 的斜边 $AB$ 向外作正方形 $ABDE$. 设 $AC=1$, $BC=3$,角 $C$ 的平分线分 $DE$ 所得两段之比是多少?

**3.** 黑板上写着一排正整数 $A=(a_0,a_1,a_2,\cdots,a_n)$. 由它得到第二排正整数 $B$:$b_0$ 是 $A$ 的所有数的个数,$b_1$ 是 $A$ 中大于 1 的数的个数,$b_2$ 是 $A$ 中大于 2 的数的个数,…直到写完所有可能的正数 $b_i$. 再由 $B$ 依同样规则得到第三排数 $C$. 求证,$C$ 和 $A$ 整体相同.

**4.** 平面上画着一个黑色的等边三角形,另有 9 张与它边长相等的正三角形纸片. 要求将它们互不重叠地放在平面上,使得每张纸片都盖住黑色三角形的内点. 如何放置?

**5.** 一个正方形被 18 条直线(9 条平行于正方形的一边,9 条平行于另一边)分割成 100 个矩形. 已知,其中恰有 9 个是正方形,求证,这 9 个正方形中必有两个边长相等.

**6.** 一排 1999 个数,第一数等于 1,除首尾外的每数等于它的两个相邻数之和. 求最后一数.

**7.** 平面上画着一个黑色的正方形,另有 7 张与它边长相等的正方形纸片. 要求将它们互不重叠地放在平面上,使得每张纸片都盖住黑色正方形的内点. 如何放置?

**8.** $A$,$B$ 两人轮流($A$ 先)每步在 $9\times 9$ 表的一个空格中放一枚棋子,$A$ 放白色子,$B$ 放黑色子. 全部放满后设白子占多数的行,列总个数为 $m$,黑子占多数的行,列总个数为 $n$ ($m+n=18$),则 $A$ 得分 $a=m-n$. 试求满足以下两条件的 $k$ 值:

(1)无论 $B$ 如何阻扰,$A$ 都可保证得分 $a\geqslant k$;

(2)无论 $A$ 如何努力,$B$ 都可使他的得分 $a\leqslant k$.

**9.** 某人的银行卡上存有 500 元，每步可取出 300 元或存入 198 元，但除原先的 500 元外不得加入新的钱. 反复进行这些操作最多可以取出多少钱?

**10.** 设 $O$ 是平行四边形 $ABCD$ 两对角线的交点. 求证，若过 $A,B,O$ 的圆与直线 $BC$ 相切，则过 $B,C,O$ 的圆与直线 $CD$ 相切.

**11.** $A,B$ 两人游戏，$A$ 从左到右逐项地写一个 1999 项序列，每项为 0 或 1(可彼此独立地任选). 从第二项起，$A$ 每写一项，$B$ 任选两个已有的项，将它们对调. $B$ 是否总能使得最后得到的序列左右对称?

**12.** 一个圆被 $n$ 条直径等分成 $2n$ 个扇形，其中任选 $n$ 个染红色，另外 $n$ 个染蓝色. 蓝色扇形从某个起依逆时针次序写上数 $1\sim n$，红色扇形从某个起依顺时针次序写上数 $1\sim n$. 求证，存在一个半圆，其中出现 $1\sim n$ 的每个数.

**13.** $\triangle ABC$ 的内切圆与 $AB,AC$ 边分别切于 $P,Q$ 点，设 $RS$ 是平行于 $AB$ 的中位线，而 $T$ 是直线 $PQ$ 与 $RS$ 的交点. 求证，$T$ 在角 $B$ 的平分线上.

**14.** 国际象棋盘上，棋子车每步沿水平或竖直方向走到邻格，64 步后走过每个方格且回到出发点. 求证，两个方向的步数不相等.

**15.** 湖中漂着一个凸多面体形的物体. 是否可能它的体积的 90% 在水面下，而多于一半的表面积在水面上?

**16.** 四边形 $ABCD$ 内接于圆 $O$($O$ 是圆心)，三角形 $ABO,CDO$ 的外接圆周另交于 $F$ 点. 求证，$\triangle AFD$ 的外接圆周过线段 $AC$ 与 $BD$ 的交点.

**17.** 求所有整数对$(x,y)$，使得 $x^3+y$，$x+y^3$ 都被 $x^2+y^2$ 整除.

**18.** 对于非负整数 $i$，设它的二进制数码 1 的个数为 $S_2(i)$，当 $S_2(i)$ 为偶数时令 $M(i)=0$，$S_2(i)$ 为奇数时令 $M(i)=1$. 头几个 $M(i)$ 是 $0,1,1,0,1,0,0,1,\cdots$.

(1)求证，数列 $M(0),M(1),\cdots,M(1000)$ 中相等的相邻对不少于 320 个;

(2)求证，数列 $M(0),M(1),\cdots,M(1000000)$ 中满足 $M(i)=M(i+7)$ 的序号 $i$ 不少于 450000 个.

# 3. 第21届秋季赛(1999)

| | 初中组 | 高中组 |
|---|---|---|
| $O$水平 | 1,2,3(1),4,5(1) | 6,7,3(2),8,5(2) |
| $A$水平 | 9,10,11(1),12,13,14 | 15,16,13,17,11,18,19 |

**1.** 一张直角三角形纸片沿一直线折叠,使直角顶点与另一顶点重合.

(1)所得四边形的两对角线被它们的交点分成的两段之比各是多少?

(2)设原三角形面积为1. 所得四边形沿由原三角形的第三顶点引出的对角线剪开,原纸片被剪成三块,求最小一块的面积.

**2.** 对于满足 $a+b+c=0$ 的整数 $a,b,c$ 计算 $d=a^{1999}+b^{1999}+c^{1999}$.

(1)是否可能 $d=2$? (2)是否可能 $d$ 为素数?

**3.** (1)平面上 $n$ 条直线中每条恰与另外的1999条相交. 求 $n$ 的所有可能值.

(2)空间的 $n$ 个平面中每个恰与另外的1999个相交. 求 $n$ 的所有可能值.

**4.** 一种意大利钟的时针一昼夜只走一圈,其它都与普通钟相同(包括分针一小时走一圈,两针的长度以及零点线在正上方). 有多少个盘面状态(时针—分针—零点线的相对位置)是两种钟都出现的?(当然出现相同状态的时间可不同).

**5.** 有一批 $2\times1$ 纸片,每张上连一条对角线(有左上—右下和左下—右上两种连法两种都有足够多张).

(1)能否用18张这样的纸片拼成 $6\times6$ 表,使得各张上的18条对角线两两无公共端点?

(2)同一问题, 32张纸片拼成 $8\times8$ 表.

**6.** 三角形被内心与顶点的连线分割成三个小三角形,设其中一个与原三角形相似,求三个内角.

7. 求证，存在无穷多个正的奇数 $n$ 使得 $2^n+n$ 为合数.

8. 能否在实轴上取 50 条线段，使得

(1)它们的长度为 1，2，…，50 各一个；

(2)它们的端点是整点 1，2，…，100 各一个？

9. 若干个接连的正整数排成一列，设任意接连 3 项之和被其中头一项 3 整除，且整列的最后一项是奇数. 最多有多少项？

10. 设 $ABC$ 是锐角三角形，$C_1$，$A_1$ 分别是 $AB$，$BC$ 边上的任意点，而 $B_1$ 是 $CA$ 边的中点. 求证，(1)$\triangle A_1B_1C_1$ 的面积不大于$\triangle ABC$ 的一半；

(2)当且仅当 $C_1$，$A_1$ 中至少有一个是所在边的中点时$\triangle A_1B_1C_1$ 的面积等于$\triangle ABC$ 的四分之一.

11. (1)分别重 1，2，…，100 克的 100 个砝码摆在天平两盘处于平衡. 求证，可以从两盘各去掉两个砝码使得天平仍然平衡.

(2)设分别重 1，2，…，$n$ 克的 $n$ 个砝码可以摆在天平两盘处于平衡. 对任意这样的 $n>3$，是否可从两盘各去掉两个砝码使得天平仍然平衡？

12. (1)$8\times8$ 象棋盘顶行的每格放一只黑色棋子，底行的每格放一只白色棋子，每步可将任一棋子走到相邻(有公共边)的空格. 最少要走多少步才能使所有黑子走到底行，而所有白子走到顶行？

(2)$7\times7$ 棋盘的同一问题.

13. 开始时有一正整数，$A$，$B$ 两人轮流按下述规则续写数列：$A$ 每步将前一项加上它的任一十进制数码得到下一项，$B$ 每步将前一项减去它的任一数码. 求证，这个数列中必有一项重复出现不少于 100 次.

14. 一张矩形纸内部剪去 $n$ 个矩形洞(平行于纸边)，再将这张有洞的纸剪成矩形块，最少能保证剪成的块数 $k$ 是多少？(要证明对于 $n$ 个洞的任意分布都能剪成 $k$ 块，但存在一种分布，不能剪成少于 $k$ 块)

15. 对哪些 $n\geqslant3$，可将 $1\sim n$ 的整数排成圆周满足：任二相邻数之和被顺时针下一数整除？

**16.** 矩形纸上标出：(1)共线的若干点；(2)任意3点.

允许将矩形纸沿直线折叠若干次(折痕不过标记点)，然后用针扎一个孔. 求证，总可适当折叠，使得针孔只扎到原先的标记点，而不扎到纸上任何别的点.（设针孔小到只有一点）

**17.** 设 $K$，$L$ 分别是$\triangle ABC$ 的边 $AC$，$CB$ 上的旁切圆切点. 求证，线段 $KL$，$AB$ 的中点连线 (1)平分$\triangle ABC$ 的周长；(2)平行于$\angle ACB$ 的平分线.

**18.** 充分大的象棋盘上标出 $2n$ 个方格，设棋子车（每步沿水平或竖直方向走一格）可以走遍标记方格而不经过非标记方格. 求证，全体标记方格构成的图形可以分割为 $n$ 个矩形.

**19.** 求证，凸 $10n$ 面体有 $n$ 个面的边数彼此相同.

# 4. 第 21 届春季赛(2000)

| | 初中组 | 高中组 |
|---|---|---|
| O 水平 | 1,2,3,4, | 6,2,3,7,8 |
| A 水平 | 9,10,11,12,13,14(1) | 15,16,17,18,19,14 |

**1.** 两个相邻正整数之积能否等于两个相邻正偶数之积?

**2.** 面积为 1 的梯形 $ABCD$ 两底边 $BC:AD=1:2$,设 $K$ 是对角线 $AC$ 的中点,直线 $DK$ 交 $AB$ 边于 $L$ 点. 求四边形 $BCKL$ 的面积.

**3.** 求证,(1)$3n$ 棱柱的顶点可以染 3 色,使得每个顶点都有 3 色的邻点;

(2)若 $n$ 棱柱的顶点可以染 3 色,使得每个顶点都有 3 色的邻点,则 $3|n$.

**4.** 能否在正方体的每个顶点放一个正整数,使得每条棱两端一数被另一数整除,而不相邻的两数互不整除?

**5.** 凸四边形被两对角线分割为四个三角形,已知,两个对顶三角形面积之和等于另两个对顶三角形面积之和. 求证,一条对角线被另一条平分.

**6.** 单位立方体的一对对面上各刻 1 点,另一对对面各刻 2 点,第三对对面各刻 3 点. 8 粒这样的立方体拼成一个 $2\times2\times2$ 正方体,计算它每一面上的点数之和. 是否可能得到 6 个相继的整数?

**7.** 对任意正整数 $n,k$ 求证不等式 $\sum\limits_{i=1}^{n} i^k \leqslant \dfrac{n^{2k}-(n-1)^k}{n^k-(n-1)^k}$.

**8.** 是否存在无穷数列,它的任意相继 10 项之和为正,而任意的前 $10n+1$ 项之和为负?设各项为(1)实数;(2)整数.

**9.** 求方程的所有实根 $(x+1)^{21}+(x+1)^{20}(x-1)+(x+1)^{19}(x-1)^2+\cdots+(x-1)^{21}=0$.

**10.** 设梯形两底边长为整数. 求证,它可以分割为若干个彼此全等的三角形.

**11.** 给定一圆和圆内一点 $A$,动矩形 $ABCD$ 的顶点 $B,D$ 在圆周上,求顶点 $C$ 的轨迹.

**12.** 两个强盗 $A,B$ 瓜分 100 枚银币. 每步 $A$ 取出任意多枚,由 $B$ 决定给谁. 直到一人分到 9 次为止,余下的全归另一人(也可能没到 9 次就分完结束). $A$ 最多可以保证分到多少枚?(设此数为 $k$,要证明 $A$ 可适当选取各次取的枚数使得无论 $B$ 如何决定,都能得到不少于 $k$ 枚. 而无论各次 $A$ 如何选取,$B$ 总可适当决定使得 $A$ 的所得不多于 $k$).

**13.** $5\times5$ 棋盘上最多能放多少只棋子马使得每只恰威胁到另外的两只?(给出放法并证明不能放更多只)

**14.** 象棋循环赛中每两人赛一局,每局胜方得 1 分,平局各得 0.5 分,输方得 0 分. 称一局为爆冷的,若该局的胜方总分小于输方. 求证,(1)爆冷局数少于总局数的$\frac{3}{4}$. (2) $\frac{3}{4}$是最佳值(即不能改为更小的常数值).

**15.** 设正整数 $m$ 与 $n$ 互素,而分数$\frac{m+2000n}{n+2000m}$可以约去 $d$. $d$ 的最大值是多少?

**16.** 以 $O$ 为心的圆的弦 $AC$ 与 $BD$ 交于 $K$ 点,设 $M,N$ 分别是三角形 $AKB,CKD$ 的外心. 求证,$OM=KN$.

**17.** 一叠牌中一些牌面朝下. 每步操作可任选首尾两张都是朝下的接连若干张(也可以只是朝下的一张),将它们整体翻转后放回原处(每张牌朝上变朝下,朝下变朝上,且次序倒序). 求证,无论如何操作,最后总会变为全部朝上.

**18.** 平面正方形格阵中一个凸多边形顶点都是格点,但每条边既非水平也非竖直. 求证,它的内部竖直格线长度之和等于水平格线长度之和.

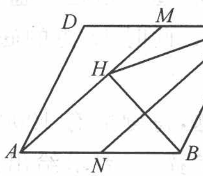
**19.** 求最大的 $n$,使得存在 $n$ 个相继正整数满足:第一数的十进制数码和被 1 整除,第二个的数码和被 2 整除,…,第 $n$ 个的数码和被 $n$ 整除.

# 5. 第22届秋季赛(2000)

| | 初中组 | 高中组 |
|---|---|---|
| $O$水平 | 1,2,3,4(1) | 5,6,7,4 |
| $A$水平 | 8,9,10,11,12,13,14 | 10,15,16,17,18,19 |

**1.** $4\times 4$数表中每个数的所有相邻数(有公共边)之和都等于1. 求全表之和.

**2.** 平行四边形$ABCD$中,$M$是$CD$边的中点,$H$是顶点$B$到直线$AM$的垂足. 求证,$BCH$是等腰三角形.




**3.** (1)黑板上写着100个不同的数. 求证,必可选出8个,使得它们的算术平均值不等于黑板上任意9个数的算术平均值.

(2)黑板上写着100个整数,设对于其中任意8个,都可找到黑板上的9个数,使得两组数的算术平均值相等. 求证,这100个数彼此相等.

**4.** (1)设32枚外观相同的硬币中有2枚假币与真币重量不同(真币之间,假币之间分别等重). 如何在无码天平上称不多于4次将它们分成等重的两组?

(2)硬币个数改为22,其余同.

**5.** $\triangle ABC$内接于圆. 过$A$作两条弦分别交$BC$边于$K$,$L$点,交弧$BC$于$M$,$N$点. 求证,若四边形$KLMN$有外接圆,则$ABC$是等腰三角形.

**6.** 正整数$a,b,c,d$满足$ad-bc>1$. 求证,$a,b,c,d$中至少有一数不被$ad-bc$整除.

**7.** 设五棱柱的每个侧面都有一个角等于$\alpha$,求$\alpha$的所有可能值.