为中等水平以上考生报考中华名校而作

丛书主编：希 扬

适用于3+x、3+2、3+综合等模式

发散思维

在高考的最高点审视　从考点的最深处剖析

北大考典

数 学

- 内容厚重
- 视野开阔
- 见解深刻
- 方法卓越

主编：源 流

修订本

北京大学出版社

高考名题、新题、动向题
分类发散思维训练

北大考典

数　学

（修订本）

源　流　主编
王惠英　副主编

北京大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

北大考典·数学/源流主编. —北京:北京大学出版社,2001.8
ISBN 7-301-04976-5

Ⅰ.北… Ⅱ.源… Ⅲ.数学课-高中-试题-升学参考资料
Ⅳ.G632.479

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2001)第 027604 号

书　　名:北大考典·数学(修订本)
著作责任者:源流　主编
责 任 编 辑:王国义
标 准 书 号:ISBN 7-301-04976-5/G·0651
出 版 发 行:北京大学出版社
地　　址:北京市海淀区中关村 北京大学校内　100871
网　　址:http://cbs.pku.edu.cn　电子信箱:zpup@pup.pku.edu.cn
电　　话:发行部 62754140　邮购部 62752019　编辑部 62757146
排 印 者:世界知识印刷厂
经 销 者:新华书店
890 毫米×1240 毫米　A5 开本　16.5 印张　665 千字
2002 年 5 月第 2 版　2002 年 6 月第 2 次印刷
定　　价:21.00 元

《北大考典》丛书编委会

融《北大考典》精华　登中华名校殿堂

——《北大考典》(修订本)序

希扬　源流

经过长达数月的精心修订,《北大考典》(修订本)以崭新的面貌与广大读者见面了。

《北大考典》出版一年来,以其独特的魅力,深受广大读者的喜爱,并已跻身教辅书精品的行列。

修订后的《北大考典》以最新的大纲、考纲为依据,与试验本(最新修改)教材同步,汇集了2001年高考后及近年来的高考名题、新题与动向题,将其分类运用发散思维进行解题训练。它瞄准高考命题范围,传递高考信息,揭示高考规律,强化思维训练,是一部"准确、规范、快捷、高效",用最短的时间获取最佳复习效果的高考复习用书。

备战高考,本考典精选考题,以题为载体,以题引路,借题发挥。重在激活思维,打开思路,点拨解法,培养能力,提高整体素质。运用发散思维的科学方法,对本考典中精选的具有代表性和权威性的考题进行解题训练,使学生眼界开阔,提高综合应用、应变和实战能力。

本套丛书有如下显著特色:

一、新角度

本考典新在解题的角度,新在运用发散思维的科学方法进行解题训练。发散思维,即求异思维,它的最大特色是思维的多向性。这种思维方式,在解题时注重多思路、全方位、异途径、多方式;它对同一个问题,从不同方向、不同侧面、不同层次横向拓展,逆向深化,分解剖析,归纳整理。通过这样的解题训练,可激发学生思维的悟性,达到开启心扉、挖掘潜能、增强智慧、提高分析、解决实际问题的能力。

二、广范围

本考典涵盖多种模式的教材内容，它普遍适用于“3+X”、“3+2”、“3+综合”等多种高考模式。其例题典型新颖，精讲巧析，深入浅出，依纲扣本，内容丰富。它强化基础知识训练，突出重点，注重联系，揭示规律。

三、多层次

本考典分别以高考名题、新题、动向题等三种“高考模型题”分类展开发散思维训练。

名题，指知识含量高，具有典型价值的有代表性的试题，如高考的必考题、常考题、热点问题的考题等。

新题，指近年来高考新增加的加强应用意识的考题，以及新增加内容的有学科价值和应用功能的考题，如立意题、情境题、题型新的考题等。

动向题，指体现高考改革方向和命题趋势的考题，如遵循但不拘泥于教学大纲的发展题，在思维的“最近发展区”考查学生学习潜能的考题，以及在知识网络的交汇点配置的情境新颖的考题，等等。

四、严要求

本考典栏目的设计，体现出对训练的严格要求。

“高考重点要求”栏目，指明了主要的考试目标与能力目标；“知识网络示意”，指知识点、考点的知识结构系统化；“典型考题发散”，指按高考名题、新题、动向题的分类进行的发散思维训练；“能力素质训练”，是在一定数量基础题训练后增加适量的综合题、应用题、探究题，以提高考生的综合素质和分析问题、解决问题的能力。最后又精编了数套高考模拟试题供实战训练。

《北大考典》是一套高水平的应试考典。它在高考的最高点审视，从考点的最深处剖析，内容厚重，视野开阔，见解深刻，方法卓越；它架起了考生走向中华名校的桥梁，是中等及中等以上水平的考生报考中华名校的最佳选择。

龙腾四海，凤舞九天。

愿《北大考典》助你上中华名校！

2002年5月

目　　录

第一篇　思维能力训练

第二篇　高考模拟试题

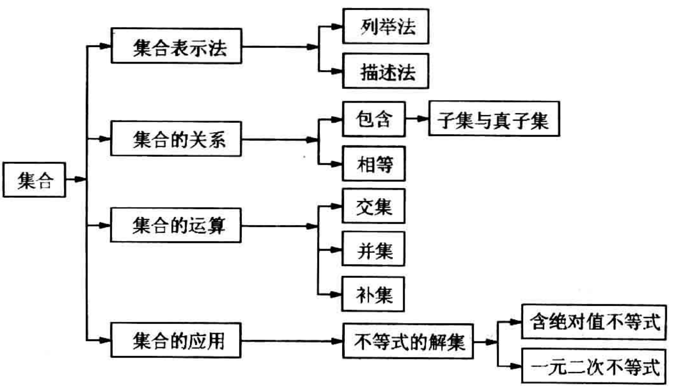
第一篇　思维能力训练

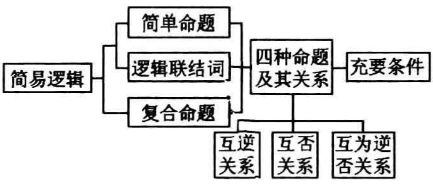
第一章　集合与简易逻辑

高考重点要求

1. 理解集合、子集、交集、并集、补集的概念.
2. 了解空集和全集的意义.
3. 了解属于、包含、相等关系的意义.
4. 掌握有关的术语和符号,并会用它们正确表示一些简单的集合.
5. 掌握简单的绝对值不等式和一元二次不等式的解法.
6. 理解逻辑联结词“或”、“且”、“非”的含义.
7. 了解命题的概念和命题的构成.
8. 理解四种命题及其相互关系.
9. 理解充要条件的意义.理解充分条件、必要条件、充要条件、充分不必要条件、必要不充分条件、既不充分又不必要条件.

知识网络示意





知识点、重点、难点

本章共有10个知识点：集合、子集、补集、交集、并集、逻辑联结词、四种命题、充要条件、绝对值不等式、一元二次不等式.

本章以集合、绝对值不等式、一元二次不等式、命题、四种命题、充要条件、逻辑联结词等主要内容展开发散思维训练.要掌握与上述发散点有关的知识内容，进行发散思维训练，必须首先研究本章的基本数学思想和方法，即集合的思想，转化的思想和方法，形与数互相结合、互化转化的思维方法.

集合论是近、现代数学的一个重要的基础，它所反映的数学思想，在越来越广泛的领域中得到应用.

逻辑是研究思维形式及其规律的一门基础学科.学习数学，需要全面地理解概念，正确地进行表述、判断和推理，由此更需掌握运用逻辑知识.集合的初步知识与简易逻辑知识是学习、掌握和使用数学语言的基础，故将它们置于高中数学的开篇位置尤为重要.

本章重点是集合的有关知识与简易逻辑知识.

本章难点是对“或”的含义的理解及关于充要条件的判断，充分条件和必要条件清楚地揭示了命题的条件和结论的逻辑关系，用它来指导证明数学题可以少走很多弯路.为了证明一个命题的结论为真，只要找到使这个命题成立的一个充分条件即可.而要想否定这个命题是真的，只要找到使这个命题的一个必要条件不成立就可以了.由此可以看出充分条件、必要条件和充要条件在数学证明中所起的重要作用.它能使我们证题时化难为易，直通捷径.

典型考题发散

1.1 集合

(一) 名题发散

【名题1】 (2001年全国春季高考北京、安徽、内蒙古试题)

集合 $M=\{1,2,3,4,5\}$ 的子集个数为(　　).

A. 32　　B. 31　　C. 16　　D. 15

分析 1　用分类讨论法.

解法 1　M 的子集分别有：

含有 1 个元素的子集有 5 个；含有 2 个元素的子集有 10 个；含有 3 个元素的子集有 10 个；含有 4 个元素的子集有 5 个；含有 5 个元素的子集有 1 个；含有空集子集 1 个，所以 M 中共含有子集 32 个. 故本题应选 A.

分析 2　用直接法.

解法 2　$\because\ 2^5=32$，故本题应选 A.

▲警示误区

错解　选 B.

辨析　忽略了任何一个集合，自己是自己的子集，从而产生遗漏.

【名题 2】　设集合 $A=\{x\mid -2\leqslant x\leqslant 5\}$，$B=\{x\mid m+1\leqslant x\leqslant 2m-1\}$，若 $B\subseteq A$，求实数 m 的取值范围.

解　当 $B=\varnothing$ 时，$B\subseteq A$ 成立，

这时，$m+1>2m-1$，$\therefore\ m<2$；

当 $B\neq\varnothing$ 时，要使 $B\subseteq A$，必须满足

$$\begin{cases} m+1\leqslant 2m-1, \\ m+1\geqslant -2, \\ 2m-1\leqslant 5, \end{cases} \qquad \therefore \begin{cases} m\geqslant 2, \\ m\geqslant -3, \\ m\leqslant 3, \end{cases} \quad \therefore\ 2\leqslant m\leqslant 3.$$

综上所述，得 m 范围为 $m<2$ 或 $2\leqslant m\leqslant 3$，即 $m\leqslant 3$.

▲警示误区

错解　由题意，$\because\ B\subseteq A$，

$$\therefore \begin{cases} m+1\geqslant -2, \\ 2m-1\leqslant 5, \end{cases} \quad \therefore \begin{cases} m\geqslant -3, \\ m\leqslant 3. \end{cases} \quad 即 -3\leqslant m\leqslant 3.$$

辨析　以上解法错在考虑不周. 由于空集 $\varnothing$ 是任何集合的子集，

$\therefore\ B=\varnothing$ 和 $B\neq\varnothing$ 时均有可能存在 m 符合条件.

【题型发散】

发散 1　选择题

(1)（2001 年武汉市高考模拟试题）

如果集合 $M=\{a^2,a+1,-3\}$，$N=\{a-3,2a-1,a^2+1\}$，若 $M\cap N=\{-3\}$，则 a 的值是(　　).

A. -1　　B. 0　　C. 1　　D. 2

分析　用直接法.

解　由题意　　$a-3=-3$　　①

或　　$2a-1=-3$　　②

解①得 $a=0$，这时 $M\cap N=\{-3,1\}$ 不合题意，舍去. 解②得 $a=-1$.

故本题应选 A.

(2) 集合 $M=\left\{x\left|x=\frac{k\pi}{2}+\frac{\pi}{4},k\in\mathbf{Z}\right.\right\}$, $N=\left\{x\left|x=\frac{k\pi}{4}+\frac{\pi}{2},k\in\mathbf{Z}\right.\right\}$, 则 ( ).

A. $M=N$ B. $M\supset N$ C. $M\subset N$ D. $M\cap N=\varnothing$

分析 用特殊值法.

解 分别令 $k=\cdots,-1,0,1,2,3,\cdots$, 得

$$M=\left\{\cdots,-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4},\frac{3\pi}{4},\frac{5\pi}{4},\frac{7\pi}{4},\cdots\right\},$$

$$N=\left\{\cdots,\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{4},\pi,\frac{5\pi}{4},\cdots\right\}.$$

易见, $M\subset N$, 故本题应选 C.

发散 2 填空题

设 m、n 为自然数, $m>n$, 集合 $A=\{1,2,3,\cdots,m\}$, 集合 $B=\{1,2,3,\cdots,n\}$, 满足 $B\cap C\neq\varnothing$ 的 A 的子集 C 共有________个.

解 由 A 的子集为 2^m 个, 由 $\{n+1,n+2,\cdots,m\}$, 这 $m-n$ 个元素构成的是 2^{m-n} 个子集, 因为 $B\cap C\neq\varnothing$, 则 C 共有 2^m-2^{m-n} 个.

【综合发散】

发散题 已知 $A=\{x\mid x^3+2x^2-x-2>0\}$, $B=\{x\mid x^2+ax+b\leqslant 0\}$, $A\cup B=\{x\mid x+2>0\}$, $A\cap B=\{x\mid 1<x\leqslant 3\}$, 求实数 a,b 的值.

分析 利用集合 $A,A\cup B,A\cap B$, 确定集合 B; 不等式解集的边界是相应方程的解.

解 $x^3+2x^2-x-2>0$, 可得 $(x-1)(x+1)(x+2)>0$.

$\therefore A=(-2,-1)\cup(1,+\infty)$.

由 $B=\{x\mid x^2+ax+b\leqslant 0\}$, 设 $B=[x_1,x_2]$.

$\because A\cup B=(-2,+\infty)$, $A\cap B=(1,3]$,

$\therefore B=[-1,3]$. 从而 $x_1=-1,x_2=3$.

由根与系数的关系

$$a=-(x_1+x_2)=-2,\quad b=x_1x_2=-3.$$

【指点迷津】 正确理解集合的有关概念以及集合之间的包含、相等关系, 同时善于将集合与集合的关系转化为元素与元素或元素与集合的关系, 是确定 a、b 的取值的范围和关键.

(二) 新题发散

【新题 1】 设 $A=\{(x,y)\mid y^2=x+1\}$, $B=\{(x,y)\mid 4x^2+2x-2y+5=0\}$, $C=\{(x,y)\mid y=kx+b\}$, 是否存在非负整数 k,b, 使 $(A\cup B)\cap C=\varnothing$? 证明你的结论.

解 要使 $(A\cup B)\cap C=(A\cap C)\cup(B\cap C)=\varnothing$, 须 $A\cap C=\varnothing$, 且 $B\cap C=$

$\varnothing$.

由 $\begin{cases} y^2=x+1, \\ y=kx+b \end{cases}$ 可得 $k^2x^2+(2kb-1)x+b^2-1=0$.

当 $k=0$ 时，有解 $x=b^2-1$，不合题设要求；

当 $k\neq 0$ 时，$\Delta_1=(2kb-1)^2-4k^2(b^2-1)<0$，从而

$$b>\frac{4k^2+1}{4k}. \qquad ①$$

由 $\begin{cases} 4x^2+2x-2y+5=0, \\ y=kx+b \end{cases}$ 可得　$4x^2+2(1-k)x+5-2b=0$.

由
$$\Delta_2=4(1-k)^2-16(5-2b)<0$$
得
$$b<\frac{20-(k-1)^2}{8}.$$

这时如直接由①，②得

$$\frac{4k^2+1}{4k}<\frac{20-(k-1)^2}{8};$$

则得到一个一元三次不等式，大部分同学至此会受阻. 其实，只要我们注意到

$$\frac{4k^2+1}{4k}=k+\frac{1}{4k}\geqslant 1, \qquad \frac{20-(k-1)^2}{8}\leqslant\frac{20}{8},$$

就可得 $1<b<\frac{20}{8}$，得 $b=2$，将 $b=2$ 代入①，②两式，可得

$$1-\frac{\sqrt{3}}{2}<k<1+\frac{\sqrt{3}}{2},$$

故 $k=1$.

【新题 2】　已知 $A=\{x\mid x^2-2ax+(4a-3)=0, x\in\mathbf{R}\}$，又 $B=\{x\mid x^2-2\sqrt{2}ax+a^2+a+2=0, x\in\mathbf{R}\}$，是否存在实数 a，使得 $A\cup B=\varnothing$? 若存在求 a 的值；若不存在，说明理由.

分析　$A\cup B=\varnothing\Leftrightarrow A=B=\varnothing$，设 $x^2-2ax+(4a-3)=0$，$x^2-2\sqrt{2}ax+a^2+a+2=0$ 的判别式依次为 Δ_1，Δ_2，则 $\Delta_1<0$，且 $\Delta_2<0$.

解　假设存在实数 a，使得 $A\cup B=\varnothing$. $\therefore A=B=\varnothing$.

即 $\begin{cases} \Delta_1<0, \\ \Delta_2<0. \end{cases}$

$\therefore \begin{cases} 4a^2-4(4a-3)<0, \\ 8a^2-4(a^2+a+2)<0. \end{cases}$　$\therefore \begin{cases} 1<a<3, \\ -1<a<2. \end{cases}$

$\therefore 1<a<2$. 即实数 $a\in(1,2)$ 时，$A\cup B=\varnothing$.

【指点迷津】

(1)【新题 1】、【新题 2】的题型是探究题，这种题型对学生的创造性思维品质的培养具有特殊的意义，在近几年的高考数学试题中经常出现这种题型.

(2) 由已知条件探究相应的结论，或由给定的结论反溯应具备的条件(即由

因探果或由果探因).或者有意改变题设或结论的某个部分,考查整个命题会产生什么变化等等,这种题型通常称为探究题.

【转化发散】

发散 1 若 $A=\{x\mid |x^2-2x|\leqslant x\}$,

$B=\left\{x\,\middle|\,\left|\frac{x}{1-x}\right|\leqslant\frac{x}{1-x}\right\}$,

$C=\{x\mid ax^2+x+b<0\}$,

若 $(A\cup B)\cap C=\varnothing$, $(A\cup B)\cup C=\boldsymbol{R}$,求实数 a,b 的值.

分析 将 $(A\cup B)\cap C=\varnothing$ 及 $(A\cup B)\cup C=\boldsymbol{R}$ 转化为 $C=C_{\boldsymbol{R}}(A\cup B)$.

解 $A=\{x\mid 1\leqslant x\leqslant 3$ 或 $x=0\}$, $B=\{x\mid 0\leqslant x<1\}$,

$\therefore A\cup B=\{x\mid 0\leqslant x\leqslant 3\}$.

由题设知 $C=C_{\boldsymbol{R}}(A\cup B)=\{x\mid x<0$ 或 $x>3\}$,而 $C=\{x\mid ax^2+x+b<0\}$,因此 $a<0$, $\therefore a=-\frac{1}{3}$, $b=0$.

发散 2 若 $A=\{x\mid x^2+px+q=0\}$, $B=\{x\mid x^2-3x+2=0\}$, $A\cup B=B$,求 p,q 满足的条件.

分析 这是已知两集合的并,求参数满足的条件,应注意将 $A\cup B=B$ 转化为 $A\subseteq B$.

解 $\because B=\{1,2\}$,而 $A\cup B=B$, $\therefore A\subseteq B$.

(1) $A=\{1,2\}$ 时, $p=-3, q=2$;

(2) $A=\{1\}$ 时, $p=-2, q=1$;

(3) $A=\{2\}$ 时, $p=-4, q=4$;

(4) $A=\varnothing$ 时, $p^2<4q$.

【解法发散】

发散题 设 a,b 是两个实数,

$$A=\{(x,y)\mid x=n, y=na+b, n\in\boldsymbol{Z}\},$$
$$B=\{(x,y)\mid x=m, y=3(m^2+5), m\in\boldsymbol{Z}\},$$
$$C=\{(x,y)\mid x^2+y^2\leqslant 144\}.$$

A,B,C 是平面 xOy 内的点集,讨论是否存在 a 和 b,使得: $A\cap B\neq\varnothing$ 且 $(a,b)\in C$.

解法 1 此题等价于方程组:

$$\begin{cases} na+b=3(n^2+5), & ① \\ a^2+b^2\leqslant 144, & ② \end{cases}$$

该方程组是否有解.

易知:①式表示直线,②式表示圆盘面,因此方程组有解的充要条件为直线与圆盘面有公共点,故

$$d=\frac{3(n^2+5)}{\sqrt{n^2+1}}\leqslant 12.$$

$\therefore\ (n^2+5)^2\leqslant 16(n^2+1).$

整理，得 $n^4-6n^2+9\leqslant 0$，$\therefore\ (n^2-3)^2\leqslant 0.$

但$(n^2-3)^2\geqslant 0$，$\therefore\ n^2=3$. 这与 $n\in\mathbf{Z}$ 矛盾，可见符合条件的 a,b 不存在.

解法 2 用反证法.

假设存在实数 a,b，使得 $A\cap B\neq\varnothing$ 且$(a,b)\in C$ 同时成立，则

$\begin{cases}3n^2+15=na+b,\\ a^2+b^2\leqslant 144,\end{cases}$ 有解.

$\because\ (3n^2+15)^2=(na+b)^2\leqslant(n^2+1)(a^2+b^2)\leqslant 144(n^2+1)$，

$\therefore\ 9(n^4+10n^2+25)-144(n^2+1)\leqslant 0$，即 $9(n^2-3)^2\leqslant 0$，从而 $n^2=3$.

这与 $n\in\mathbf{Z}$ 矛盾. 表明满足条件的 a,b 是不存在的.

【综合发散】

发散 1 在一次数学竞赛中共出甲、乙、丙三题，在所有 25 个参加的学生中，每个学生至少解出一题；在所有没有解出甲题的那些学生中，解出乙题的人数是解出丙题人数的 2 倍；只解出甲题的学生比余下的学生中解出甲题的人数多 1；只解出一题的学生中，有一半没有解出甲题. 问共有多少个学生只解出乙题？

分析 设解出甲、乙、丙各题学生的集合分别是 A,B,C，并用三个圆分别表示，则重叠部分表示同时解出两题或三题的学生的集合. 这样得到七个部分，其人数分别用 a,b,c,d,e,f,g 加以表示(如图 1-1).

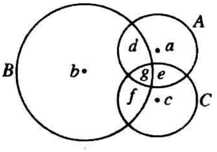


图 1-1

解 由于每个学生至少解出一题，

$\therefore\ a+b+c+d+e+f+g=25.$ ①

由于没有解出甲题的那些学生中，解出乙题的人数是解出丙题人数的 2 倍，

$\therefore\ b+f=2(c+f).$ ②

由于只解出甲题人数比余下的学生中解出甲题的人数多 1，

$\therefore\ a=d+e+g+1.$ ③

由于只解出一题的学生中，有一半没有解出甲题，

$\therefore\ a=b+c.$ ④

由②得 $b=2c+f$，$f=b-2c$. ⑤

以⑤代入①消去 f 得，

$$a+2b-c+d+e+g=25. \quad ⑥$$

以③，④分别代入⑥得，

$$2b-c+2d+2e+2g=24, \quad ⑦$$