普通高等教育“十一五”国家级规划教材

数学物理方法

第三版

刘连寿 王正清 李高翔 编

高等教育出版社
HIGHER EDUCATION PRESS

内容简介

本书是在第二版的基础上,吸取最新的教学经验并结合新时期教学要求修订而成的。此次修订,保留了第二版的一些特点,诸如着重通过和实变函数性质的对比讲述复变解析函数的性质,以解方程的方法系统讲述数学物理方程等等。同时,对第二版中的一些内容作了适当调整和增减。例如,在数理方程部分,重点突出了“分离变量法”、“积分变换法”、“格林函数法”和“泛函方法”等四种求解方程的基本方法;增加了“小波变换”、“坐标系的紧致化”和“拓扑与非拓扑孤子”等在物理学习中有重要应用的内容。

本书可作为高等院校物理类专业数学物理方法课程的教材,也可供有关专业的研究生、教师和科技人员参考。

图书在版编目(CIP)数据

数学物理方法/刘连寿,王正清,李高翔编.—3版.—北京:高等教育出版社,2011.6

ISBN 978-7-04-031529-5

Ⅰ.①数… Ⅱ.①刘… ②王…③李… Ⅲ.①数学物理方法-高等学校-教材 Ⅳ.①O411.1

中国版本图书馆CIP数据核字(2011)第062592号

策划编辑	忻　蓓	责任编辑	李　茜	封面设计	张申申	版式设计	马敬茹
责任绘图	杜晓丹	责任校对	陈旭颖	责任印制	刘思涵		

出版发行	高等教育出版社	网　址	http://www.hep.edu.cn
社　址	北京市西城区德外大街4号		http://www.hep.com.cn
邮政编码	100120	网上订购	http://www.landraco.com
印　刷	国防工业出版社印刷厂		http://www.landraco.com.cn
开　本	787×960 1/16		
印　张	25.5	版　次	1990年9月第1版
字　数	470 000		2011年6月第3版
购书热线	010-58581118	印　次	2011年6月第1次印刷
咨询电话	400-810-0598	定　价	37.00元

本书如有缺页、倒页、脱页等质量问题,请到所购图书销售部门联系调换

物 料 号　31529-00

第三版前言

自本书第二版问世以来又过了五年。在此期间，我国的国民经济迅速发展，社会对科技人才的培养提出了更高要求。数学物理方法是高等学校物理学、力学、电子通信、天文、气象等专业和许多现代工程技术专业的重要基础课，我们深感对第二版教材有加以认真修订、再版的必要。

第三版继承了第二版选材适当、安排合理、叙述生动、便于教学的特点，在系统安排上作了进一步的调整完善，并适当补充了一些当代物理和科技中广泛应用的内容，使之更加符合培养创新型人才的需要。

在复变函数部分，加强了对复变函数不同于实变函数的丰富、美妙性质的描述。正如第三版第一章引言中所述，学习实变函数的理论相当于在挡住我们视线的板上开了一条缝——实数轴，使我们看到了一些五颜六色的图案，但还看不到板所挡住的风景的全貌，产生很多疑问；而学习复变函数论帮我们将遮住视线的板全部拿开，让我们看到全平面上的美丽风景，使一些疑问迎刃而解。在第三版中进一步加强了这一方面的叙述，引导学生深入思考和理解复变函数的美妙性质。

在数理方程部分，继承了第二版以解方程的方法为主线的特点，并作了一些必要的调整。重点突出了“分离变量法”、“积分变换法”、“格林函数法”、“泛函方法”等四种基本方法。原书中列出的“几种特殊方法”——行波法、延拓法、保角变换法，则不再自成一章，而分散到有关章节中。这样，就使得重点更突出、眉目更清晰。

在第三版中着力加强了一些现代物理学和科学技术中广泛应用的内容。在“积分变换法”一章中加强了现代科技，特别是电子通信中应用广泛、发展迅速的“小波变换”；对于“非线性方程的单孤子解”原书作为“特殊方法”中的一节，显然不合适，现将它扩展成为独立的一章，并增加了在物理学中应用的例子；“泛函方法”在现代物理学的各个分支中均有广泛应用，第二版只将泛函的变分和里兹方法列为一章——“变分法”，而在本版中则将这一章扩展成为“泛函方法”，较全面地讲述了在物理学中导出泛函的一些例子；较仔细地讨论了泛函的泰勒展开、变分和变分导数以及泛函积分。而里兹方法则放在该章中作为泛函极值问题的一种近似方法。

第三版所采用的系统安排是否合理，所增加的内容以及一些具体问题的新

论述，如球坐标中由于坐标的拓扑紧致化导致在 $\theta=0,\pi$ 处出现奇点，是否确当，均望读者不吝指正。

在前两版中，对有些部分加了星号表示学时不够时可以删去。由于使用教材的单位情况复杂，难以作出统一规定。在第三版中删去了这些星号。在实际教学中，如何处理教材内容，由教师根据情况酌定。

本书第一、第二版系由华中师范大学刘连寿和三峡大学王正清合作编写，在此次修订过程中，三峡大学王正清教授承担了大量的任务，并着力进行了教材系统的调整完善。华中师范大学李高翔作为一名优秀的年轻教授，长期从事本课程的教学和量子光学的研究，对教材的修订提了许多关键性意见，并编写了梅林反演公式和拉普拉斯变换在计算级数求和及解常微分方程组中的应用等内容。他还将修订初稿在华中师范大学物理学基地班中试用，收集意见。第三版的修订是由刘连寿、王正清、李高翔三人通力合作完成的。

编　者

2009 年 10 月

第二版前言

本书第一版问世十多年以来，得到许多老师和同学的支持与帮助。他们的教学经验表明，本书在材料的选取、内容的安排和叙述的生动性方面有其特色，适合于教学。由于第一版的印数不多，不易购到，以致有些学校采用内部胶印的方式提供教学使用。因而我们感到有修订再版的必要。

这次再版，除了订正一些印刷错误以外，没有作很大的改动。特别是，保留了原书的特点：着重通过和实变函数性质的对比讲述复变解析函数的性质，按解方程的方法系统讲述数学物理方程。在内容上加强了关于鞍点和特殊函数的渐近表达式以及 Γ 函数的性质的讨论；补充了双曲贝塞尔函数、艾里方程、复平面上的拉普拉斯变换等在物理上有重要应用的内容。

20 世纪数学物理发展迅速，形成了许多新的分支。但是，复变函数和数学物理方程仍然是数学物理的重要基础，是物理专业及其他有关专业本科大学生必须具备的知识。因此，我们基本上保持了本书作为"数学物理方法"基础课教材的特点。数学物理的新发展也许可以留到一些选修课中解决。例如，有些学校开设"现代数学物理方法"选修课，已经积累了很好的经验。

我们愿借此再版的机会，对高等教育出版社和给本书提过宝贵意见的教师和同学表示衷心的感谢。书中的不当之处，恳切期望读者给予批评指正。

编　者

2003 年 6 月

第一版前言

数学物理方法是应用数学基础知识解决实际问题的方法.它所研究的内容除了与电动力学、量子力学等物理理论有紧密联系之外,还与弹性力学、流体力学、电气工程等问题有关。它是高等学校物理、力学、无线电、天文、气象等系及工程技术等专业学生的必修课程。它既讲数学基础,又讲物理方法,内容十分丰富。为了便于学习,本书在讲授复变函数论的基础上,着重讲授各种求解数学物理方程的方法。复变函数部分以解析函数的性质和留数定理的应用为重点;数理方程部分以分离变量法、积分变换法和格林函数法为重点。由于不同层次的学校要求不同,或受学时的限制,在使用本书时,可删去第十二章和第十三章,即使在前面各章节中,有些定理的证明及某些扩充性的知识,如模数原理、δ函数的某些性质等内容,也可酌情删减。这样处理不会影响本课程的教学。

本书在正式出版前曾于1982年由华中师大教材科铅印,有不少师范院校及专科学校多次使用,后又重印两次。在此期间不少教师和同学给本书提过宝贵意见,对于这次出版很有帮助。出版前经南开大学潘忠诚教授审阅并提出宝贵意见。谨在此致谢。

由于作者水平有限,错误和不妥之处在所难免,恳切希望读者批评指正。

编　者

1989年9月

郑重声明

目　录

第一章 复变函数论基础

本书前四章讲述复变函数论.它是求解数学物理方程和研究数学物理的重要基础.复变函数是自变量和因变量都是复数的函数.这意味着将函数的定义域和值域从一根直线——实数轴扩展到一个平面——复平面.这一扩展使得复变函数具有了实变量函数所不可比拟的丰富、美妙的性质.这就像我们的面前有漂亮的山水风景,却被一块板挡住了视线.过去我们在这块板上开了一条缝——实数轴,看到了一些五颜六色的图案,但还看不到风景的全貌,产生很多疑问.复变函数论帮我们将遮住视线的板全部拿开,让我们看到全平面上的美丽风景,使一些疑问迎刃而解.举一个简单例子.实变函数的幂级数展开有收敛区域$(-a,a)$,但在区域的两端点$x=\pm a$函数并没有奇异性.为什么当$|x|>a$级数就发散?令人费解.扩展到复平面后可以看到,原来在半径为a的圆周上函数的确有奇点,只不过不在实轴上。正是这一复平面上的奇点阻碍了级数收敛圆的扩大,决定了实变函数幂级数的收敛区域.学习前四章——复变函数论,特别要注意将它和实变函数的相应性质进行对比,体会复变函数的美妙特点.关于复数的性质和运算,本来在中学就大体学过.为了完整起见,本章第一节仍对它作了系统的讲述.学习时可以略去,仅备参考。

§1-1 复　　数

复变函数就是自变量取复数值的函数.在研究复变函数之前,我们先在这一节里复习一下复数的定义和运算,并讨论与复数的几何表示有关的一些问题.

(一) 复数的定义和运算

在实数范围内,一些简单的代数方程也可能没有根.例如方程

$$x^2+1=0$$

就没有实根,因为任何实数的平方都不等于-1.因此,有必要将“数”的概念加

以扩大.引进虚数单位 i,按定义

$$i^2=-1. \tag{1-1-1}$$

用 x 和 y 表示两个任意的实数,则具有形式

$$z=x+\mathrm{i}y \tag{1-1-2}$$

的 z 称为复数.

在式(1-1-2)中,实数 x 和 y 分别称为复数 z 的实部和虚部,记为 $\mathrm{Re}\,z$ 和 $\mathrm{Im}\,z$.

实部为零的复数 $0+\mathrm{i}y=\mathrm{i}y$ 称为纯虚数,简称为虚数;虚部为零的复数 $x+\mathrm{i}0=x$ 就是实数.实部和虚部都为零的复数称为复数 0:$0+\mathrm{i}0=0$.

两复数相等的充分必要条件是它们的实部和虚部分别相等.就是说,如果

$$x_1+\mathrm{i}y_1=x_2+\mathrm{i}y_2,$$

则必须且只需

$$x_1=x_2,\quad y_1=y_2.$$

因此,一个复数等式等效于两个实数等式.

复数的加减法和乘法是利用定义(1-1-1)按通常的代数运算法则进行运算.除法 $(x_1+\mathrm{i}y_1)/(x_2+\mathrm{i}y_2)$ 是将分母"实数化",其办法是分子分母同乘以 $(x_2-\mathrm{i}y_2)$,即

$$\begin{aligned}\frac{x_1+\mathrm{i}y_1}{x_2+\mathrm{i}y_2}&=\frac{x_1+\mathrm{i}y_1}{x_2+\mathrm{i}y_2}\cdot\frac{x_2-\mathrm{i}y_2}{x_2-\mathrm{i}y_2}\\&=\frac{x_1x_2+y_1y_2}{x_2^2+y_2^2}+\mathrm{i}\frac{x_2y_1-x_1y_2}{x_2^2+y_2^2}\quad(x_2^2+y_2^2\neq0),\end{aligned} \tag{1-1-3}$$

$(x_2-\mathrm{i}y_2)$ 是由 $(x_2+\mathrm{i}y_2)$ 改变虚部符号得来的.我们定义:将复数 $z=x+\mathrm{i}y$ 的虚部改号所得到的复数 $x-\mathrm{i}y$ 称为 z 的共轭复数,用符号 z^* 表示,即 $z^*=x-\mathrm{i}y$.显然,z 也是 z^* 的共轭复数.因此也可以说 z 和 z^* 两复数相互共轭.

两个相互共轭的复数之积与和是实数,而两者之差是虚数:

$$zz^*=(x+\mathrm{i}y)(x-\mathrm{i}y)=x^2+y^2, \tag{1-1-4}$$

$$z+z^*=(x+\mathrm{i}y)+(x-\mathrm{i}y)=2x=2\mathrm{Re}\,z, \tag{1-1-5}$$

$$z-z^*=(x+\mathrm{i}y)-(x-\mathrm{i}y)=2\mathrm{i}y=2\mathrm{i}\mathrm{Im}\,z. \tag{1-1-6}$$

在式(1-1-3)中计算两复数相除时,正是利用了性质(1-1-4),在分子分母中同乘以分母的共轭复数 z_2^*,从而使分母实数化.

(二) 复平面

在平面上建立一个直角坐标系，将任意复数 z 的实部 $\mathrm{Re}\,z$ 标在它的横轴上，而将 z 的虚部 $\mathrm{Im}\,z$ 标在纵轴上，如图 1-1-1 所示，就建立起了平面上全部点和全体复数之间的一一对应关系. 这样的平面称为复平面，而上述直角坐标系的横轴和纵轴分别称为实轴和虚轴. 平面上的点可以用从原点 O 引向这一点的矢量表示，所以复数 z 也可以用从原点出发终点在 z 的矢量来表示. 用矢量表示一个复数 z 时，矢量的起点不一定在原点 O，终点也不一定在 z 点，只要矢量在实轴和虚轴方向上的投影分别等于 z 的实部和虚部即可. 如图 1-1-2 中的矢量 $\overrightarrow{OA}$ 与 $\overrightarrow{O'A'}$ 都代表同一复数 z.

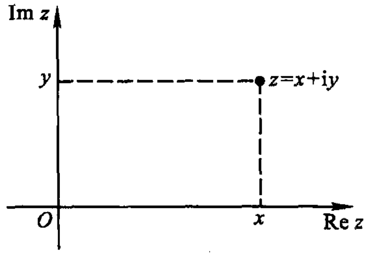

图　1-1-1

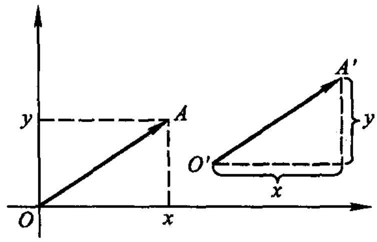

图　1-1-2

不难看出，复数的加法对应于复平面上矢量求和的平行四边形法则，如图1-1-3 所示.

利用 $z_2-z_1=z_2+(-z_1)$，只要按照平行四边形法则使矢量 z_2 与 $-z_1$ 相加，就可以得到表示 z_2-z_1 的矢量，如图 1-1-4 所示. 从图上还可看出，z_2-z_1 就是由 z_1 引向 z_2 的矢量.

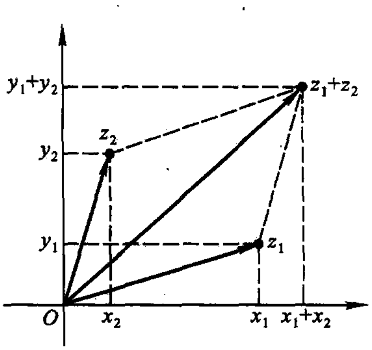

图　1-1-3

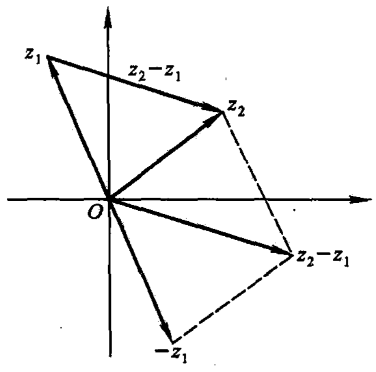

图　1-1-4

（三）模与辐角

复平面上的点还可以用极坐标(ρ,θ)表示，如图 1－1－5. 因而复数 z 也可以用(ρ,θ)表示：

$$z = \rho\cos\theta + \mathrm{i}\rho\sin\theta = \rho(\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta). \tag{1-1-7}$$

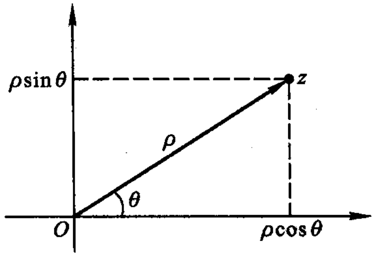

图 1－1－5

ρ 称为复数 z 的模，用符号 $|z|$ 表示；θ 称为 z 的辐角，用符号 Arg z 表示，它们和 z 的实部 x 与虚部 y 之间有如下关系[①]：

$$\rho \equiv |z| = \sqrt{x^2 + y^2}, \tag{1-1-8}$$

$$\theta \equiv \operatorname{Arg} z = \operatorname{Arctan}\frac{y}{x}. \tag{1-1-9}$$

注意，复数的模等于表示这一复数的矢量的长度，它永远取正值（或零）：

$$\rho \equiv |z| \geqslant 0.$$

对于一个复数 z，它的辐角 θ 可以取无穷多个值，彼此相差 2π 的整数倍. 为了使辐角成为单值的，可以将它限制在宽为 2π 的区间内，例如要求它满足条件

$$0 < \arg z \leqslant 2\pi \quad 或 \quad -\pi < \arg z \leqslant \pi.$$

这里我们用符号 arg z 表示具有单值性的辐角. 这样一来，同一复数 z 的各辐角之间有下列关系：

$$\operatorname{Arg} z = \arg z + 2k\pi,$$
$$k = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots. \tag{1-1-10}$$

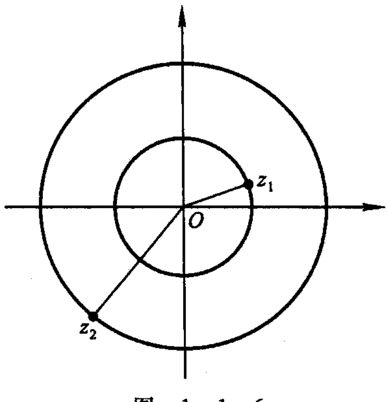

图 1－1－6

注意，复数没有大小的概念. 我们不能比较两个复数 z_1 和 z_2 的大小，而只能比较它们的模 $|z_1|$ 和 $|z_2|$ 的大小. 如果 $|z_1| < |z_2|$，就表示 z_1 离原点 O 的距离比 z_2 离原点 O 的距离近，如图 1－1－6 所示.

利用复数加减法的几何作图（图 1－1－3 和图 1－1－4），根据“三角形两边长之和不

---

① 符号 Arctan 表示反正切的一切可能值.

小于第三边”和“三角形两边长之差的绝对值不大于第三边”，容易得到下列重要不等式：

$$\left.\begin{aligned}|z_1+z_2| &\leqslant |z_1|+|z_2|,\\ |z_1-z_2| &\geqslant \big||z_1|-|z_2|\big|.\end{aligned}\right\} \tag{1-1-11}$$

(四) 复数的指数表示式

复数 z 除了有代数式(1-1-2)和三角式(1-1-7)之外，还有另一种形式——指数形式. 为了得到复数的指数形式，我们首先定义纯虚数的指数函数为

$$e^{i\theta}=\cos\theta+i\sin\theta, \tag{1-1-12}$$

这称为欧拉公式. 利用它，可以将式(1-1-7)改写为

$$z=\rho e^{i\theta}, \tag{1-1-13}$$

称为复数的指数式. 由欧拉公式容易证明，虚指数的指数函数和实指数的指数函数有相同的运算规则：

$$\left.\begin{aligned}&e^{i\theta_1}\cdot e^{i\theta_2}=e^{i(\theta_1+\theta_2)},\\ &\frac{e^{i\theta_1}}{e^{i\theta_2}}=e^{i(\theta_1-\theta_2)},\\ &\frac{1}{e^{i\theta}}=e^{-i\theta}.\end{aligned}\right\} \tag{1-1-14}$$

利用它们可以使复数的乘除法大为简化. 此时

$$z_1\cdot z_2=\rho_1e^{i\theta_1}\cdot\rho_2e^{i\theta_2}=\rho_1\rho_2e^{i(\theta_1+\theta_2)}, \tag{1-1-15}$$

$$\frac{z_1}{z_2}=\frac{\rho_1e^{i\theta_1}}{\rho_2e^{i\theta_2}}=\frac{\rho_1}{\rho_2}e^{i(\theta_1-\theta_2)},\quad \rho_2\neq0. \tag{1-1-16}$$

特别是，当 $z_2=e^{i\theta}$ 时，我们得到

$$z_1e^{i\theta}=\rho_1e^{i\theta_1}\cdot e^{i\theta}=\rho_1\cdot e^{i(\theta_1+\theta)}.$$

这表明，用 $e^{i\theta}$ 乘一个复数，不改变这一复数的模，只是将它转过 θ 角，如图 1-1-7 所示. 因而 $e^{i\theta}$ 称为转角因子.

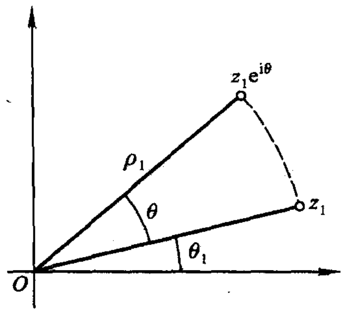

图　1-1-7

例 1　由复数 $z=\sqrt{3}-i$ 的代数式求它的三角式和指数式.

解　利用式(1-1-8)和(1-1-9)求它的模和辐角：

$$\rho=\sqrt{3+1}=2,$$

$$\theta = \mathrm{Arctan}\frac{-1}{\sqrt{3}} = -\frac{\pi}{6} + n\pi, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots.$$

由此知 θ 在第Ⅳ或第Ⅱ象限.为了完全确定 θ,根据 $\cos\theta > 0$, $\sin\theta < 0$ 判断 θ 在第Ⅳ象限,故上式中的 n 只能取 $0, \pm 2, \pm 4, \cdots$. 取 $n = 0$,得到

$$z = 2\left[\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) + \mathrm{i}\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right] = 2\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{6}}.$$

【解毕】

按定义,相互共轭的复数只是虚部相差符号.因此,在复平面上,两个相互共轭的复数所对应的点,对称地分布在实轴的上下两边,如图 1-1-8 所示.

由此还可以看出,相互共轭的复数,模相等而辐角相差一符号:

$$z = \rho\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}, \quad z^* = \rho\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}. \tag{1-1-17}$$

当两个相互共轭的复数相乘时,它们的指数因子相消,成为一个实数,这个实数就是它们的模的平方:

$$zz^* = |z|^2, \quad |z| = \sqrt{zz^*}. \tag{1-1-18}$$

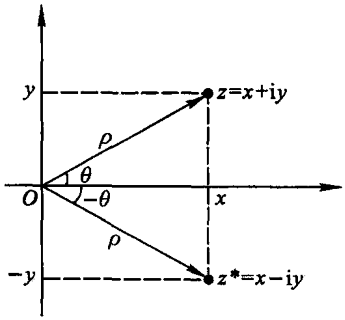

图　1-1-8

参看式(1-1-4)、(1-1-8).

(五) 复数的乘幂和开方

将式(1-1-15)用到复数的自乘上,可以得到

$$z^n = \rho^n\mathrm{e}^{\mathrm{i}n\theta} = \rho^n(\cos n\theta + \mathrm{i}\sin n\theta). \tag{1-1-19}$$

令 $\rho = 1$ 得到**棣莫弗公式**

$$(\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta)^n = \cos n\theta + \mathrm{i}\sin n\theta. \tag{1-1-20}$$

将左边乘开,分出实部和虚部,可以得到 $\cos n\theta$ 和 $\sin n\theta$ 用 $\cos\theta$ 和 $\sin\theta$ 表示的公式.

现在来看复数的开方.设 $z = \rho\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$,我们要求 $\sqrt[n]{z}$. 令

$$\sqrt[n]{z} = w = r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi},$$

两边乘 n 次方,则得

$$z = \rho\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} = r^n\mathrm{e}^{\mathrm{i}n\varphi}.$$

令模和辐角分别相等，可以得到两个方程，但必须注意辐角的多值性(1-1-10)：

$$r^n = \rho, \quad r = \sqrt[n]{\rho},$$

$$n\varphi = \theta_0 + 2k\pi, \quad \varphi = \frac{\theta_0}{n} + \frac{2k\pi}{n} \quad (0 < \theta_0 \leqslant 2\pi).$$

值得注意的是，对于 $k=0,1,2,\cdots,n-1$，所得到的 n 个 φ 值不等效，因为它们之间并不是相差 2π 的整数倍. 只是在 $k=n,n+1,\cdots$ 时才分别和 $k=0,1,\cdots$ 等效. 因此 $\sqrt[n]{z}$ 共有 n 个值：

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{\rho e^{i\theta}} = \sqrt[n]{\rho} e^{i\left(\frac{\theta_0}{n}+\frac{2k\pi}{n}\right)} \quad (k = 0,1,\cdots,n-1). \qquad (1-1-21)$$

这 n 个值均匀分布在半径为 $\sqrt[n]{\rho}$ 的圆上，图 1-1-9 上举了一个 $n=5$ 的例子.

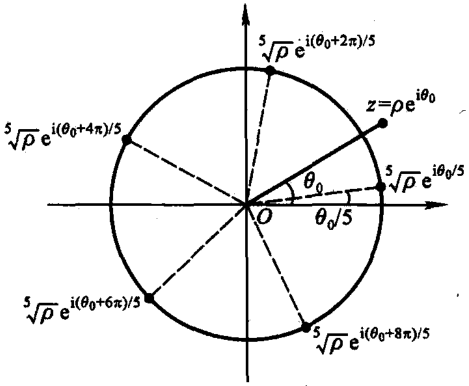

图 1-1-9

(六) 复数球面 无限远点

复数不仅可以用平面上的点表示，而且也可以用球面上的点表示. 如图 1-1-10所示，过复平面上的坐标原点 O 作一个球和复平面相切；过原点 O 作

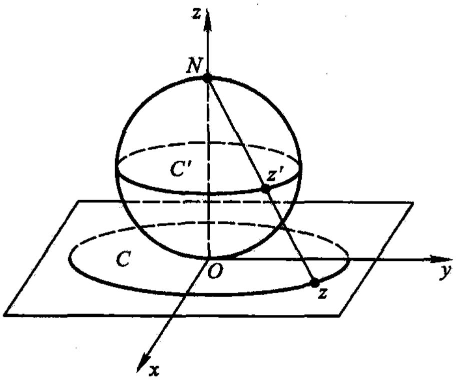

图 1-1-10