21世纪高等教育规划教材

——学习指导与考研系列

Mathematical analysis

数学分析

学习巩固与提高

下册

◎ 邢家省 孙玉泉 李卫国 王永革 编著

机械工业出版社
CHINA MACHINE PRESS

21 世纪高等教育规划教材——学习指导与考研系列

数学分析学习巩固与提高

（下　册）

邢家省　孙玉泉　李卫国　王永革　编著

机 械 工 业 出 版 社

本书是为巩固和拓展《数学分析（下册）》学习而编写的，基本理论知识方法内容全面，问题具有代表性，难度适宜，适用于理工科大学生的日常学习和复习巩固。本书列举了数学分析中的具有一定代表性的练习题，对典型的题目给出了详细解答或证明，并收集了一些补充、拓展类型的题目。通过反复练习和对照使用，有助于学生巩固已学的知识和理论，掌握解决基本问题的方法和手段，培养和提升分析问题、解决问题的能力，以期能熟练、灵活、创新地思考、解决更多的问题，取到较好的效果。

本书既可作为理工科大学生学习数学分析的自我训练和检测的辅导书，也可作为学业考试、参加数学竞赛、考研复习的参考书，亦可作为青年教师和数学爱好者的参考资料。

图书在版编目（CIP）数据

数学分析学习巩固与提高．下册/邢家省等编著．—北京：机械工业出版社，2011.2

21世纪高等教育规划教材——学习指导与考研系列

ISBN 978-7-111-33153-7

Ⅰ.①数…　Ⅱ.①邢…　Ⅲ.①数学分析－高等学校－教学参考资料　Ⅳ.①O17

中国版本图书馆CIP数据核字（2011）第011002号

机械工业出版社（北京市百万庄大街22号　邮政编码100037）
策划编辑：张金奎　责任编辑：张金奎　李　乐
版式设计：霍永明　责任校对：李秋荣
封面设计：张　静　责任印制：乔　宇
北京机工印刷厂印刷（三河市南杨庄国丰装订厂装订）
2011年3月第1版第1次印刷
169mm×239mm・17.5印张・336千字
标准书号：ISBN 978-7-111-33153-7
定价：28.00元

前　　言

数学分析（微积分）已有三百多年的历史，微积分的创立和发展是人类智慧的结晶，是对科学文明的一大贡献，是人类哲学认识上的重大突破，对科学技术的发展起到了不可或缺的作用，现代科学技术的创新和发展仍然离不了它。

经过无数数学先哲、学者的研究、发展与广泛传播，数学分析成为了一个严密完整的知识体系，问题内容广泛，理论方法众多、结论深刻，应用范围广阔。

数学分析是理工科大学的一门重要公共基础课，是理工科大学生必备的知识体系。这门课程的研究对象和理论、方法、知识等，对于相关专业课程的学习和开展科学研究，都是必备的基础知识。学习数学分析，达到训练、培养高素质创新人才的目的。

数学分析几乎是理工科大学生入大学后的第一门数学课程，出现了许多新问题、新理论和新方法，理论深度和知识增进梯度大，涉及知识面广。多数初学者在学习过程中往往会遇到一定的疑难，难以想到运用所学知识解题，难以发现并纠正错误之处，难以想到巧妙解法。学习数学分析课程，需要具备以往数学知识的扎实基础和对知识的灵活运用，需要牢固掌握数学分析的基本理论，并能运用于思考、解决理论和应用问题中，不断提高创新能力。

本书专为帮助读者学习数学分析课程知识而编写。对有代表性的练习题目给出了解答，题型多样，覆盖面较全，给出了类型与数量众多的典型习题的解析，对其中一些典型习题给出了独立发现的好解法。学习数学分析课程知识最有效的方法就是上课听好课、课后复习及做习题进行练习。对本书内容，读者可通过反复多次地训练和对照使用，达到熟能生巧的目的，有助于理解概念和理论方法，掌握解决基本问题的方法和手段，提高解决问题的能力，以期能熟练灵活地解决更多的问题，取到较好的效果。

编者在本书编写过程中，受到郑志明教授和李尚志教授的学术精神和创新思想启发，并得到他们的指导和帮助。同事杨小远、薛玉梅、杨卓琴、刘明菊等提供了很大的帮助，他们对初稿内容的组织、写作与汇编付出了辛勤劳动，多次使用并提出了许多修改意见，在此基础上编者进行过多次调整和

改写，特此向他们表示感谢。

数学分析的图书和题目浩如烟海，人们已积累了丰富的知识智慧体系，并不断发展更新。本书在编写过程中参考、引用了国内外众多图书中的许多资料和习题的解答，无法一一列举，在此一并致谢。

由于编者水平所限，书中不妥和错误之处在所难免，敬请读者发现并给予指正。

编者

于北京航空航天大学

目　录

第 15 章　反常积分的敛散性判别法

基本知识理论方法内容提要

本章的核心内容是反常积分的概念和判别反常积分敛散性的理论方法．深入理解反常积分收敛定义的内涵，逐步掌握使用判别两类反常积分敛散的理论方法和技巧．

1．无穷限区间上的反常积分的定义和敛散性判别法

（1）无穷限区间上的反常积分收敛的定义

1）设函数f在$[a,+\infty)$上有定义，如果对任何$A>a$，函数f在$[a,A]$上均可积，而且$\lim\limits_{A\to+\infty}\int_a^A f(x)\mathrm{d}x$有有限的极限，那么就把这个极限值记作$\int_a^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x$，并称积分$\int_a^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x$是收敛的，否则称积分$\int_a^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x$是发散的．

2）同理可给出$\int_{-\infty}^{b}f(x)\mathrm{d}x$和$\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x=\int_{-\infty}^{c}f(x)\mathrm{d}x+\int_c^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x\,(\forall c\in\boldsymbol{R})$的确切定义．

（2）反常积分敛散性判别法

1）对有些函数f，可先求出$F(A)=\int_a^A f(x)\mathrm{d}x$，再研究函数$F(A)=\int_a^A f(x)\mathrm{d}x$的极限，一般可用牛顿-莱布尼兹公式，或通过分部积分法和换元积分法去计算完成．

2）对一般的函数f，欲求出$F(A)=\int_a^A f(x)\mathrm{d}x$有时是困难的，必须寻求别的方法．有时只需知道其极限的存在性，并不需求出此极限．研究函数$F(A)$的极限，自然可用函数极限的一般方法，然后归结为加在函数$f(x)$上的条件．

3）柯西收敛原理

积分$\int_a^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x$收敛的充要条件是$\lim\limits_{A\to+\infty}F(A)=\lim\limits_{A\to+\infty}\int_a^A f(x)\mathrm{d}x$有有限的极限，这等价于对$\forall\varepsilon>0$，$\exists A_0>a$，只要$A',A''>A_0$，便有

$$\left|\int_{A'}^{A''}f(x)\mathrm{d}x\right|=|F(A'')-F(A')|<\varepsilon.$$

4）绝对收敛和条件收敛

设函数f在$[a,+\infty)$上有定义，且对任何$A>a$，函数f在$[a,A]$上均可积，可

知函数 $|f|$ 在 $[a,A]$ 上也可积，如果积分 $\int_a^{+\infty}|f(x)|\mathrm{d}x$ 是收敛的，则积分 $\int_a^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x$ 是收敛的；此时称积分 $\int_a^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x$ 是绝对收敛的.

若积分 $\int_a^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x$ 是收敛的，但积分 $\int_a^{+\infty}|f(x)|\mathrm{d}x$ 是发散的，就称积分 $\int_a^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x$ 是条件收敛的.

由此而来，对一些积分的收敛性判别，可通过研究其绝对收敛性而获得，而 $|f(x)|$ 是非负函数，所以问题转化为研究非负函数积分的收敛性判别.

5）非负函数无穷积分的收敛判别法

若 f 是 $[a,+\infty)$ 上的非负函数 $\left(\text{从而 } F(A)=\int_a^A f(x)\mathrm{d}x \text{ 是递增的}\right)$，则积分 $\int_a^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x$ 收敛的充要条件是 $F(A)=\int_a^A f(x)\mathrm{d}x$ 在 $[a,+\infty)$ 上有界.

6）非负函数无穷积分收敛的比较判别法

设函数 f 和 g，对充分大的 x，成立不等式 $0\leqslant f(x)\leqslant g(x)$，那么

① 若 $\int_a^{+\infty}g(x)\mathrm{d}x$ 收敛，则 $\int_a^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x$ 收敛；

② 若 $\int_a^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x$ 发散，则 $\int_a^{+\infty}g(x)\mathrm{d}x$ 发散.

7）设 f 和 g 都是 $[a,+\infty)$ 上的非负函数，且对充分大的 x，$g(x)>0$，$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{g(x)}=l$，那么

① 当 $0<l<+\infty$ 时，积分 $\int_a^{+\infty}g(x)\mathrm{d}x$ 和 $\int_a^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x$ 同时敛散；

② 当 $l=0$ 时，如果 $\int_a^{+\infty}g(x)\mathrm{d}x$ 收敛，则 $\int_a^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x$ 也收敛；

③ 当 $l=+\infty$ 时，如果 $\int_a^{+\infty}g(x)\mathrm{d}x$ 发散，则 $\int_a^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x$ 也发散.

此处常见的比较对象是：$\int_a^{+\infty}\dfrac{1}{x^p}\mathrm{d}x\ (a>0)$，当 $p>1$ 时，积分收敛；当 $p\leqslant1$ 时，积分发散.

8）狄利克雷判别法

对形如 $\int_a^{+\infty}f(x)g(x)\mathrm{d}x$ 的积分，如果 f 和 g 满足下面两个条件：

① $F(A)=\int_a^A f(x)\mathrm{d}x$ 在 $[a,+\infty)$ 上有界；② g 在 $[a,+\infty)$ 上单调，且 $\lim\limits_{x\to+\infty}g(x)=0$，那么积分 $\int_a^{+\infty}f(x)g(x)\mathrm{d}x$ 收敛.

9）阿贝尔判别法

对形如 $\int_a^{+\infty} f(x)g(x)\,dx$ 的积分，如果 f 和 g 满足下面两个条件：

①积分 $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ 收敛；②g 在 $[a, +\infty)$ 上单调有界，那么积分 $\int_a^{+\infty} f(x)g(x)\,dx$ 收敛．

2. 瑕积分的定义和敛散性判别法

（1）瑕积分的定义

1）如果函数 f 在 $(a,b]$ 上有定义，若 f 在某 $(a,a+\delta]$ 上无界，则称 a 为 f 的瑕点．

若对任何 $0<\eta<b-a$，函数 f 在 $[a+\eta,b]$ 上均可积，而且 $\lim\limits_{\eta\to0}F(a+\eta)=\lim\limits_{\eta\to0}\int_{a+\eta}^{b} f(x)\,dx$ 有有限的极限，那么就把这个极限值记作 $\int_a^b f(x)\,dx$，并称瑕积分 $\int_a^b f(x)\,dx$ 是收敛的；否则，称瑕积分 $\int_a^b f(x)\,dx$ 是发散的．

2）同理可给出当 b 为 f 的瑕点时，积分 $\int_a^b f(x)\,dx$；

或 a,b 均为 f 的瑕点时，$\int_a^b f(x)\,dx=\int_a^c f(x)\,dx+\int_c^b f(x)\,dx$；

或当 $c\in(a,b)$ 为 f 的瑕点时，$\int_a^b f(x)\,dx=\int_a^c f(x)\,dx+\int_c^b f(x)\,dx$ 的确切含义．

瑕积分和无穷区间上的反常积分可以互相转换，因而两者的理论方法应该是类似的．

（2）瑕积分敛散性判别法（完全类似于无穷区间上的反常积分）

1）对有些函数 f，可先求出 $F(a+\eta)=\int_{a+\eta}^{b} f(x)\,dx$，再研究函数 $F(a+\eta)$ 的极限，一般可用牛顿 - 莱布尼兹公式，或用分部积分法和换元积分法去计算完成．

2）对一般的函数 f，欲求出 $F(a+\eta)=\int_{a+\eta}^{b} f(x)\,dx$ 有时是困难的．

从理论上讲，研究函数 $F(a+\eta)=\int_{a+\eta}^{b} f(x)\,dx$ 的极限，自然用研究函数极限的一般方法，然后归结为研究加在函数 $f(x)$ 上的条件．

3）柯西收敛原理

积分 $\int_a^b f(x)\,dx$ 收敛的充要条件是 $\lim\limits_{\eta\to0}F(a+\eta)=\lim\limits_{\eta\to0}\int_{a+\eta}^{b} f(x)\,dx$ 有有限的极限，这等价于对 $\forall\varepsilon>0$，$\exists\delta>0$，只要 $0<\eta<\delta$，$0<\eta'<\delta$，便有

$$\left|\int_{a+\eta}^{a+\eta'} f(x)\,dx\right|=|F(a+\eta')-F(a+\eta)|<\varepsilon.$$

4）绝对收敛和条件收敛

设函数f在$(a,b]$上有定义，若对任何$0<\eta<b-a$，函数f在$[a+\eta,b]$上均可积，从而函数$|f|$在$[a+\eta,b]$上均可积，如果积分$\int_a^b|f(x)|\mathrm{d}x$是收敛的，则积分$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$是收敛的；此时称积分$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$是绝对收敛的.

若积分$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$是收敛的，而积分$\int_a^b|f(x)|\mathrm{d}x$是发散的，就称积分$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$是条件收敛的.

这样一来对某些积分的收敛性判别，可通过研究其绝对收敛性而获得，又$|f(x)|$是非负函数，所以问题转化为研究非负函数积分的收敛性判别.

5）非负函数瑕积分的收敛判别法

若f是$(a,b]$上的非负函数，则积分$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$收敛的充要条件是$F(a+\eta)=\int_{a+\eta}^b f(x)\mathrm{d}x$在$(0,b-a]$上有界.

6）非负函数瑕积分收敛的比较判别法

设函数f和g，如对充分靠近a的$x(x>a)$，成立不等式$0\leqslant f(x)\leqslant g(x)$，那么

① 若$\int_a^b g(x)\mathrm{d}x$收敛，则$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$收敛；

② 若$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$发散，则$\int_a^b g(x)\mathrm{d}x$发散.

7）设f和g都是$(a,b]$上的非负函数，且对充分靠近a的$x(x>a)$，$g(x)>0$，$\lim\limits_{x\to a^+}\dfrac{f(x)}{g(x)}=l$，那么

① 当$0<l<+\infty$时，积分$\int_a^b g(x)\mathrm{d}x$和$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$同时敛散；

② 当$l=0$时，如果$\int_a^b g(x)\mathrm{d}x$收敛，则$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$也收敛；

③ 当$l=+\infty$时，如果$\int_a^b g(x)\mathrm{d}x$发散，则$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$也发散.

常用的重要比较对象是：$\int_a^b\dfrac{1}{(x-a)^q}\mathrm{d}x$，当$q<1$时，积分收敛；当$q\geqslant1$时，积分发散.

8）狄利克雷判别法

对形如$\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x$的积分，如果$f$和$g$满足下面两个条件：

① $F(a+\eta)=\int_{a+\eta}^b f(x)\mathrm{d}x$在$\eta\in(0,b-a]$上有界；

② g 在 $(a,b]$ 上单调，且 $\lim\limits_{x\to a^+} g(x)=0$，那么积分 $\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x$ 收敛.

9）阿贝尔判别法

对形如 $\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x$ 的积分，如果 f 和 g 满足下面两个条件：

① 积分 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 收敛；

② g 在 $(a,b]$ 上单调有界，那么积分 $\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x$ 收敛.

典型例题解析

第1节　反常积分的计算

例 1　思考题

(1) 设积分 $\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 收敛，但 $\int_a^{+\infty} g(x)\mathrm{d}x$ 发散，那么 $\int_a^{+\infty}(f(x)+g(x))\mathrm{d}x$ 的收敛性如何？

答　该积分必定发散.

(2) 设积分 $\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$，$\int_a^{+\infty} g(x)\mathrm{d}x$ 都发散，那么 $\int_a^{+\infty}(f(x)+g(x))\mathrm{d}x$ 收敛性如何？

答　收敛性不能确定，观察反例即可.

例如，$\int_1^{+\infty}\left(\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x}\right)\mathrm{d}x$，$\int_1^{+\infty}\frac{1}{x}\mathrm{d}x$ 都发散，但 $\int_1^{+\infty}\frac{1}{x^2}\mathrm{d}x$ 收敛.

(3) 设积分 $\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$，$\int_a^{+\infty} g(x)\mathrm{d}x$ 都收敛，那么 $\int_a^{+\infty} f(x)g(x)\mathrm{d}x$ 收敛性如何？

答　收敛性不能确定，观察反例即可.

例如，$\int_1^{+\infty}\frac{\sin x}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x$，$\int_1^{+\infty}\frac{\sin x}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x$ 都收敛，但 $\int_1^{+\infty}\frac{\sin x\sin x}{x}\mathrm{d}x$ 发散.

(4) 设积分 $\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$，$\int_a^{+\infty} g(x)\mathrm{d}x$ 都发散，那么 $\int_a^{+\infty} f(x)g(x)\mathrm{d}x$ 收敛性如何？

答　收敛性不能确定，观察反例即可.

例如，$\int_1^{+\infty}\frac{1}{x}\mathrm{d}x$，$\int_1^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x$ 都发散，但 $\int_1^{+\infty}\frac{1}{x\sqrt{x}}\mathrm{d}x$ 收敛.

(5) 设积分 $\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 收敛，$\int_a^{+\infty} g(x)\mathrm{d}x$ 发散，那么 $\int_a^{+\infty} f(x)g(x)\mathrm{d}x$ 收敛性如何?

答 收敛性不能确定，观察反例即可.

例如，$\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x$ 收敛，$\int_1^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x$ 发散，但 $\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x$ 收敛;

又如，$\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x$ 收敛，$\int_1^{+\infty} \sin x\mathrm{d}x$ 发散，$\int_1^{+\infty} \frac{\sin x\sin x}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x$ 发散.

(6) 设瑕积分 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ ，$\int_a^b g(x)\mathrm{d}x$ 都收敛，那么 $\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x$ 收敛性如何?

答 收敛性不能确定，观察反例即可.

例如，$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x$ 收敛，但 $\int_0^1 \frac{1}{x}\mathrm{d}x$ 发散；也即 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 收敛，未必有 $\int_a^b f^2(x)\mathrm{d}x$ 收敛.

(7) 设积分 $\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 收敛，是否必有 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$.

答 未必.

例如，$f(x)=\frac{x}{1+x^6\sin^2 x}$，尽管 $\int_0^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 收敛，但当 $x\to+\infty$ 时，$f(x)$ 不趋于0.

此例还给我们提供了一个重要例子:

$F(x)=\int_0^x f(t)\mathrm{d}t$ 在 $[0,+\infty)$ 上递增有界，$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ 有有限的极限，$F(x)=\int_0^x f(t)\mathrm{d}t$ 在 $[0,+\infty)$ 上连续可微且一致连续，但 $F'(x)=f(x)=\frac{x}{1+x^6\sin^2 x}$ 在 $[0,+\infty)$ 上无界.

例2 求下列积分的值:

(1) $\int_2^{+\infty} \frac{1}{x^2-1}\mathrm{d}x$;

(2) $\int_0^{+\infty} \frac{1}{(x^2+p)(x^2+q)}\mathrm{d}x$ $(p,q>0,p\neq q)$;

(3) $\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-ax^2}x\mathrm{d}x$ $(a>0)$;

(4) $\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-ax}\sin bx\mathrm{d}x$ $(a>0)$;

(5) $\int_\mathrm{e}^{+\infty} \frac{1}{x(\ln x)^p}\mathrm{d}x$.

解 利用广义牛顿-莱布尼兹公式.

(1) $\int_2^{+\infty}\frac{1}{x^2-1}\mathrm{d}x=\int_2^{+\infty}\frac{1}{2}\left(\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x+1}\right)\mathrm{d}x=\int_2^{+\infty}\frac{1}{2}\left(\ln\frac{x-1}{x+1}\right)'\mathrm{d}x$

$$=\frac{1}{2}\left(\ln\frac{x-1}{x+1}\right)\Big|_2^{+\infty}=\frac{1}{2}\ln 3;$$

(2) $\int_0^{+\infty}\frac{1}{(x^2+p)(x^2+q)}\mathrm{d}x=\frac{1}{q-p}\int_0^{+\infty}\left(\frac{1}{x^2+p}-\frac{1}{x^2+q}\right)\mathrm{d}x$

$$=\frac{1}{q-p}\left[\frac{1}{\sqrt{p}}\arctan\frac{x}{\sqrt{p}}-\frac{1}{\sqrt{q}}\arctan\frac{x}{\sqrt{q}}\right]\Big|_0^{+\infty}$$

$$=\frac{1}{q-p}\frac{\pi}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{p}}-\frac{1}{\sqrt{q}}\right);$$

(3) $\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-ax^2}x\mathrm{d}x=\int_0^{+\infty}\left[-\frac{1}{2a}\mathrm{e}^{-ax^2}\right]'\mathrm{d}x=\left[-\frac{1}{2a}\mathrm{e}^{-ax^2}\right]\Big|_0^{+\infty}=\frac{1}{2a};$

(4) 因为 $I=\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-ax}\sin bx\mathrm{d}x=\int_0^{+\infty}\left(-\frac{1}{a}\mathrm{e}^{-ax}\right)'\sin bx\mathrm{d}x$

$$=\left(-\frac{1}{a}\mathrm{e}^{-ax}\right)\sin bx\Big|_0^{+\infty}+\frac{b}{a}\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-ax}\cos bx\mathrm{d}x$$

$$=\frac{b}{a}\int_0^{+\infty}\left(-\frac{1}{a}\mathrm{e}^{-ax}\right)'\cos bx\mathrm{d}x$$

$$=\left(-\frac{b}{a^2}\mathrm{e}^{-ax}\right)\cos bx\Big|_0^{+\infty}-\frac{b^2}{a^2}\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-ax}\sin bx\mathrm{d}x$$

$$=\frac{b}{a^2}-\frac{b^2}{a^2}I,$$

所以 $I=\frac{b}{a^2+b^2}$，即 $\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-ax}\sin bx\mathrm{d}x=\frac{b}{a^2+b^2};$

(5) $\int_{\mathrm{e}}^{+\infty}\frac{1}{x(\ln x)^p}\mathrm{d}x=\int_{\mathrm{e}}^{+\infty}\frac{1}{(\ln x)^p}\mathrm{d}(\ln x)=\int_1^{+\infty}\frac{1}{y^p}\mathrm{d}y=\begin{cases}\frac{1}{p-1}, & p>1\\ +\infty, & p\leqslant 1\end{cases}.$

例 3　计算 (1) $\int_0^{+\infty}\frac{1+x^2}{1+x^4}\mathrm{d}x$；(2) $\int_0^{+\infty}\frac{1}{1+x^4}\mathrm{d}x$；(3) $\int_0^{+\infty}\frac{x^2}{1+x^4}\mathrm{d}x$.

解　(1) $\int_0^{+\infty}\frac{1+x^2}{1+x^4}\mathrm{d}x=\int_0^{+\infty}\frac{\frac{1}{x^2}+1}{\frac{1}{x^2}+x^2}\mathrm{d}x=\int_0^{+\infty}\frac{1}{\left(x-\frac{1}{x}\right)^2+2}\mathrm{d}\left(x-\frac{1}{x}\right)$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{y^2+2}\mathrm{d}y=\frac{1}{\sqrt{2}}\arctan\frac{y}{\sqrt{2}}\Big|_{-\infty}^{+\infty}=\frac{\pi}{\sqrt{2}};$$

（2）由于$I=\int_0^{+\infty}\frac{1}{1+x^4}dx \xlongequal{x=\frac{1}{y}} \int_0^{+\infty}\frac{y^2}{1+y^4}dy=\int_0^{+\infty}\frac{x^2}{1+x^4}dx$,

$$2I=\int_0^{+\infty}\frac{1+x^2}{1+x^4}dx=\frac{\pi}{\sqrt{2}},$$

所以$\int_0^{+\infty}\frac{1}{1+x^4}dx=\frac{\pi}{2\sqrt{2}}$;

（3）由(1)(2)得$\int_0^{+\infty}\frac{x^2}{1+x^4}dx=\frac{\pi}{2\sqrt{2}}$.

例4 计算(1) $\int_0^{+\infty}\frac{1}{1+x^3}dx$;(2)$\int_0^{+\infty}\frac{x}{1+x^3}dx$.

解 (1)$I=\int_0^{+\infty}\frac{1}{1+x^3}dx \xlongequal{x=\frac{1}{y}} \int_0^{+\infty}\frac{y}{1+y^3}dy=\int_0^{+\infty}\frac{x}{1+x^3}dx$,

$$2I=\int_0^{+\infty}\frac{1+x}{1+x^3}dx=\int_0^{+\infty}\frac{1}{x^2-x+1}dx=\int_0^{+\infty}\frac{1}{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}dx$$

$$=\frac{1}{\sqrt{\frac{3}{4}}}\arctan\frac{x-\frac{1}{2}}{\sqrt{\frac{3}{4}}}\Bigg|_0^{+\infty}=\frac{2}{\sqrt{3}}\left(\frac{\pi}{2}-\arctan\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\right)$$

$$=\frac{2}{\sqrt{3}}\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{6}\right)=\frac{4\sqrt{3}}{9}\pi,$$

故$\int_0^{+\infty}\frac{1}{1+x^3}dx=\frac{2\sqrt{3}}{9}\pi$;

（2）由(1)可得$\int_0^{+\infty}\frac{x}{1+x^3}dx=\frac{2\sqrt{3}}{9}\pi$.

例5 求下列瑕积分的值：

(1) $\int_0^1\frac{dx}{(2-x)\sqrt{1-x}}$;　　(2) $\int_{-1}^1\frac{dx}{(2-x^2)\sqrt{1-x^2}}$;

(3) $\int_0^1\frac{\arcsin\sqrt{x}}{\sqrt{x(1-x)}}dx$;　　(4) $\int_0^1(\ln x)^n dx\ (n\in\mathbf{N}^*)$;

(5) $\int_0^1\frac{(1-x)^n}{\sqrt{x}}dx$.

解 (1) $\int_0^1\frac{dx}{(2-x)\sqrt{1-x}} \xlongequal{1-x=y^2} \int_1^0\frac{-2ydy}{(1+y^2)y}=2\int_0^1\frac{dy}{1+y^2}$

$= 2\arctan y \Big|_0^1 = 2 \times \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$;

$$(2)\ \int_{-1}^{1} \frac{dx}{(2-x^2)\sqrt{1-x^2}} = 2\int_0^1 \frac{dx}{(2-x^2)\sqrt{1-x^2}}$$

$$\xlongequal{x=\sin t} 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos t\,dt}{(1+\cos^2 t)\cos t}$$

$$= 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dt}{1+\cos^2 t} = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dt}{2\cos^2 t+\sin^2 t}$$

$$= 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d(\tan t)}{2+\tan^2 t} = 2\frac{1}{\sqrt{2}}\arctan\frac{\tan t}{\sqrt{2}}\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$= 2\frac{1}{\sqrt{2}} \times \frac{\pi}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}\pi;$$

$$(3)\ \int_0^1 \frac{\arcsin\sqrt{x}}{\sqrt{x(1-x)}}dx = \int_0^1 2\frac{\arcsin\sqrt{x}}{\sqrt{1-x}}d(\sqrt{x})$$

$$= \int_0^1 2(\arcsin\sqrt{x})\,d(\arcsin\sqrt{x})$$

$$= (\arcsin\sqrt{x})^2 \big|_0^1 = \left(\frac{\pi}{2}\right)^2 = \frac{\pi^2}{4};$$

(4) 记 $I_n = \int_0^1 (\ln x)^n dx, I_1 = \int_0^1 (\ln x)dx = x\ln x\Big|_0^1 - \int_0^1 x \cdot \frac{1}{x}dx = -1$,

$$I_n = \int_0^1 (\ln x)^n dx = x(\ln x)^n\Big|_0^1 - \int_0^1 x \cdot n(\ln x)^{n-1}\frac{1}{x}dx$$

$$= -n\int_0^1 (\ln x)^{n-1}dx = -nI_{n-1} = \cdots = (-1)^n n!;$$

$$(5)\ \int_0^1 \frac{(1-x)^n}{\sqrt{x}}dx \xlongequal{x=y^2} \int_0^1 \frac{(1-y^2)^n}{y}2y\,dy = 2\int_0^1 (1-y^2)^n dy,$$

记 $\quad I_n = \int_0^1 (1-y^2)^n dy, I_1 = \int_0^1 (1-y^2)dy = \frac{2}{3}$,

$$I_n = \int_0^1 (1-y^2)^n dy = y(1-y^2)^n\Big|_0^1 - \int_0^1 yn(1-y^2)^{n-1}(-2y)dy$$

$$= 2n\int_0^1 y^2(1-y^2)^{n-1}dy = 2n\int_0^1 [-(1-y^2)^n + (1-y^2)^{n-1}]dy$$

$$= -2nI_n + 2nI_{n-1},$$

于是 $\quad I_n = \frac{2n}{2n+1}I_{n-1} = \frac{2n}{2n+1} \times \frac{2(n-1)}{2n-1} \times \cdots \times \frac{4}{5} \times \frac{2}{3}$.

例 6 计算下列两个积分的比值：