

21世纪高等教育规划教材
——学习指导与考研系列

M

mathematical analysis

数学分析

学习巩固与提高

下册

◎ 邢家省 孙玉泉 李卫国 王永革 编著



机械工业出版社
CHINA MACHINE PRESS



21 世纪高等教育规划教材——学习指导与考研系列

数学分析学习巩固与提高

(下 册)

邢家省 孙玉泉 李卫国 王永革 编著

机械工业出版社

本书是为巩固和拓展《数学分析（下册）》学习而编写的，基本理论知识方法内容全面，问题具有代表性，难度适宜，适用于理工科大学生的日常学习和复习巩固。本书列举了数学分析中的具有一定代表性的练习题，对典型的题目给出了详细解答或证明，并收集了一些补充、拓展类型的题目。通过反复练习和对照使用，有助于学生巩固已学的知识和理论，掌握解决基本问题的方法和手段，培养和提升分析问题、解决问题的能力，以期能熟练、灵活、创新地思考、解决更多的问题，起到较好的效果。

本书既可作为理工科大学学生学习数学分析的自我训练和检测的辅导书，也可作为学业考试、参加数学竞赛、考研复习的参考书，亦可作为青年教师和数学爱好者的参考资料。

图书在版编目（CIP）数据

数学分析学习巩固与提高. 下册/邢家省等编著. —北京：机械工业出版社，2011.2

21 世纪高等教育规划教材——学习指导与考研系列

ISBN 978-7-111-33153-7

I. ①数… II. ①邢… III. ①数学分析—高等学校—教学参考资料 IV. ①O17

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2011）第 011002 号

机械工业出版社（北京市百万庄大街 22 号 邮政编码 100037）

策划编辑：张金奎 责任编辑：张金奎 李 乐

版式设计：霍永明 责任校对：李秋荣

封面设计：张 静 责任印制：乔 宇

北京机工印刷厂印刷（三河市南杨庄国丰装订厂装订）

2011 年 3 月第 1 版第 1 次印刷

169mm×239mm·17.5 印张·336 千字

标准书号：ISBN 978-7-111-33153-7

定价：28.00 元

凡购本书，如有缺页、倒页、脱页，由本社发行部调换

电话服务

网络服务

社服务中心：(010) 88361066

门户网：<http://www.cmpbook.com>

销售一部：(010) 68326294

教材网：<http://www.cmpedu.com>

销售二部：(010) 88379649

读者服务部：(010) 68993821

封面无防伪标均为盗版

前 言

数学分析（微积分）已有三百多年的历史，微积分的创立和发展是人类智慧的结晶，是对科学文明的一大贡献，是人类哲学认识上的重大突破，对科学技术的发展起到了不可或缺的作用，现代科学技术的创新和发展仍然离不了它。

经过无数数学先哲、学者的研究、发展与广泛传播，数学分析成为了一个严密完整的知识体系，问题内容广泛，理论方法众多、结论深刻，应用范围广阔。

数学分析是理工科大学的一门重要公共基础课，是理工科大学生必备的知识体系。这门课程的研究对象和理论、方法、知识等，对于相关专业课程的学习和开展科学研究，都是必备的基础知识。学习数学分析，达到训练、培养高素质创新人才的目的。

数学分析几乎是理工科大学生入大学后的第一门数学课程，出现了许多新问题、新理论和新方法，理论深度和知识增进梯度大，涉及知识面广。多数初学者在学习过程中往往会遇到一定的疑难，难以想到运用所学知识解题，难以发现并纠正错误之处，难以想到巧妙解法。学习数学分析课程，需要具备以往数学知识的扎实基础和对知识的灵活运用，需要牢固掌握数学分析的基本理论，并能运用于思考、解决理论和应用问题中，不断提高创新能力。

本书专为帮助读者学习数学分析课程知识而编写。对有代表性的练习题目给出了解答，题型多样，覆盖面较全，给出了类型与数量众多的典型习题的解析，对其中一些典型习题给出了独立发现的好解法。学习数学分析课程知识最有效的方法就是上课听好课、课后复习及做习题进行练习。对本书内容，读者可通过反复多次地训练和对照使用，达到熟能生巧的目的，有助于理解概念和理论方法，掌握解决基本问题的方法和手段，提高解决问题的能力，以期能熟练灵活地解决更多的问题，取到较好的效果。

编者在本书编写过程中，受到郑志明教授和李尚志教授的学术精神和创新思想启发，并得到他们的指导和帮助。同事杨小远、薛玉梅、杨卓琴、刘明菊等提供了很大的帮助，他们对初稿内容的组织、写作与汇编付出了辛勤劳动，多次使用并提出了许多修改意见，在此基础上编者进行过多次调整和

改写，特此向他们表示感谢。

数学分析的图书和题目浩如烟海，人们已积累了丰富的知识智慧体系，并不断发展更新。本书在编写过程中参考、引用了国内外众多图书中的许多资料和习题的解答，无法一一列举，在此一并致谢。

由于编者水平所限，书中不妥和错误之处在所难免，敬请读者发现并给予指正。

编者

于北京航空航天大学

目 录

前言

第 15 章 反常积分的敛散性判

别法 1

基本知识理论方法内容提要 1

典型例题解析 5

第 1 节 反常积分的计算 5

第 2 节 广义积分收敛性的比较 判别法的应用 12

第 3 节 广义积分收敛性的狄利 克雷判别法和阿贝尔判 别法的应用 14

第 4 节 绝对收敛性和条件收敛 性的判别 16

第 5 节 广义积分收敛性质的理 论方法 17

自我巩固拓展提高练习 21

第 16 章 傅里叶级数和傅里叶

变换 24

基本知识理论方法内容提要 24

典型例题解析 30

第 1 节 函数的傅里叶级数 30

第 2 节 函数的傅里叶级数展开收敛 定理的应用 32

第 3 节 傅里叶级数一致收敛定理和 均方收敛定理的应用 35

第 4 节 傅里叶级数均方收敛的理论 方法 40

第 5 节 傅里叶变换的计算和傅里叶 积分公式的应用 45

自我巩固拓展提高练习 50

第 17 章 n 维欧氏空间 R^n 中的

点集拓扑 52

基本知识理论方法内容提要 52

典型例题解析 56

第 1 节 开集、闭集、凝聚点 56

第 2 节 开集和闭集的性质 57

自我巩固拓展提高练习 58

第 18 章 多元函数的极限与连

续性 60

基本知识理论方法内容提要 60

典型例题解析 61

第 1 节 多元函数的极限、累次 极限 61

第 2 节 求多元函数极限的方法 63

第 3 节 多元函数的连续性和一 致连续性 66

第 4 节 多元函数的极限理论方 法研究 67

自我巩固拓展提高练习 70

第 19 章 多元函数的偏导数与全

微分 72

基本知识理论方法内容提要 72

典型例题解析 76

第 1 节 多元函数的偏导数和可微性 及连续性之间的关系 76

第 2 节 多元函数的可偏导数性和可 微分性的判别与计算 78

第 3 节 偏导数、方向导数、梯度、 微分的计算 81

自我巩固拓展提高练习 85

第 20 章 高阶偏导数、复合函数

求导、隐函数求导 88

基本知识理论方法内容提要 88

典型例题解析 91

第 1 节 复合函数求偏导数和高阶偏 导数 91

第2节 复合函数的高阶偏导数和隐函数求导法	93	第25章 重积分在几何与物理上的应用和 n 重积分	144
第3节 利用变量替换化简偏微分方程式	99	基本知识理论方法内容提要	144
自我巩固拓展提高练习	102	典型例题解析	147
第21章 多元函数的泰勒公式、多元函数的极值和条件极值	104	第1节 重积分的几何与物理应用	147
基本知识理论方法内容提要	104	第2节 n 重积分的计算	150
典型例题解析	107	第3节 n 重积分的一些证明题	152
第1节 多元函数的中值定理及泰勒公式的应用	107	自我巩固拓展提高练习	153
第2节 多元函数的极值	108	第26章 第一型曲线积分和第二型曲线积分	155
第3节 多元函数的条件极值	110	基本知识理论方法内容提要	155
自我巩固拓展提高练习	111	典型例题解析	159
第22章 曲面的切平面和法向量	113	第1节 第一型曲线积分的计算	159
基本知识理论方法内容提要	113	第2节 平面曲线上的第二型曲线积分的计算	160
典型例题解析	114	第3节 格林公式的应用	163
第1节 空间曲线的切线和法平面	114	第4节 空间曲线上的第二型曲线积分	170
第2节 曲面的切平面与法线	116	自我巩固拓展提高练习	172
自我巩固拓展提高练习	120	第27章 曲面的面积和第一类型曲面积分	174
第23章 二重积分	122	基本知识理论方法内容提要	174
基本知识理论方法内容提要	122	典型例题解析	176
典型例题解析	123	第1节 曲面的面积的计算	176
第1节 计算二重积分的累次积分法	123	第2节 第一类型曲面积分的计算	179
第2节 计算二重积分时的变量替换法	126	自我巩固拓展提高练习	182
自我巩固拓展提高练习	130	第28章 第二类型曲面积分、高斯公式、斯托克斯公式	183
第24章 三重积分	132	基本知识理论方法内容提要	183
基本知识理论方法内容提要	132	典型例题解析	185
典型例题解析	133	第1节 第二类型曲面积分的计算	185
第1节 三重积分化为累次积分的计算法	133	第2节 高斯公式运用于计算第二类型曲面积分	189
第2节 三重积分的换元法	136		
自我巩固拓展提高练习	142		

第3节 斯托克斯公式运用于计算第 二型曲线积分	192	第1节 含参变量广义积分一致收 敛性的基本判别法	227
自我巩固拓展提高练习	194	第2节 狄利克雷判别法和阿贝尔 判别法的应用	230
第29章 梯度、散度、旋度	197	自我巩固拓展提高练习	231
基本知识理论方法内容提要	197	第33章 含参反常积分一致收敛的 性质及应用	233
典型例题解析	199	基本知识理论方法内容提要	233
第1节 梯度、散度、旋度的计 算	199	典型例题解析	234
第2节 梯度算子、散度算子、 旋度算子之间的复合 运算	200	第1节 含参变量广义积分的连续 性、可微性	234
第3节 高斯公式和格林公式的运 用	201	第2节 一致收敛的含参反常积分 性质应用于计算积分	236
自我巩固拓展提高练习	204	第3节 广义积分下的控制收敛定 理的应用	241
第30章 有势场和势函数	205	自我巩固拓展提高练习	243
基本知识理论方法内容提要	205	第34章 伽玛函数和贝塔 函数	247
典型例题解析	206	基本知识理论方法内容提要	247
第1节 保守场的判别及势函数的 求法	206	典型例题解析	248
第2节 保守场中与路径无关的积 分计算	207	第1节 贝塔函数与伽玛函数的其 他形式	248
第3节 全微分方程的解法	209	第2节 利用贝塔函数与伽玛函数 的性质计算广义积分	250
自我巩固拓展提高练习	211	第3节 利用伽玛函数的余元公式 计算广义积分	253
第31章 含参变量的常义 积分	212	自我巩固拓展提高练习	256
基本知识理论方法内容提要	212	第35章 工科数学分析考试模拟 试题及解答	258
典型例题解析	213	工科数学分析(2)期中考试 模拟试题	258
第1节 一致收敛函数列的积分极 限定理的应用	213	工科数学分析(2)期中考试 模拟试题解答	260
第2节 含参变量积分关于参变量 连续性、积分换序和求导 法则	215	工科数学分析(2)期末考试 模拟试题	262
第3节 利用对含参变量求导法计 算积分	219	工科数学分析(2)期末考试 模拟试题解答	264
自我巩固拓展提高练习	222	参考文献	269
第32章 含参积分的一致收敛 性的判别法	224		
基本知识理论方法内容提要	224		
典型例题解析	227		

第 15 章 反常积分的敛散性判别法

基本知识理论方法内容提要

本章的核心内容是反常积分的概念和判别反常积分敛散性的理论方法. 深入理解反常积分收敛定义的内涵, 逐步掌握使用判别两类反常积分敛散的理论方法和技巧.

1. 无穷限区间上的反常积分的定义和敛散性判别法

(1) 无穷限区间上的反常积分收敛的定义

1) 设函数 f 在 $[a, +\infty)$ 上有定义, 如果对于任何 $A > a$, 函数 f 在 $[a, A]$ 上均可积, 而且 $\lim_{A \rightarrow +\infty} \int_a^A f(x) dx$ 有有限的极限, 那么就把这个极限值记作 $\int_a^{+\infty} f(x) dx$, 并称积分 $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ 是收敛的, 否则称积分 $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ 是发散的.

2) 同理可给出 $\int_{-\infty}^b f(x) dx$ 和 $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = \int_{-\infty}^c f(x) dx + \int_c^{+\infty} f(x) dx (\forall c \in \mathbf{R})$ 的确切定义.

(2) 反常积分敛散性判别法

1) 对有些函数 f , 可先求出 $F(A) = \int_a^A f(x) dx$, 再研究函数 $F(A) = \int_a^A f(x) dx$ 的极限, 一般可用牛顿-莱布尼兹公式, 或通过分部积分法和换元积分法去计算完成.

2) 对一般的函数 f , 欲求出 $F(A) = \int_a^A f(x) dx$ 有时是困难的, 必须寻求别的方法. 有时只需知道其极限的存在性, 并不需求出此极限. 研究函数 $F(A)$ 的极限, 自然可用函数极限的一般方法, 然后归结为加在函数 $f(x)$ 上的条件.

3) 柯西收敛原理

积分 $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ 收敛的充要条件是 $\lim_{A \rightarrow +\infty} F(A) = \lim_{A \rightarrow +\infty} \int_a^A f(x) dx$ 有有限的极限, 这等价于对 $\forall \varepsilon > 0, \exists A_0 > a$, 只要 $A', A'' > A_0$, 便有

$$\left| \int_{A'}^{A''} f(x) dx \right| = |F(A'') - F(A')| < \varepsilon.$$

4) 绝对收敛和条件收敛

设函数 f 在 $[a, +\infty)$ 上有定义, 且对任何 $A > a$, 函数 f 在 $[a, A]$ 上均可积, 可

知函数 $|f|$ 在 $[a, A]$ 上也可积, 如果积分 $\int_a^{+\infty} |f(x)| dx$ 是收敛的, 则积分 $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ 是收敛的; 此时称积分 $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ 是绝对收敛的.

若积分 $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ 是收敛的, 但积分 $\int_a^{+\infty} |f(x)| dx$ 是发散的, 就称积分 $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ 是条件收敛的.

由此而来, 对一些积分的收敛性判别, 可通过研究其绝对收敛性而获得, 而 $|f(x)|$ 是非负函数, 所以问题转化为研究非负函数积分的收敛性判别.

5) 非负函数无穷积分的收敛判别法

若 f 是 $[a, +\infty)$ 上的非负函数 (从而 $F(A) = \int_a^A f(x) dx$ 是递增的), 则积分 $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ 收敛的充要条件是 $F(A) = \int_a^A f(x) dx$ 在 $[a, +\infty)$ 上有界.

6) 非负函数无穷积分收敛的比较判别法

设函数 f 和 g , 对充分大的 x , 成立不等式 $0 \leq f(x) \leq g(x)$, 那么

① 若 $\int_a^{+\infty} g(x) dx$ 收敛, 则 $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ 收敛;

② 若 $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ 发散, 则 $\int_a^{+\infty} g(x) dx$ 发散.

7) 设 f 和 g 都是 $[a, +\infty)$ 上的非负函数, 且对充分大的 x , $g(x) > 0$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = l$, 那么

① 当 $0 < l < +\infty$ 时, 积分 $\int_a^{+\infty} g(x) dx$ 和 $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ 同时敛散;

② 当 $l = 0$ 时, 如果 $\int_a^{+\infty} g(x) dx$ 收敛, 则 $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ 也收敛;

③ 当 $l = +\infty$ 时, 如果 $\int_a^{+\infty} g(x) dx$ 发散, 则 $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ 也发散.

此处常见的比较对象是: $\int_a^{+\infty} \frac{1}{x^p} dx$ ($a > 0$), 当 $p > 1$ 时, 积分收敛;

当 $p \leq 1$ 时, 积分发散.

8) 狄利克雷判别法

对形如 $\int_a^{+\infty} f(x)g(x) dx$ 的积分, 如果 f 和 g 满足下面两个条件:

① $F(A) = \int_a^A f(x) dx$ 在 $[a, +\infty)$ 上有界; ② g 在 $[a, +\infty)$ 上单调, 且

$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = 0$, 那么积分 $\int_a^{+\infty} f(x)g(x) dx$ 收敛.

9) 阿贝尔判别法

对形如 $\int_a^{+\infty} f(x)g(x)dx$ 的积分, 如果 f 和 g 满足下面两个条件:

① 积分 $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ 收敛; ② g 在 $[a, +\infty)$ 上单调有界, 那么积分 $\int_a^{+\infty} f(x)g(x)dx$ 收敛.

2. 瑕积分的定义和敛散性判别法

(1) 瑕积分的定义

1) 如果函数 f 在 $(a, b]$ 上有定义, 若 f 在某 $(a, a+\delta]$ 上无界, 则称 a 为 f 的瑕点.

若对任何 $0 < \eta < b-a$, 函数 f 在 $[a+\eta, b]$ 上均可积, 而且 $\lim_{\eta \rightarrow 0} F(a+\eta) = \lim_{\eta \rightarrow 0} \int_{a+\eta}^b f(x)dx$ 有有限的极限, 那么就把这个极限值记作 $\int_a^b f(x)dx$, 并称瑕积分 $\int_a^b f(x)dx$ 是收敛的; 否则, 称瑕积分 $\int_a^b f(x)dx$ 是发散的.

2) 同理可给出当 b 为 f 的瑕点时, 积分 $\int_a^b f(x)dx$;

或 a, b 均为 f 的瑕点时, $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$;

或当 $c \in (a, b)$ 为 f 的瑕点时, $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$ 的确切含义.

瑕积分和无穷区间上的反常积分可以互相转换, 因而两者的理论方法应该是类似的.

(2) 瑕积分敛散性判别法 (完全类似于无穷区间上的反常积分)

1) 对有些函数 f , 可先求出 $F(a+\eta) = \int_{a+\eta}^b f(x)dx$, 再研究函数 $F(a+\eta)$ 的极限, 一般可用牛顿-莱布尼兹公式, 或用分部积分法和换元积分法去计算完成.

2) 对一般的函数 f , 欲求出 $F(a+\eta) = \int_{a+\eta}^b f(x)dx$ 有时是困难的.

从理论上讲, 研究函数 $F(a+\eta) = \int_{a+\eta}^b f(x)dx$ 的极限, 自然用研究函数极限的一般方法, 然后归结为研究加在函数 $f(x)$ 上的条件.

3) 柯西收敛原理

积分 $\int_a^b f(x)dx$ 收敛的充要条件是 $\lim_{\eta \rightarrow 0} F(a+\eta) = \lim_{\eta \rightarrow 0} \int_{a+\eta}^b f(x)dx$ 有有限的极限, 这等价于对 $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$, 只要 $0 < \eta < \delta, 0 < \eta' < \delta$, 便有

$$\left| \int_{a+\eta}^{a+\eta'} f(x)dx \right| = |F(a+\eta') - F(a+\eta)| < \varepsilon.$$

4) 绝对收敛和条件收敛

设函数 f 在 $(a, b]$ 上有定义, 若对任何 $0 < \eta < b - a$, 函数 f 在 $[a + \eta, b]$ 上均可积, 从而函数 $|f|$ 在 $[a + \eta, b]$ 上均可积, 如果积分 $\int_a^b |f(x)| dx$ 是收敛的, 则积分 $\int_a^b f(x) dx$ 是收敛的; 此时称积分 $\int_a^b f(x) dx$ 是绝对收敛的.

若积分 $\int_a^b f(x) dx$ 是收敛的, 而积分 $\int_a^b |f(x)| dx$ 是发散的, 就称积分 $\int_a^b f(x) dx$ 是条件收敛的.

这样一来对某些积分的收敛性判别, 可通过研究其绝对收敛性而获得, 又 $|f(x)|$ 是非负函数, 所以问题转化为研究非负函数积分的收敛性判别.

5) 非负函数瑕积分的收敛判别法

若 f 是 $(a, b]$ 上的非负函数, 则积分 $\int_a^b f(x) dx$ 收敛的充要条件是 $F(a + \eta) = \int_{a+\eta}^b f(x) dx$ 在 $(0, b - a]$ 上有界.

6) 非负函数瑕积分收敛的比较判别法

设函数 f 和 g , 如对充分靠近 a 的 $x (x > a)$, 成立不等式 $0 \leq f(x) \leq g(x)$, 那么

① 若 $\int_a^b g(x) dx$ 收敛, 则 $\int_a^b f(x) dx$ 收敛;

② 若 $\int_a^b f(x) dx$ 发散, 则 $\int_a^b g(x) dx$ 发散.

7) 设 f 和 g 都是 $(a, b]$ 上的非负函数, 且对充分靠近 a 的 $x (x > a)$, $g(x) > 0$, $\lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f(x)}{g(x)} = l$, 那么

① 当 $0 < l < +\infty$ 时, 积分 $\int_a^b g(x) dx$ 和 $\int_a^b f(x) dx$ 同时敛散;

② 当 $l = 0$ 时, 如果 $\int_a^b g(x) dx$ 收敛, 则 $\int_a^b f(x) dx$ 也收敛;

③ 当 $l = +\infty$ 时, 如果 $\int_a^b g(x) dx$ 发散, 则 $\int_a^b f(x) dx$ 也发散.

常用的重要比较对象是: $\int_a^b \frac{1}{(x-a)^q} dx$, 当 $q < 1$ 时, 积分收敛; 当 $q \geq 1$ 时, 积分发散.

8) 狄利克雷判别法

对形如 $\int_a^b f(x)g(x) dx$ 的积分, 如果 f 和 g 满足下面两个条件:

① $F(a + \eta) = \int_{a+\eta}^b f(x) dx$ 在 $\eta \in (0, b - a]$ 上有界;

② g 在 $(a, b]$ 上单调, 且 $\lim_{x \rightarrow a^+} g(x) = 0$, 那么积分 $\int_a^b f(x)g(x)dx$ 收敛.

9) 阿贝尔判别法

对形如 $\int_a^b f(x)g(x)dx$ 的积分, 如果 f 和 g 满足下面两个条件:

① 积分 $\int_a^b f(x)dx$ 收敛;

② g 在 $(a, b]$ 上单调有界, 那么积分 $\int_a^b f(x)g(x)dx$ 收敛.

典型例题解析

第1节 反常积分的计算

例1 思考题

(1) 设积分 $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ 收敛, 但 $\int_a^{+\infty} g(x)dx$ 发散, 那么 $\int_a^{+\infty} (f(x) + g(x))dx$ 的收敛性如何?

答 该积分必定发散.

(2) 设积分 $\int_a^{+\infty} f(x)dx$, $\int_a^{+\infty} g(x)dx$ 都发散, 那么 $\int_a^{+\infty} (f(x) + g(x))dx$ 收敛性如何?

答 收敛性不能确定, 观察反例即可.

例如, $\int_1^{+\infty} \left(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x}\right)dx$, $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x}dx$ 都发散, 但 $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2}dx$ 收敛.

(3) 设积分 $\int_a^{+\infty} f(x)dx$, $\int_a^{+\infty} g(x)dx$ 都收敛, 那么 $\int_a^{+\infty} f(x)g(x)dx$ 收敛性如何?

答 收敛性不能确定, 观察反例即可.

例如, $\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{\sqrt{x}}dx$, $\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x}dx$ 都收敛, 但 $\int_1^{+\infty} \frac{\sin x \sin x}{x}dx$ 发散.

(4) 设积分 $\int_a^{+\infty} f(x)dx$, $\int_a^{+\infty} g(x)dx$ 都发散, 那么 $\int_a^{+\infty} f(x)g(x)dx$ 收敛性如何?

答 收敛性不能确定, 观察反例即可.

例如, $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x}dx$, $\int_1^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x}}dx$ 都发散, 但 $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x\sqrt{x}}dx$ 收敛.

(5) 设积分 $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ 收敛, $\int_a^{+\infty} g(x) dx$ 发散, 那么 $\int_a^{+\infty} f(x)g(x) dx$ 收敛性如何?

答 收敛性不能确定, 观察反例即可.

例如, $\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{\sqrt{x}} dx$ 收敛, $\int_1^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} dx$ 发散, 但 $\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx$ 收敛;

又如, $\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{\sqrt{x}} dx$ 收敛, $\int_1^{+\infty} \sin x dx$ 发散, $\int_1^{+\infty} \frac{\sin x \sin x}{\sqrt{x}} dx$ 发散.

(6) 设瑕积分 $\int_a^b f(x) dx$, $\int_a^b g(x) dx$ 都收敛, 那么 $\int_a^b f(x)g(x) dx$ 收敛性如何?

答 收敛性不能确定, 观察反例即可.

例如, $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}} dx$ 收敛, 但 $\int_0^1 \frac{1}{x} dx$ 发散; 也即 $\int_a^b f(x) dx$ 收敛, 未必有 $\int_a^b f^2(x) dx$ 收敛.

(7) 设积分 $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ 收敛, 是否必有 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$.

答 未必.

例如, $f(x) = \frac{x}{1+x^6 \sin^2 x}$, 尽管 $\int_0^{+\infty} f(x) dx$ 收敛, 但当 $x \rightarrow +\infty$ 时 $f(x)$ 不趋于 0.

此例还给我们提供了一个重要例子:

$F(x) = \int_0^x f(t) dt$ 在 $[0, +\infty)$ 上递增有界, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ 有有限的极限, $F(x) = \int_0^x f(t) dt$ 在 $[0, +\infty)$ 上连续可微且一致连续, 但 $F'(x) = f(x) = \frac{x}{1+x^6 \sin^2 x}$ 在 $[0, +\infty)$ 上无界.

例 2 求下列积分的值:

$$(1) \int_2^{+\infty} \frac{1}{x^2 - 1} dx;$$

$$(2) \int_0^{+\infty} \frac{1}{(x^2 + p)(x^2 + q)} dx \quad (p, q > 0, p \neq q);$$

$$(3) \int_0^{+\infty} e^{-ax^2} x dx \quad (a > 0);$$

$$(4) \int_0^{+\infty} e^{-ax} \sin bx dx \quad (a > 0);$$

$$(5) \int_e^{+\infty} \frac{1}{x(\ln x)^p} dx.$$

解 利用广义牛顿-莱布尼兹公式.

$$\begin{aligned}
 (1) \int_2^{+\infty} \frac{1}{x^2-1} dx &= \int_2^{+\infty} \frac{1}{2} \left(\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+1} \right) dx = \int_2^{+\infty} \frac{1}{2} \left(\ln \frac{x-1}{x+1} \right)' dx \\
 &= \frac{1}{2} \left(\ln \frac{x-1}{x+1} \right) \Big|_2^{+\infty} = \frac{1}{2} \ln 3;
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (2) \int_0^{+\infty} \frac{1}{(x^2+p)(x^2+q)} dx &= \frac{1}{q-p} \int_0^{+\infty} \left(\frac{1}{x^2+p} - \frac{1}{x^2+q} \right) dx \\
 &= \frac{1}{q-p} \left[\frac{1}{\sqrt{p}} \arctan \frac{x}{\sqrt{p}} - \frac{1}{\sqrt{q}} \arctan \frac{x}{\sqrt{q}} \right] \Big|_0^{+\infty} \\
 &= \frac{1}{q-p} \frac{\pi}{2} \left(\frac{1}{\sqrt{p}} - \frac{1}{\sqrt{q}} \right);
 \end{aligned}$$

$$(3) \int_0^{+\infty} e^{-ax^2} x dx = \int_0^{+\infty} \left[-\frac{1}{2a} e^{-ax^2} \right]' dx = \left[-\frac{1}{2a} e^{-ax^2} \right] \Big|_0^{+\infty} = \frac{1}{2a};$$

$$\begin{aligned}
 (4) \text{ 因为 } I &= \int_0^{+\infty} e^{-ax} \sin bx dx = \int_0^{+\infty} \left(-\frac{1}{a} e^{-ax} \right)' \sin bx dx \\
 &= \left(-\frac{1}{a} e^{-ax} \right) \sin bx \Big|_0^{+\infty} + \frac{b}{a} \int_0^{+\infty} e^{-ax} \cos bx dx \\
 &= \frac{b}{a} \int_0^{+\infty} \left(-\frac{1}{a} e^{-ax} \right)' \cos bx dx \\
 &= \left(-\frac{b}{a^2} e^{-ax} \right) \cos bx \Big|_0^{+\infty} - \frac{b^2}{a^2} \int_0^{+\infty} e^{-ax} \sin bx dx \\
 &= \frac{b}{a^2} - \frac{b^2}{a^2} I,
 \end{aligned}$$

$$\text{所以 } I = \frac{b}{a^2 + b^2}, \text{ 即 } \int_0^{+\infty} e^{-ax} \sin bx dx = \frac{b}{a^2 + b^2};$$

$$(5) \int_e^{+\infty} \frac{1}{x(\ln x)^p} dx = \int_e^{+\infty} \frac{1}{(\ln x)^p} d(\ln x) = \int_1^{+\infty} \frac{1}{y^p} dy = \begin{cases} \frac{1}{p-1}, & p > 1 \\ +\infty, & p \leq 1 \end{cases}.$$

例3 计算(1) $\int_0^{+\infty} \frac{1+x^2}{1+x^4} dx$; (2) $\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+x^4} dx$; (3) $\int_0^{+\infty} \frac{x^2}{1+x^4} dx$.

$$\begin{aligned}
 \text{解} \quad (1) \int_0^{+\infty} \frac{1+x^2}{1+x^4} dx &= \int_0^{+\infty} \frac{\frac{x^2}{1} + 1}{\frac{1}{x^2} + x^2} dx = \int_0^{+\infty} \frac{1}{\left(x - \frac{1}{x}\right)^2 + 2} d\left(x - \frac{1}{x}\right) \\
 &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{y^2 + 2} dy = \frac{1}{\sqrt{2}} \arctan \frac{y}{\sqrt{2}} \Big|_{-\infty}^{+\infty} = \frac{\pi}{\sqrt{2}};
 \end{aligned}$$

$$(2) \text{ 由于 } I = \int_0^{+\infty} \frac{1}{1+x^4} dx \stackrel{x=\frac{1}{y}}{=} \int_0^{+\infty} \frac{y^2}{1+y^4} dy = \int_0^{+\infty} \frac{x^2}{1+x^4} dx,$$

$$2I = \int_0^{+\infty} \frac{1+x^2}{1+x^4} dx = \frac{\pi}{\sqrt{2}},$$

$$\text{所以 } \int_0^{+\infty} \frac{1}{1+x^4} dx = \frac{\pi}{2\sqrt{2}};$$

$$(3) \text{ 由(1)(2) 得 } \int_0^{+\infty} \frac{x^2}{1+x^4} dx = \frac{\pi}{2\sqrt{2}}$$

$$\text{例 4 计算(1) } \int_0^{+\infty} \frac{1}{1+x^3} dx; (2) \int_0^{+\infty} \frac{x}{1+x^3} dx.$$

$$\text{解 (1) } I = \int_0^{+\infty} \frac{1}{1+x^3} dx \stackrel{x=\frac{1}{y}}{=} \int_0^{+\infty} \frac{y}{1+y^3} dy = \int_0^{+\infty} \frac{x}{1+x^3} dx,$$

$$2I = \int_0^{+\infty} \frac{1+x}{1+x^3} dx = \int_0^{+\infty} \frac{1}{x^2-x+1} dx = \int_0^{+\infty} \frac{1}{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}} dx$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\frac{3}{4}}} \arctan \frac{x-\frac{1}{2}}{\sqrt{\frac{3}{4}}} \Big|_0^{+\infty} = \frac{2}{\sqrt{3}} \left(\frac{\pi}{2} - \arctan \left(-\frac{1}{\sqrt{3}} \right) \right)$$

$$= \frac{2}{\sqrt{3}} \left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{6} \right) = \frac{4\sqrt{3}}{9} \pi,$$

$$\text{故 } \int_0^{+\infty} \frac{1}{1+x^3} dx = \frac{2\sqrt{3}}{9} \pi;$$

$$(2) \text{ 由(1) 可得 } \int_0^{+\infty} \frac{x}{1+x^3} dx = \frac{2\sqrt{3}}{9} \pi.$$

例 5 求下列瑕积分的值:

$$(1) \int_0^1 \frac{dx}{(2-x)\sqrt{1-x}};$$

$$(2) \int_{-1}^1 \frac{dx}{(2-x^2)\sqrt{1-x^2}};$$

$$(3) \int_0^1 \frac{\arcsin \sqrt{x}}{\sqrt{x(1-x)}} dx;$$

$$(4) \int_0^1 (\ln x)^n dx \quad (n \in \mathbf{N}^*);$$

$$(5) \int_0^1 \frac{(1-x)^n}{\sqrt{x}} dx.$$

$$\text{解 (1) } \int_0^1 \frac{dx}{(2-x)\sqrt{1-x}} \stackrel{1-x=y^2}{=} \int_0^1 \frac{-2ydy}{(1+y^2)y} = 2 \int_0^1 \frac{dy}{1+y^2}$$

$$= 2 \arctan y \Big|_0^1 = 2 \times \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2};$$

$$\begin{aligned} (2) \int_{-1}^1 \frac{dx}{(2-x^2)\sqrt{1-x^2}} &= 2 \int_0^1 \frac{dx}{(2-x^2)\sqrt{1-x^2}} \\ &\stackrel{x=\sin t}{=} 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos t dt}{(1+\cos^2 t)\cos t} \\ &= 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dt}{1+\cos^2 t} = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dt}{2\cos^2 t + \sin^2 t} \\ &= 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d(\tan t)}{2+\tan^2 t} = 2 \frac{1}{\sqrt{2}} \arctan \frac{\tan t}{\sqrt{2}} \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} \\ &= 2 \frac{1}{\sqrt{2}} \times \frac{\pi}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2} \pi; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (3) \int_0^1 \frac{\arcsin \sqrt{x}}{\sqrt{x(1-x)}} dx &= \int_0^1 2 \frac{\arcsin \sqrt{x}}{\sqrt{1-x}} d(\sqrt{x}) \\ &= \int_0^1 2(\arcsin \sqrt{x}) d(\arcsin \sqrt{x}) \\ &= (\arcsin \sqrt{x})^2 \Big|_0^1 = \left(\frac{\pi}{2}\right)^2 = \frac{\pi^2}{4}; \end{aligned}$$

$$(4) \text{ 记 } I_n = \int_0^1 (\ln x)^n dx, I_1 = \int_0^1 (\ln x) dx = x \ln x \Big|_0^1 - \int_0^1 x \cdot \frac{1}{x} dx = -1,$$

$$\begin{aligned} I_n &= \int_0^1 (\ln x)^n dx = x(\ln x)^n \Big|_0^1 - \int_0^1 x \cdot n(\ln x)^{n-1} \frac{1}{x} dx \\ &= -n \int_0^1 (\ln x)^{n-1} dx = -n I_{n-1} = \cdots = (-1)^n n!; \end{aligned}$$

$$(5) \int_0^1 \frac{(1-x)^n}{\sqrt{x}} dx \stackrel{x=y^2}{=} \int_0^1 \frac{(1-y^2)^n}{y} 2y dy = 2 \int_0^1 (1-y^2)^n dy,$$

$$\text{记 } I_n = \int_0^1 (1-y^2)^n dy, I_1 = \int_0^1 (1-y^2) dy = \frac{2}{3},$$

$$\begin{aligned} I_n &= \int_0^1 (1-y^2)^n dy = y(1-y^2)^n \Big|_0^1 - \int_0^1 yn(1-y^2)^{n-1}(-2y) dy \\ &= 2n \int_0^1 y^2(1-y^2)^{n-1} dy = 2n \int_0^1 [-(1-y^2)^n + (1-y^2)^{n-1}] dy \\ &= -2n I_n + 2n I_{n-1}, \end{aligned}$$

$$\text{于是 } I_n = \frac{2n}{2n+1} I_{n-1} = \frac{2n}{2n+1} \times \frac{2(n-1)}{2n-1} \times \cdots \times \frac{4}{5} \times \frac{2}{3}.$$

例6 计算下列两个积分的比值: