燕博园 YANBOYUAN 图书系列

2011 经典三十六讲

JING DIAN SAN SHI LIU JIANG

高三二轮复习专用

海淀一线名师亲力打造，北京首部二轮复习用书

准确把握命题动向，高效冲刺首选方案

燕博园 YANBOYUAN 图书系列

2011 经典三十六讲

JING DIAN SAN SHI LIU JIANG

高三二轮复习专用

新课标

韩新生 徐文兵/主编

朝華出版社

图书在版编目(CIP)数据

经典三十六讲:高三二轮复习专用. 数学/韩新生,徐文兵主编. —北京:朝华出版社,2011.1
ISBN 978-7-5054-2615-3

Ⅰ.①经… Ⅱ.①韩… ②徐… Ⅲ.①数学课-高中-升学参考资料 Ⅳ.①G634

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2011)第 005325 号

(2011人教版)经典三十六讲——高三二轮复习专用(数学)

主　　编　韩新生　徐文兵

选题策划　杨　彬　王　磊
责任编辑　王　磊
特约编辑　姜婷婷
责任印制　张文东
封面设计　大象设计

出版发行　朝华出版社
社　　址　北京市西城区百万庄大街24号　**邮政编码**　100037
订购电话　(010)68413840 68996050
传　　真　(010)88415258(发行部)
联系版权　j-yn@163.com
网　　址　www.mgpublishers.com
印　　刷　环球印刷(北京)有限公司
经　　销　全国新华书店
开　　本　890mm×1260mm　1/16　**字　　数**　270千字
印　　张　20.5
版　　次　2011年2月第1版　2011年2月第1次印刷
装　　别　平
书　　号　ISBN 978-7-5054-2615-3
定　　价　48.00元

编委会

韩新生

首都师范大学硕士生导师，首师大附中数学教研组组长，补习学校校长，北京市数学特级教师，国家级骨干教师，市优秀科技工作者，市专业技术拔尖人才，全国英烈子女高考命题专家组成员，首师大数学学院数学教育硕士论文答辩委员会主席，北京市教师资格审查委员会专家委员，2009 年 10 月获北京市班主任紫禁杯一等奖，海淀区兼职教研员；主编教育教学辅导用书十余部；教育教学论文 20 篇获国家级、省市级一二等奖；主持市九五重点科研课题《数学新授课的激励—讨论—发现教学模式的构建和实践》省教学研究成果二等奖，70 余篇文章发表于《数学通报》《中学数学教与学（人大）》《中学数学杂志》《中学生数学》《中国教育报》等报刊杂志。

秦洪明

男，汉族，1961 年出生，数学特级教师；现任清华附中副校长、清华附中朝阳学校校长，兼任清华大学教育研究院基础教育研究所副所长，先后担任教务处主任、教科室主任、校长助理等职，被评为市级学科带头人和市级有突出贡献的中青年专家，并获中国科学技术发展基金会茅以升家乡教育奖；参与多项海淀区和教育部的课题研究，有 20 多篇论文在省、市级刊物上发表。

徐文兵

清华大学附属中学数学教研组长、理学博士，中教高级，东北师范大学数学与统计学院课程与教学论（数学）方向教育硕士研究生指导教师，中国数学奥林匹克高级教练员，中国数学奥林匹克国家队教练，中国数学奥林匹克集训队教练，北京数学奥林匹克集训队教练，海淀区教师进修学校兼职教研员，海淀区数学学科青年带头人，海淀区数学学科重大考试（高三期中、期末、一模、二模）压轴题的供题人；多次做国家级、市级公开课，参与多本参考书的编写，已在国内外多种教育教学期刊上发表教育教学论文 40 余篇；近年来一直潜心研究和辅导学生参加数学竞赛及自主招生考试，成绩斐然，已辅导学生几十人荣获全国高中数学联赛一等奖，辅导一名学生两次以满分荣获国际数学奥林匹克竞赛金牌，辅导一名学生获首届丘成桐中学数学奖北京赛区一等奖，已辅导几十名学生通过清华、北大等名校的自主招生考试。

樊兆春

北京育英学校数学教师，理科实验班教师，中教高级，中国数学奥林匹克高级教练员，海淀区数学科兼职教研员，骨干教师；多年来一直从事中学数学竞赛命题和学生培养的工作，所辅导学生多人次获得全国数学联赛一等奖及国际奖牌；在海淀区数学学科的统一考试中，均参加命题工作，对高考和竞赛有独到的见解，所教学生及辅导参加竞赛和自主招生的学生，遍布国内外名校。

刘向军

北京市八一中学教研组长，中学高级教师，海淀区兼职教研员，海淀区学科带头人；曾荣获“海淀区教育系统青年先进教育工作者”“海淀区科技园丁”“海淀区教育系统优秀教师”等荣誉；在首届全国中学多媒体教学观摩研讨会暨中国教育技术协会“十一五”规划重点课题开题会上做示范课；已辅导多名学生在各级各类的数学的竞赛中获奖，多次发表教育教学论文。

刘福合

北京大学附属中学高级教师，海淀区数学学科带头人，海淀区数学中心组成员，区兼职教研员；从事高中数学教学工作20年，有丰富的高考备考经验，能够较好地把握数学高考命题方向。

常　青

北京大学附属中学数学教师，海淀区学科带头人；长期从事高中数学一线教学及高考研究，有丰富的教学经验；有多篇教案、论文在各级各类比赛中获奖，曾获得海淀区青年教师标兵等多项荣誉。

陈敬川

高中数学特级教师，从教27年，担任过18年高三毕业班教；主持过“九五”“十五”省级课题《高中数学课堂教学模式研究》和“十一五”区级重点课题《高中数学非智力型学困生指导转化策略研究》，发表过20多篇教学科研论文；教学中形成了以提高学生数学素质和提高学生数学修养为核心的教学风格。

李晓晖

北京育英学校数学教师，中国奥林匹克数学竞赛一级教练员，多年担任高三把关教师。

前言

新课标已经进入了实考阶段。从 2010 届高考情况来看，高考思想和形式的变革对老师和同学们提出了新的要求，这为新课标精神落实到教育注入了新的生机，同时也充满了新的机遇与挑战。目前，北京还没有完备的针对新课标要求而出版的高三二轮数学复习用书，外地出版的二轮复习用书质量也不能保障。

针对以上情况，“燕博园”特邀一批高三多年把关的老师，倾力打造这本二轮复习书。这批优秀教师如首师大附中的韩新生老师等均为专家型特级教师、高级教师，他们对二轮复习特点和高考命题方向都能准确把握。他们根据多年教学经验和二轮复习的特点，结合新课标的考试说明与考试要求，认真研究命题规律，优化知识结构，提炼解题方法。从形式到内容，特点鲜明，起点更高，更加深刻地体现了高考改革的方向，其崭新的面貌将给考生复习冲刺带来全新的感受。

新颖：力求反映最新观点和信息，选择新鲜的例题与习题，体现敏锐性和创造性并举的原则；

实用：老师们总结出最有效的数学思想方法，力求简洁有效地解决高考中的问题。在体例设计上，为方便老师备课和同学课堂学习，特意打造了这种简洁有效的模式；

科学：依据考生的认知规律，精心设置辅导检测栏目，使得学生能按时足量地完成即定任务；

有效：知识的编排和课时的安排符合二轮复习的特点，使得学生在短时间内有效复习，并体现最新复习导向。

本书科学、规范、简洁、高效，融实用性、针对性、综合性、预测性于一体，它吸收和借鉴了当前高考研究的最新成果，体现了高考备考复习阶段性和整体性最新方略，是一套成熟与规范的复习资料。

CONTENTS 目录

第一讲
集合与常用逻辑用语

一 主干知识整合

集合相关概念	1. 集合：把一些能够确定的不同的对象看成一个整体，就说这个整体是由这些对象的全体构成的集合. 2. 集合中元素的特征：确定性，互异性，无序性. 3. 子集：如果集合 A 的任何一个元素都是集合 B 的元素（若 $a\in A$，则 $a\in B$），那么集合 A 叫做集合 B 的子集. 记作 $A\subseteq B$ 或 $B\supseteq A$. 4. 真子集：如果集合 A 是集合 B 的子集，并且集合 B 中至少有一个元素不属于 A，那么集合 A 叫做集合 B 的真子集，记作 $A\subseteq B$. 5. 集合相等：如果集合 A 的每一个元素都是集合 B 的元素，反过来，集合 B 的每一个元素都是集合 A 的元素，那么我们就说集合 A 等于集合 B，记作 $A=B$.（即 $A\subseteq B$ 且 $B\subseteq A\Leftrightarrow A=B$） 6. 空集：不含任何元素的集合叫做空集，记作 ϕ 7. 全集：如果所要研究的集合都是某一个给定集合的子集，那么称这个给定的集合为全集，通常用 U 表示.
集合运算及运算中常用结论	交集：$A\cap B=\{x\mid x\in A$ 且 $x\in B\}$； 并集：$A\cup B=\{x\mid x\in A$ 或 $x\in B\}$； 补集：$\complement_U A=\{x\mid x\in U,x\notin A\}$（注意前提条件：$A\subseteq U$） $A\cap\phi=\phi,A\cup\phi=A,A\cap A=A,A\cup A=A,A\cap B=B\cap A,A\cup B=B\cup A$ $A\cap B\subseteq A;A\cap B\subseteq B;A\cap A=A;\begin{cases}A\subseteq B\\B\subseteq C\end{cases}\Rightarrow A\subseteq C;A\subseteq B\Leftrightarrow \complement_U B\subseteq \complement_U A$； $A\cap B=A\Leftrightarrow A\subseteq B;A\cup B=B\Leftrightarrow A\subseteq B$； 空集是任何集合的子集，是任何非空集合的真子集； 如果一个集合有 n 个元素，则它的所有子集个数为 2^n，所有真子集个数为 2^n-1.
全称量词与存在量词	1. 常用的全称量词："对所有的"、"对任意一个""对一切""对每一个""任给"等；用符号"$\forall$"表示. 含有全称量词的命题，叫做全称命题. 2. 常用的存在量词："存在一个"、"至少有一个"、"有些"、"有一个"、"有的"、"对某个"；用符号"$\exists$"表示. 含有存在量词的命题，叫做存在性命题. 3. 全称命题 p：$\forall x\in M,p(x)$. 它的否定 $\neg p$：$\exists x\in M,\neg p(x)$. 特称命题 p：$\exists x\in M,p(x)$. 它的否定 $\neg p$：$\forall x\in M,\neg p(x)$. 即全称命题的否定是特称命题，特称命题的否定是全称命题. 否定一个全称命题可以通过"举反例"来说明.
逻辑联结词	"且""或""非"分别用符号"$\wedge$""$\vee$""$\neg$"表示.
充要条件及命题的四种形式	①$p\Rightarrow q$：p 是 q 的充分条件；q 是 p 的必要条件； ②$p\Leftrightarrow q$：p 是 q 的充要条件； ③下列叙述表达相同的意思：ⅰ）"若 p 则 q"；ⅱ）p 是 q 的充分条件；ⅲ）q 是 p 的必要条件；ⅳ）$p\Rightarrow q$. 四种命题的构成： 原命题：若 p 则 q；逆命题：若 q 则 p；否命题：若 $\neg p$ 则 $\neg q$；逆否命题：若 $\neg q$ 则 $\neg p$. 原命题与逆否命题同真同假，是等价命题，即"若 p 则 q"$\Leftrightarrow$"若 $\neg q$ 则 $\neg p$".

二 典型方法提炼

1. 在判断给定对象能否构成集合时，应依据集合中元素的“确定性”；在表示一个集合时，要特别注意元素的“互异性”和“无序性”.

2. 空集是任何集合的子集，利用“$A\subseteq B$”解题时别遗漏 $A=\phi$.

3. 在集合运算过程中经常借助数轴、直角坐标平面、Venn 图等将有关集合直观地表示出来，经常与方程、函数、不等式、三角、几何等知识联系.

4. 命题充要关系的判定方法：①定义法；②等价法(对于条件或结论是否定形式的经常运用等价法)；③利用集合间的包含关系(若 $A\subseteq B$，则 A 是 B 的充分条件，同时 B 是 A 的必要条件；若 $A=B$，则 A 是 B 的充要条件)；解决充要条件问题还应注意与相关知识的联系.

5. 常见关键词的否定：

关键词	是	都是(全是)	$>(<)$	至少有一个	至多有一个	任意	存在
否定	不是	不都是(全是)	$\leqslant(\geqslant)$	一个也没有	至少有两个	存在	任意

三 典型例题讲解

例 1 已知集合 $M=\{a\}$，$P=\{a,b\}$，$S=\{M,P\}$，则下列结论：(1)$M\in P$；(2)$M\subsetneqq P$；(3)$M\in S$；(4)$P=S$.其中正确的是________.

思路点拨

注意读懂集合 M、P、S 的内涵，同时理解 $\in$、$\subsetneqq$、$=$ 等符号表示的含义.

规律技巧提炼

例 2 已知集合 $A=\{x|y=\sqrt{x-1}\}$，$B=\{y|y=\sqrt{x-1}\}$，则 A ______ B(在$\subseteq$，$\subsetneqq$，$\supseteq$中选择最恰当的符号填空).

思路点拨

注意弄清集合中代表元的意义：集合 A 是函数 $y=\sqrt{x-1}$的定义域，而集合 B 是其值域.

规律技巧提炼

例 3 已知集合 $A=\{x|x^2-3x-10\leqslant 0\}$，集合 $B=\{x|p+1\leqslant x\leqslant 2p-1\}$.若 $B\subseteq A$，求实数 p 的取值范围.

思路点拨

首先求出集合 $A=[-2,5]$，还要弄懂 $B\subseteq A$ 所包含的意思，特别要注意 $B=\varnothing$的情况.

规律技巧提炼

例 4　已知 $p:\left|1-\frac{x-1}{3}\right|\leqslant 2$，$q:x^2-2x+1-m^2\leqslant 0(m>0)$，若 $\neg p$ 是 $\neg q$ 的必要而不充分条件，求实数 m 的取值范围.

思路点拨

利用等价命题先进行命题的等价转化，搞清楚命题中条件与结论的关系，再去解不等式，找解集间的包含关系，来解决问题.

规律技巧提炼

例 5　设 A、B 是两个集合，定义：$A*B=\{x|x\in A$，且 $x\notin B\}$，则 $A*(A*B)=($　　)

A. A　　B. B　　C. $A\cap B$　　D. $A\cup B$

思路点拨

由韦恩图，可直接获得结果.

规律技巧提炼

例 6　判定充要条件（在"充分而不必要条件"、"必要而不充分条件"、"充要条件"、"既不充分也不必要条件"中选出一个填空）

(1)"$\alpha>\beta$"是"$\sin\alpha>\sin\beta$"的________.

(2)在$\triangle ABC$中，"$A>B$"是"$\sin A>\sin B$"的________.

(3)"$\alpha=\beta$"是"$\tan\alpha=\tan\beta$"的________.

(4)在$\triangle ABC$中，"$A=B$"是"$\tan A=\tan B$"的________.

思路点拨

弄清两个条件之间的关系，注意三角形中相应关系的"特殊化".

规律技巧提炼

例 7　写出下列命题的否定：

(1)p：$\exists x\in\mathbf{R}$，$x^2+2x+1\leqslant 0$；

(2)p：m 取任何实数，方程 $x^2+mx-1=0$ 都有实根.

思路点拨

全称命题的否定是特称命题，特称命题的否定是全称命题.

规律技巧提炼

【备选题】设 A、B 是非空集合，定义：$A\times B=\{x\mid x\in A\cup B$，且 $x\notin A\cap B\}$，已知 $A=\{x\mid y=\sqrt{2x-x^2}\}$，$B=\left\{y\mid y=\dfrac{2^x}{2^x-1}\right\}$，则 $A\times B=$________.

思路点拨

读清题意是解决问题的关键：A 是相应函数的定义域，B 是相应函数的值域.

规律技巧提炼

四 课堂方法落实

1. 已知集合 $A=\{y\mid y=x^2-1\}$，$B=\{(x,y)\mid y=x+1\}$，则集合 $A\cap B$ 中元素个数为(

A. 0 个　　B. 1 个　　C. 2 个　　D. 无数个

2. 设 $A=\{0,1\}$，且 $B=\{x\mid x\in A\}$，则集合 A、B 的关系为 A ________ B.

3. 命题 A：点 $P(x_0,y_0)$ 是两曲线 C_1：$F(x,y)=0$ 和曲线 C_2：$G(x,y)=0$ 的公共点；命题 B：曲线 C_3：$F(x,y)+\lambda G(x,y)=0$（λ 为常数）过点 $P(x_0,y_0)$. 则 A 是 B 的________条件.

4. 已知集合 $A=\{x\mid x^2-x-2\leqslant 0\}$，$B=\{x\mid 2a<x<a+3\}$，且满足：$A\cap B=\varnothing$，则实数 a 的取值范围是________.

五 课后限时训练

1. 已知集合 $M=\{x\mid x^2=1\}$，集合 $N=\{x\mid ax=1\}$，若 $N\subsetneqq M$，那么 a 的值为(　　)

A. 1　　B. -1

C. 1 或 -1　　D. 0，1 或 -1

2. 在 $\triangle ABC$ 中，“$A>B$”是“$\cos A<\cos B$”的(　　)

A. 充分不必要条件　　B. 必要不充分条件

C. 充要条件　　D. 既不充分也不必要条件

3. 已知 p 是 r 的充分不必要条件，s 是 r 的必要条件，q 是 s 的必要条件，那么 p 是 q 成立的(　　)

A. 充分不必要条件　　B. 必要不充分条件

C. 充要条件　　D. 既不充分也不必要条件

4. 设 $A=\{(x,y)\mid y=\sqrt{9-x^2}\}$，$B=\{(x,y)\mid y=x+a\}$. 若 $A\cap B\supsetneqq\varnothing$，则实数 a 满足条件是(　　)

A. $|a|\leqslant 3\sqrt{2}$　　B. $|a|\leqslant 3$

C. $-3\leqslant a\leqslant 3\sqrt{2}$　　D. $3\leqslant a\leqslant 3\sqrt{2}$

5. 命题“若 $a>b$，则 $a-8>b-8$”的逆否命题是(　　)

A. 若 $a<b$，则 $a-8<b-8$　　B. 若 $a-8>b-8$，则 $a>b$

C. 若 $a\leqslant b$，则 $a-8\leqslant b-8$　　D. 若 $a-8\leqslant b-8$，则 $a\leqslant b$

6. 定义：$A-B=\{x\mid x\in A, x\notin B\}$，若 $M=\{1,2,3,4,5,6\}$，$N=\{2,3,6,8\}$，则 $M-N$ 等于(　　)

A. M　　B. N

C. $\{1,4,5\}$　　D. $\{6\}$

7. 设集合 $M=\{x|x>2\}$，$P=\{x|x<3\}$，那么“$x\in M$ 或 $x\in P$”是“$x\in M\cap P$”的(　　)

A. 充分不必要条件　　　　B. 必要不充分条件

C. 充要条件　　　　D. 既不充分也不必要条件

8. 设 $A=\{0,1\}$，且 $B=\{P|P\subseteq A\}$，则集合 A、B 的关系为 A ______ B.

9. 设 P 是一个数集，且至少含有两个数，若对任意 a、$b\in P$，都有 $a+b\in P$，$a-b\in P$，$ab\in P$，$\frac{a}{b}\in P$(除数 $b\neq 0$)，则称 P 是一个数域. 例如有理数集 Q 是数域；数集 $F=\{a+b\sqrt{2}|a,b\in Q\}$ 也是数域. 有下列命题：①整数集是数域；②若有理数集 $Q\subseteq M$，则数集 M 必为数域；③数域必为无限集；④存在无穷多个数域. 其中正确的命题的序号是______.(把你认为正确的命题的序号都填上)

10. 已知命题 p：方程 $x^2+mx+1=0$ 有两个不相等的负实根；

命题 q：方程 $4x^2+(m-2)x+1=0$ 无实根；若“p 或 q”为真，“p 且 q”为假，求实数 m 的取值范围.

第二讲
函数的图象与性质

一 主干知识整合

函数的性质	1. 函数的定义域:自变量取值形成的集合. 2. 函数的对应法则:联系自变量和因变量之间的对应关系. 3. 函数的值域:自变量的象(函数值)形成的集合. 4. 函数的单调性: ①函数在区间(a,b)上单调递增是指:对于任意的$a<x_1<x_2<b$,都有$f(x_1)<f(x_2)$; 函数在区间(a,b)上单调递减是指:对于任意的$a<x_1<x_2<b$,都有$f(x_1)>f(x_2)$. ②单调性是函数的局部性质. ③用定义证明函数单调性的步骤:取值(在区间上任取两个自变量值)、作差、定号(利用配方或因式分解)、下结论. ④导数与单调性的关系: 如果非常数函数$y=f(x)$在某个区间内可导,那么若$f'(x)\geqslant 0\Leftrightarrow f(x)$为增函数;若$f'(x)\leqslant 0\Leftrightarrow f(x)$为减函数(若存在使$f'(x)=0$的点,要求这些点不连续). ⑤复合函数的单调性只需研究两级复合,规律为:同增异减,但应注意定义域. 5. 函数的奇偶性 ①对于函数$f(x)$,其定义域关于原点对称,如果对定义域中的任意一个x都有$f(-x)=f(x)$,那么函数$f(x)$为偶函数;如果对定义域中的任意一个x都有$f(-x)=-f(x)$,那么函数$f(x)$为奇函数. ②奇偶性是函数的整体性质. ③奇函数的图象关于原点成中心对称;偶函数的图象关于y轴对称;奇函数在对称区间上的单调性相同,偶函数在对称区间上的单调性相反. ④奇函数$f(x)$如果在$x=0$处有定义,则$f(0)=0$. ⑤若函数$y=f(x)$满足:$f(a+x)=f(b-x)$(其中a,b是常数)对任意实数x成立,则其图象关于直线$x=\frac{a+b}{2}$对称;若函数$y=f(x)$满足:$f(a+x)=-f(b-x)$(其中a,b是常数)对任意实数x成立,则其图象关于点$\left(\frac{a+b}{2},0\right)$对称.(奇偶函数分别是上述规律的特例,即$a=b=0$时的情况) 5. 周期性: (1)周期函数的定义:对于定义域内的任意x都有$f(x+T)=f(x)$,则T为函数的周期.如果在函数的周期中存在一个最小的正数T_0,则称T_0为函数的最小正周期. (2)判断周期性的几种常见方法: ①函数$f(x)$满足:$f(x+a)=f(x-b)$,则$T=a+b$是$f(x)$的周期; ②函数$f(x)$满足:$f(x+a)=-f(x)$,则$T=2a$是$f(x)$的周期; ③函数$f(x)$满足:$f(x+a)=\frac{1}{f(x)}$,则$T=2a$是$f(x)$的周期;

续表

函数图象	1. 作函数图象的方法：描点法、变换法. 2. 常用变换方法： (1)平移变换： ①$y=f(x)\to y=f(x+a)$：把函数 $y=f(x)$ 的图象沿 x 轴方向向左($a>0$)或向右($a<0$)平移 $\|a\|$ 个单位； ②$y=f(x)\to y=f(x)+a$：把函数 $y=f(x)$ 的图象沿 y 轴方向向上($a>0$)或向下($a<0$)平移 $\|a\|$ 个单位； (2)伸缩变换： ①$y=f(x)\to y=f(ax)(a>0)$：把函数 $y=f(x)$ 的图象上所有点的纵坐标不变，横坐标变为原来的 $\frac{1}{a}$ 倍； ②$y=f(x)\to y=af(x)(a>0)$：把函数 $y=f(x)$ 的图象上所有点的横坐标不变，纵坐标变为原来的 a 倍； (3)对称变换： ①$y=f(x)$ 与 $y=f(-x)$ 的图象关于 y 轴对称； ②$y=f(x)$ 与 $y=-f(x)$ 的图象关于 x 轴对称； ③$y=f(x)$ 与 $y=-f(-x)$ 的图象关于原点对称； ④若 $y=f(x)$ 存在反函数，则 $y=f(x)$ 与 $y=f^{-1}(x)$ 的图象关于直线 $y=x$ 对称； ⑤$y=f(x-a)$ 与 $y=f(b-x)$ 的图象关于直线 $x=\frac{a+b}{2}$ 对称； ⑥$y=f(x-a)$ 与 $y=b-f(c-x)$ 的图象关于点$(\frac{a+c}{2},\frac{b}{2})$对称； ⑦$y=f(x)\to y=f(\|x\|)$：把 $y=f(x)$ 图象在 y 轴左侧部分去除，保留 $y=f(x)$ 图象在 y 轴右侧部分，并把右侧部分关于 y 轴对称到左侧得到(因为 $y=f(\|x\|)$ 为偶函数，所以只要得到其在 y 轴一侧的图象便可以得到另一侧的图象；或根据 $f(\|x\|)=\begin{cases}f(x)(x\geqslant 0)\\ f(-x)(x<0)\end{cases}$ 作图. ⑧$y=f(x)\to y=\|f(x)\|$：保留 $y=f(x)$ 图象在 x 轴上及其上方部分，并把下方部分关于 x 轴对称到上方得到.

二　典型方法提炼

1. 利用定义判定函数的单调性、奇偶性、周期性；
2. 利用单调性求最值，综合利用函数性质解题；
3. 利用奇、偶函数的图象特征可以反过来判定函数的奇偶性；
4. 识别函数图象可以结合函数的性质，以及运用特殊点，反过来也可以运用函数的图象辅助解题(如分类讨论、求参数范围等).

三　典型例题讲解

例 1　已知函数 $f(x)=a-\frac{1}{2^x+1}$，若 $f(x)$ 为奇函数，则 $a=$________.

思路点拨

抓住奇函数的定义，也可以利用奇函数在 0 点有定义时，$f(0)=0$ 迅速求解.

规律技巧提炼

例 2 函数 $y=a^{2x}+2a^x-1(a>0,a\neq1)$ 在区间 $[-1,1]$ 上的最大值为 14，求 a 的值.

思路点拨

利用换元法可以把问题转化二次函数的相关问题，但应注意定义域的变化以及对参数的讨论.

规律技巧提炼

例 3 设函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上满足 $f(2-x)=f(2+x)$，$f(7-x)=f(7+x)$，且在闭区间 $[0,7]$ 上，只有 $f(1)=f(3)=0$.

(1)试判断函数 $y=f(x)$ 的奇偶性；

(2)试求方程 $f(x)=0$ 在闭区间 $[0,2010]$ 上的根的个数，并证明你的结论.

思路点拨

$f(2-x)=f(2+x)$，$f(7-x)=f(7+x)$ 说明函数图象有两条对称轴，所以函数必为周期函数，对于(2)可以先考虑一个周期上的根的个数，再整体考虑. 而对(1)可以通过反例加以否定.

规律技巧提炼

【备选题】已知 $f(x)=\dfrac{2x-a}{x^2+2}(x\in\mathbf{R})$ 在区间 $[-1,1]$ 上是增函数.

(1)求实数 a 的值组成的集合 A；

(2)设关于 x 的方程 $f(x)=\dfrac{1}{x}$ 的两个非零实根为 x_1、x_2. 试问：是否存在实数 m，使得不等式 $m^2+tm+1\geqslant|x_1-x_2|$ 对任意 $a\in A$ 及 $t\in[-1,1]$ 恒成立？若存在，求 m 的取值范围；若不存在，请说明理由.

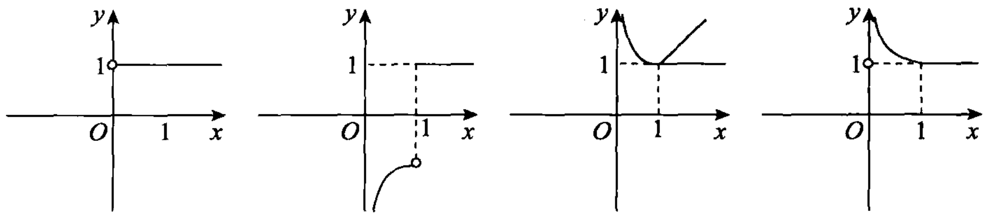
思路点拨

当用定义研究函数单调性比较困难时，要适时使用导数这一研究函数单调性的有力工具.

规律技巧提炼

四　课堂方法落实

1. 函数 $y=e^{|\ln x|}-|x-1|$ 的图象大致是(　　)



A　　　B　　　C　　　D

2. 设函数 $f(x)(x\in\mathbf{N})$ 表示 x 除以 3 所得的余数，则对于 $\forall x,y\in\mathbf{N}$，都有(　　)

A. $f(x+3)=f(x)$　　　B. $f(x+y)=f(x)+f(y)$

C. $f(3x)=3f(x)$　　　D. $f(xy)=f(x)f(y)$

3. 已知 $x\geqslant0,y\geqslant0$，且 $x+2y=1$，则 $2x+y^2$ 的取值范围是________.

4. 对于函数 $f(x)$ 定义域中任意的 $x_1,x_2(x_1\neq x_2)$，有如下结论：

①$f(x_1+x_2)=f(x_1)f(x_2)$；②$f(x_1x_2)=f(x_1)+f(x_2)$；③$\dfrac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}>0$；

④$f\left(\dfrac{x_1+x_2}{2}\right)<\dfrac{f(x_1)+f(x_2)}{2}$. 当 $f(x)=\lg x$ 时，上述结论中正确结论的序号是________.

五　课后限时训练

1. 下列函数既是奇函数，又在区间$[-1,1]$上单调递减的是(　　)

A. $f(x)=\sin x$　　　B. $f(x)=-|x+1|$

C. $f(x)=\dfrac{1}{2}(a^x+a^{-x})$　　　D. $f(x)=\ln\dfrac{2-x}{2+x}$

2. 设 $f(x)=\begin{cases}2e^{x-1},x<2,\\ \log_3(x^2-1),x\geqslant2.\end{cases}$ 则 $f(f(2))$ 的值为(　　)

A. 0　　　B. 1　　　C. 2　　　D. 3

3. 已知函数 $y=f(x)$ 是定义在 $\mathbf{R}$ 上的减函数，则 $f(x)=1$ 的根(　　)

A. 有且只有一个　　　B. 有 2 个

C. 至多有 1 个　　　D. 以上都不正确

4. 已知定义域为 $\mathbf{R}$ 的函数 $f(x)$ 在$(2,+\infty)$上为减函数，且函数 $y=f(x+2)$ 为偶函数，则(　　)

A. $f(0)>f(1)$　　　B. $f(0)>f(3)$

C. $f(1)>f(3)$　　　D. $f(0)>f(5)$

5. 已知函数 $f(x)=\log_a(\sqrt{x^2+1}-x)$，若 $f(m)=n$ 则 $f(-m)$ 等于(　　)

A. n　　　B. $-n$　　　C. $\dfrac{1}{n}$　　　D. $-\dfrac{1}{n}$

6. 函数 $y=x+\dfrac{1}{x}$ 的定义域为$(0,3)$，则值域为________.

7. 已知函数 $y=f(x)$ 是 $\mathbf{R}$ 上的减函数，$A(0,-3)$、$B(-2,3)$ 是其图象上的两点，那么不等式 $|f(x-2)|\geqslant3$ 的解集是________.

8. 已知奇函数 $f(x)$ 满足 $f(x+2)=-f(x)$，且当 $x\in(0,1)$ 时，$f(x)=2^x$，则 $f(log_{\frac{1}{2}}18)$ 的值为________.

9. 已知函数 $f(x)$ 的定义域为 $\mathbf{R}$，对任意实数 m,n 都有 $f(m+n)=f(m)+f(n)+\frac{1}{2}$，且 $f\left(\frac{1}{2}\right)=0$，当 $x>\frac{1}{2}$ 时，$f(x)>0$.

(1)求 $f(1)$；

(2)求和 $f(1)+f(2)+\cdots+f(n)(n\in\mathbf{N}^*)$；

(3)判断函数 $f(x)$ 的单调性并证明.

10. 已知定义在 $[-1,1]$ 上的奇函数 $f(x)$，且 $f(1)=1$，若 $a,b\in[-1,1]$，且 $a+b\neq0$ 时，总有 $(a+b)[f(a)+f(b)]>0$.

(1)试判定 $f(x)$ 在 $[-1,1]$ 上的单调性，并证明你的结论；

(2)解不等式 $f\left(x+\frac{1}{2}\right)<f\left(\frac{1}{x-1}\right)$；

(3)若 $f(x)\leqslant m^2-2ma+1$ 对所有 $a\in[-1,1]$ 恒成立，求实数 m 的范围.