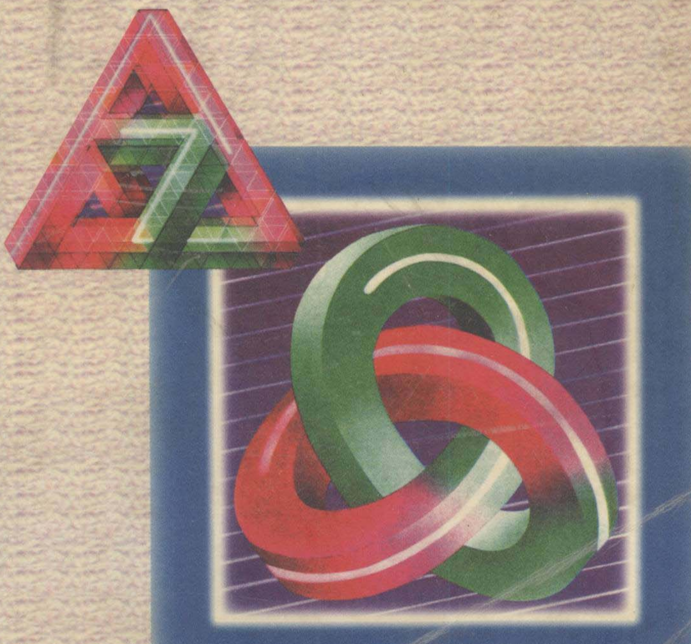
现代数学基础丛书

概率论基础

● 严士健 王隽骧 刘秀芳 著



科学出版社

现代数学基础丛书

概率论基础

严士健　王隽骧　刘秀芳 著

科学出版社

1997

内 容 简 介

本书用测度论的观点论述概率论的基本概念,如概率、随机变量与分布函数、数学期望与条件数学期望和中心极限定理等. 本书特点是把测度论的基本内容与概率论的基本内容结合在一起讲述,论述严谨,条理清楚,便于自学. 凡学过概率论基础课的读者都能阅读本书. 每节后附有习题,以便加深理解书中的内容.

读者对象是大学数学系高年级学生、研究生、教师及科学工作者.

现代数学基础丛书

概 率 论 基 础

严士健 王隽骧 刘秀芳 著

责任编辑 刘嘉善

科 学 出 版 社 出 版

北京东黄城根北街 16 号

邮政编码:100717

北京朝阳科地亚印刷厂 印刷

新华书店北京发行所发行 各地新华书店经售

*

1982年8月第一版 开本:850×1168 1/32

1997年8月第三次印刷 印张:15 3/8

印数:25601—28620 字数:403 000

ISBN 7-03-005993-X/O·928

定价:25.00 元

《现代数学基础丛书》编委会

序　　言

概率论是从数量上研究随机现象的规律性的学科．它在自然科学、技术科学、社会科学和管理科学中有着广泛的应用．因此从本世纪三十年代以来，发展甚为迅速，新的分支学科不断涌现，成为近代数学的一个重要组成部分．

概率论与数理统计的严格理论是以测度论为基础的．为了适应这方面需要，曾经（或将要）出版一些测度论的书籍．这当然都是很必要的．但是在我们的教学实践中深深感到，有些学过概率论与数理统计基础课而想继续自学深造的读者，在学了测度论以后，常常不能运用自如地将它用来处理概率论的基础问题．还有，一些有关多维随机变量的内容很多书籍认为和一维处理方法类似，只是述而不证，实际上在某些重要的细节方面还是有所不同的，读者在这些方面也难于获得参考材料．因此，我们认为，为了阐明这些问题并使学生在学习测度论时能更好地明确目的性，编写一本用测度论的观点论述概率论的书，对概率论专业的教师和学生来说，也许是有参考意义的．

本书的目的在于向那些已学过相当于大学概率论基础课而希望进一步学习严格数学理论的读者提供一个基础读物．它包括了近代概率论与数理统计所必需的测度论内容、近代概率论的基本概念、工具及其性质的严格论述，特别是条件概率、条件数学期望、条件分布及多元特征函数，其中有些内容可能是新的．此外在保持测度论的系统的同时，还特别注意了应用测度论来严格处理大学概率论基础课中所没有讲清楚的问题．对于多元随机变量的分布、特征函数及其有关性质也作了严格的处理．本书的预备知识是大学数学系的数学分析、高等代数及复变函数论．为便于自学，本书对概念的阐释和推理的叙述都比较详细．

本书的初稿是六十年代我和王隽骧同志讲授概率选修课时合写的讲义的一部分. 这次由我和刘秀芳同志进行了讨论，由刘秀芳同志执笔，对讲义进行全面的整理与修改，并在全国师范院校概率统计学术会议以及北京师范大学 79 届的概率论研究生及进修教师班上讲授过.

作者们深深感谢张禾瑞教授、王梓坤教授、孙永生教授和侯振挺教授的鼓励与关心；感谢陈木法同志以及教研室其他同志对讲义的修改、整理工作的支持和关心. 感谢北京师范大学 78、79 届的概率论专业研究生和进修教师，他们阅读了大部分修改稿，对习题进行了详细的检查，提出了不少中肯的意见. 感谢徐承彝、朱作宾二同志详细地阅读了大部分手稿，提出了很多宝贵的修改意见.

由于作者们的水平所限，书中一定存在着不少缺点和错误，恳请批评指正.

严 士 健

1980 年 6 月于北京师范大学

目　　录

第一章　概率与测度

本章将在回顾概率概念的实际背景的基础上，给出概率与测度的定义；讨论今后常用到的一些集类(半集代数、集代数、σ-代数等)的基本性质；讨论测度的性质及测度扩张问题；最后讨论独立事件类的扩张问题.

§1. 引　　言

概率论是研究随机现象中的数量规律的科学.

在各种自然科学(包括数学)中，大部分现象的规律是以下列形式表达的："只要条件 $\mathscr{C}$ 一经实现，则事件 A 必然发生(或必然不发生)."例如，"如果平面图形是三角形(条件 $\mathscr{C}$ 实现)，那么这个图形的内角和是 180° (事件 A 一定发生)"；又如"一个力作用于一物体时(条件 $\mathscr{C}$ 实现)，该物体必产生加速度(事件 A 发生)"；再如"在一个标准大气压，温度 100℃ 的条件下，水一定沸腾." 以下称在条件 $\mathscr{C}$ 下必然发生的事件 A 为**条件 $\mathscr{C}$ 下的必然事件**(或简称必然事件)，称在条件 $\mathscr{C}$ 下必然不发生的事件 A 为**条件 $\mathscr{C}$ 下的不可能事件**(或简称不可能事件).

与必然事件不同，在客观世界中还存在这样的事件：在条件 $\mathscr{C}$ 下，事件 A 可能发生也可能不发生. 我们以后将在条件 $\mathscr{C}$ 实现时，可能发生也可能不发生的事件叫做**条件 $\mathscr{C}$ 下的随机事件**（或简称随机事件). 下面我们举一些例子.

例 1. 从某工厂的某种产品中抽出的一件产品可能是合格品，也可能不是. 在这个例子中，条件 $\mathscr{C}$ 是"从某工厂的某种产品中抽出一件产品"，事件 A 是"抽得的产品是合格品"，显然 A 是条件 $\mathscr{C}$ 下的随机事件. 同样，将"从某工厂的某种产品中抽得 n 件产

品"看作条件$\mathscr{C}$,则"其中恰有 $k(0 \leqslant k \leqslant n)$件合格品"是在$\mathscr{C}$之下的随机事件.

例 2. 在无线电中继通讯中,由于种种原因,有时一个或几个中继站工作失效,这时通讯就中断了. 这种通讯中断现象通常是具有偶然性的. 因此"通讯中断"是"无线电中继通讯"这一条件下的随机事件. 若有 n 个中继站, $0\leqslant k \leqslant n$,则"恰有 k 个中继站工作失效"是"n 个中继站的无线电中继通讯"条件下的随机事件.

例 3. 对于一个公用电话系统来说,电话局收到用户的呼叫是具有偶然性的,因此"在时间间隔 $(a, a+t]$ 内,电话局收到用户的 k 次呼叫"是"这个公用电话系统在 $(a, a+t]$ 内工作"的条件下的随机事件.

例 4. 铀的放射性原子经过放出粒子而变成其它元素(物理学称为蜕变),但是每个放射性原子什么时候发生蜕变是具有偶然性的. 因此"在时间间隔 $(a, a+t]$ 内,给定的一块放射性铀"(这是条件$\mathscr{C}$)"有 n 个原子蜕变"是一个随机事件.

例 5. (a) 某一射手向一目标进行一次或多次射击时,可能击中目标,也可能没有击中目标,因此"射手击中目标"是"该射手向目标进行一次射击"条件下的随机事件,也可以是"该射手向目标进行 n 次射击"条件下的随机事件.

(b) "弹着点距目标的偏差为 x"及"偏差在 x_1, x_2 之间"都是"进行一次射击"条件下的随机事件."n 个弹着点与目标的偏差恰有 k 个小于x"是"进行 n 次射击"条件下的随机事件.

(c) 如果在目标所在的平面上建立坐标系(不妨设目标位于坐标原点),则"弹着点 (ξ, η) 位于区域 $\{(x, y): x_1 \leqslant x < x_2, y_1 \leqslant y < y_2\}$ 内"是"进行一次射击"的条件下的随机事件.

例 6. "一个在液体中悬浮着的质点(例如花粉)在时刻 t 的位置 (ξ, η, ζ) 位于区域 $\{(x, y, z): x_1 \leqslant x < x_2, y_1 \leqslant y < y_2, z_1 \leqslant z < z_2\}$ 内"是随机事件.

下面我们引入概率的概念并说明概率的直观含义.

研究随机事件有两种途径:一种自然的想法就是像我们研究

必然事件那样，去进一步寻求随机事件发生的条件，但是只要对上面举出的一些例子分析一下，就可以发现这种做法几乎是不可能的，而且也是不必要的．例如对于例3，要想事先找出“在$(a,a+t]$内，电话局收到用户的k次呼叫”这一随机事件发生的条件是不可能的．另一方面，电话局所关心的只是大致有多少次呼叫，从而估计电话局的线路及接线员是否够用，是否有浪费现象．因此寻求事件确切发生的条件的要求也是不必要的．既然电话局所关心的问题是“大致”有多少次呼叫，因此就产生了求这个随机事件出现的“可能性”的想法．

这种寻求随机事件“发生的可能性”的想法，在人们实践中是很自然的．例如，人们对于工厂生产好坏的判别标准之一是它的产品的合格率，即产品中合格品个数与产品总数的比值；一种药物对某种疾病的疗效用治愈率，即使用过该药的患者中治愈人数与总人数之比来判断；对于射手的射击技术的判别标准之一是它的命中率，即射击命中次数与射击总数之比．合格率、治愈率及命中率都是人们所关心的随机事件发生的可能性的一种描述．从这些例子可以概括出频数与频率的概念如下：若在$\mathscr{C}$的n次实现之下，事件A发生的次数是μ_A，称它为A在$\mathscr{C}$ n次实现之下的**频数**；而称$\frac{\mu_A}{n}$为事件A在$\mathscr{C}$ n次实现之下的**频率**(简称频率)，记作ν_A，它表示A在$\mathscr{C}$之下发生的可能性．当进一步考察A的频率ν_A时，我们发现ν_A对于$\mathscr{C}$的不同的n次实现一般来说是不同的，但是大量的实践表明，对于固定的随机事件A来说，当n(条件$\mathscr{C}$实现的次数)较大时，ν_A有经常接近于一个常数$P(A)$的趋势，并且当n越大时，接近的程度也就更为显著，接近的次数也越经常．因此有理由认为这个与A有关的常数$P(A)$刻划了A的一种重要特性——事件A发生的可能性．我们称$P(A)$为**随机事件A在条件$\mathscr{C}$下的概率**.

实际上，上面提出的概率概念只是一个说明，并不能作为数学定义．为了将概率论建立在严格的基础上，首先要对随机事件给出

数学定义，然后给出概率的定义．下面几节将逐步进行这一工作．

§2. 事件与集合

本节目的是在对随机事件进一步分析的基础上，将它定义成某一与条件有关的集(基本事件空间)的子集，然后引进事件运算的概念．

§2.1 基本事件空间与事件

从上一节例子可以看出：在给定条件 $\mathscr{C}$ 下，随机事件通常有很多个．我们现在来研究这些随机事件能否由一组“基本”事件“组成”的问题．先看一些例子．

例 1. 设 $\mathscr{C}$ 表示“从某工厂的某种产品中抽出 n 件”这一条件．如果我们感兴趣的是研究在 $\mathscr{C}$ 下抽得产品中的合格品件数的问题，那么很自然地要考虑随机事件 A_k, $k=0, 1, \cdots, n$, 其中 A_k 表示“抽得的产品中合格品的件数为 k”；一般，可以考虑合格品的件数在某一范围之内的事件，例如 $\widetilde{B}_k$——“抽得产品中合格品的件数不超过 k”这类事件；更一般的情况是考虑事件 $\widetilde{F}_\Lambda$，它表示事件“抽得产品中合格品的件数 $k\in\Lambda$”，其中 Λ 是整数集 $Z_n \triangleq \{0, 1, 2, \cdots, n\}$[1] 的任一子集．也就是说，若 $\Lambda=\{k_1, \cdots, k_m\}\subset Z_n$，则 $\widetilde{F}_\Lambda$ 表示事件“抽得产品中合格品的件数为 k_1，或 $k_2, \cdots$，或 k_m”．

现在我们来分析一下事件 A_k, $\widetilde{B}_k$ 及 $\widetilde{F}_\Lambda$ 之间的关系．容易看到，$\widetilde{B}_k$ 也可以表达成“抽得产品中合格品的件数是 0，或是 1，…，或是 k”．于是在条件 $\mathscr{C}$ 的每一次实现之下(即每“抽 n 件产品”一次)，事件 $\widetilde{B}_k$ 发生当且仅当 $A_0, A_1, \cdots, A_k$ 有一个发生．这说明事件 $\widetilde{B}_k$ 与事件集 $\{A_0, A_1, \cdots, A_k\}$ 相互唯一决定(实际上 $\widetilde{B}_k$ 可以表达成“A_0，或 $A_1, \cdots$，或 A_k”)．一般地，由上一段对

---

1) 符号 $\triangleq$ 读作“定义作”．

$\tilde{F}_\Lambda$ 的解释可知：在条件 $\mathscr{C}$ 的每一次实现之下，事件 $\tilde{F}_\Lambda$ 发生当且仅当 $A_{k_1}, \cdots, A_{k_m}$ 有一发生，从而事件 $\tilde{F}_\Lambda$ 与事件集 $\{A_{k_1}, \cdots, A_{k_m}\}$ 相互唯一决定. 这样，我们就可以把事件 $\tilde{F}_\Lambda$ 与事件集 $\{A_k: k\in\Lambda\}$ 等同起来. 又 $\tilde{F}_{Z_n}$ 显然是 $\mathscr{C}$ 之下的必然事件，按照上述约定，它与事件集 $\{A_k: k\in Z_n\}$ 等同. 另一方面，在 $\mathscr{C}$ 的每一次实现之下，事件 $A_0, A_1, \cdots, A_n$ 有一且仅有一发生. 因此从考虑 $\mathscr{C}$ 之下合格品件数问题的角度来看，事件 $A_0, A_1, \cdots, A_n$ 可以唯一地表示一切事件 $\tilde{F}_\Lambda$, $\Lambda\subset Z_n$;（同时它本身也“不必再分细”）从而可以认为：事件 $A_0, A_1, \cdots, A_n$ 是全体基本事件；事件集 $\{A_0, A_1, \cdots, A_n\}\triangleq\Omega$ 是基本事件空间；它本身 (Ω) 表示在条件 $\mathscr{C}$ 下的必然事件；$\tilde{F}_\Lambda$ 定义为 Ω 的子集 $F_\Lambda\triangleq\{A_k: k\in\Lambda\}$.

例 2（参看 § 1 例 3）. 用 $\mathscr{C}$ 表示“某公用电话系统在时间间隔 $(a, a+t]$ 内工作”这一条件. 假定我们希望研究的是总机在 $(a, a+t]$ 内收到用户的呼叫次数问题. 那么和例 1 类似，可以只考虑事件 $\tilde{F}_\Lambda$: 现在 $\tilde{F}_\Lambda$ 表示“总机在 $(a, a+t]$ 内收到用户的呼叫次数 $k\in\Lambda$”，其中 Λ 是非负整数集 $Z_+=\{0, 1, 2, \cdots\}$ 的任一子集.

令 $A_k=\tilde{F}_{\{k\}}$, $k\in Z_+$, 和例 1 的分析完全类似（建议读者仔细分析一下）可以得到下述结论：在条件 $\mathscr{C}$ 下，考虑总机收到用户呼叫次数的问题时，可以认为事件集 $\Omega=\{A_k, k\in Z_+\}$ 是基本事件空间，它本身表示在条件 $\mathscr{C}$ 下的必然事件，$\tilde{F}_\Lambda$ 定义为 Ω 的子集 $F_\Lambda\triangleq\{A_k: k\in\Lambda\}$.

例 3（参看 § 1 例 5）. 用 $\mathscr{C}$ 表示“某射手向目标进行一次射击”这一条件. 如果我们希望研究弹着点与目标的偏差问题，那么一般可以只考虑这样一些随机事件：$\tilde{B}_I$——“弹着点与目标的偏差 $x\in I$”，其中 I 表示非负实半轴 $R_+\triangleq[0, \infty)$ 的任一子区间.

令 ω_x, $x\in R_+$ 表示随机事件“弹着点与目标的偏差为 x”，和例 1 的分析类似可以得出结论：ω_x, $x\in R_+$, 是基本事件，集 $\Omega=\{\omega_x: x\in R_+\}$ 是基本事件空间，$\tilde{B}_I$, $I\subset R_+$, 定义为 Ω 的子集 $B_I\triangleq\{\omega_x: x\in I\}$.

例 4 (参看 § 1 例 6). 用 $\mathscr{C}$ 表示"液体中有一悬浮质点"这一条件，我们希望研究这一质点在时刻 t 的位置问题. 可以只考虑随机事件 $\widetilde{B}_D=$"$(\xi, \eta, \zeta)\in D$"，其中 D 表示三维直角坐标空间 $R^{(3)}$ 的某一区域(例如不妨先只考虑 D 是可求体积的区域)，(ξ, η, ζ) 表示该悬浮质点在时刻 t 的位置.

以 $\omega_{(x,y,z)}$，$(x, y, z)\in R^{(3)}$，表示随机事件"$(\xi, \eta, \zeta)=(x, y, z)$"即"悬浮质点在时刻 t 的位置在 (x, y, z) 处". 那么和前面的分析类似，可以认为 $\Omega=\{\omega_{(x,y,z)}:(x, y, z)\in R^{(3)}\}$ 为基本事件空间，Ω 表示在条件 $\mathscr{C}$ 下的必然事件. 而 $\widetilde{B}_D$ 定义为 $B_D\triangleq\{\omega_{(x,y,z)}:(x, y, z)\in D\}$.

这些例子说明，当我们希望研究某随机事件类 $\widetilde{\mathfrak{E}}$ 时，可以找到一族在条件 $\mathscr{C}$ 下"不能或不必再分"(对 $\widetilde{\mathfrak{E}}$ 来说) 的随机事件，它们组成的集合记作 Ω，使得在 $\mathscr{C}$ 的每次实现之下有一且仅有一 $\omega\in\Omega$ 发生；而且随机事件类 $\widetilde{\mathfrak{E}}$ 与 Ω 的某一子集类 $\mathfrak{E}$ 按下述法则一一对应：$\widetilde{A}\in\widetilde{\mathfrak{E}}$ 与 $A\in\mathfrak{E}$ 对应是指在 $\mathscr{C}$ 的每次实现之下，$\widetilde{A}$ 发生当且仅当有一 $\omega\in A$ 发生. 根据这个法则，我们今后将事件 $\widetilde{A}$ 与 A 等同，而且认为研究条件 $\mathscr{C}$ 下的随机事件类 $\widetilde{\mathfrak{E}}$，就是研究相应的集 Ω 的子集类 $\mathfrak{E}$，而 Ω 称为 $\mathscr{C}$ 下的**基本事件空间**，$\mathfrak{E}$ 中的元(Ω 的子集)称为(随机)**事件**，Ω 本身是**必然事件**，空集 $\emptyset$ 是**不可能事件**.

这里我们要强调指出"不能或不必再分"是相对于所考虑的随机事件类而言，并不是绝对的. 事实上，在给定条件 $\mathscr{C}$ 下，基本事件和基本事件空间的选取并不是唯一的，而且对具体问题来说，基本事件选取恰当，常常有助于更快地解决问题.

例 5. 在例 1 中，我们也可以选取另外的事件为基本事件. 我们用 ω 表示"抽出一件产品是合格品"这一事件，用 ω^c 表示"抽出一件产品不是合格品"这一事件；然后用 n 元组 $(\omega_1, \omega_2, \cdots, \omega_n)$，其中每一 ω_k 可取 ω 或 ω^c，表示依次抽出 n 件产品所得到的随机事件. 这样，每抽出 n 件产品，下列 2^n 个随机事件

$$(\omega_1, \omega_2, \cdots, \omega_n), \quad \omega_m=\omega \text{ 或 } \omega^c, \quad m=1, 2, \cdots, n. \qquad (1)$$

有一且仅有一发生． 于是由 (1) 中所列出的 2^n 个随机事件作成的集就是基本事件空间． 此时例 1 中的事件 A_k 在目前情况下便不再是基本事件，而是 (1) 中恰有 k 个 $\omega_m=\omega$ 的那些基本事件组成的集．这样的基本事件共有 $\binom{n}{k}$ 个，其中 $\binom{n}{k}$ 表示 n 个不同元素中取 k 个的组合数．

例 6. 在例 3 中，有时也可以选另外的事件． 我们采取 § 1 例 5(c) 的办法．弹着点的坐标以 (ξ,η) 表示，以 $\lambda_{(x,y)}$ 表示随机事件"$(\xi,\eta)=(x,y)$"，$(x,y)\in R^{(2)}$（二维直角坐标空间），于是在"进行一次射击"的条件下，$\lambda_{(x,y)}$，$(x,y)\in R^{(2)}$，有且仅有一发生，从而随机事件集 $\dot{\Omega}_1=\{\lambda_{(x,y)},(x,y)\in R^{(2)}\}$ 也可以认为是"进行一次射击" 的条件下的基本事件空间，并且例 3 中的随机事件 ω_z，$z\in R_+$，在 Ω_1 中应该是 $\{\lambda_{(x,y)}:x^2+y^2=z^2\}$，而 $\widetilde{B}_I$ 应该是 Ω_1 中的子集 $\{\lambda_{(x,y)}:\sqrt{x^2+y^2}\in I\}$．

§ 2.2 事件的运算与集的运算

为使概率能作为数学对象运算，必须要讨论随机事件之间的关系．在给出数学定义之前，先作一些直观考察．

设 $\widetilde{A}$，$\widetilde{B}$，$\widetilde{C}$ 是在条件 $\mathscr{C}$ 之下的三个随机事件，若在 $\mathscr{C}$ 的每次实现下，$\widetilde{C}$ 发生当且仅当 $\widetilde{A}$，$\widetilde{B}$ 至少有一发生，则称 $\widetilde{C}$ 为 $\widetilde{A}$，$\widetilde{B}$ **的和**，记作 $\widetilde{C}=\widetilde{A}\cup\widetilde{B}$；若在 $\mathscr{C}$ 的每次实现下，$\widetilde{C}$ 发生当且仅当 $\widetilde{A}$，$\widetilde{B}$ 都发生，则称 $\widetilde{C}$ 为 $\widetilde{A}$，$\widetilde{B}$ **的积**，记作 $\widetilde{C}=\widetilde{A}\cap\widetilde{B}$； 若在 $\mathscr{C}$ 的每次实现之下，$\widetilde{A}$ 发生导致 $\widetilde{B}$ 发生，则称 $\widetilde{B}$ **包含** $\widetilde{A}$，记作 $\widetilde{A}\subset\widetilde{B}$ 或 $\widetilde{B}\supset\widetilde{A}$． 例如，若 $\widetilde{A}$，$\widetilde{B}$ 分别是例 1 中的 $\widetilde{F}_{\Lambda_1}$，$\widetilde{F}_{\Lambda_2}$，则 $\widetilde{F}_{\Lambda_1}\cup\widetilde{F}_{\Lambda_2}=\widetilde{F}_{\Lambda_1\cup\Lambda_2}$，$\widetilde{F}_{\Lambda_1}\cap\widetilde{F}_{\Lambda_2}=\widetilde{F}_{\Lambda_1\cap\Lambda_2}$ 且若 $\Lambda_1\subset\Lambda_2$，则 $\widetilde{F}_{\Lambda_1}\subset\widetilde{F}_{\Lambda_2}$，其中 $\Lambda_1\cup\Lambda_2$，$\Lambda_1\cap\Lambda_2$，$\Lambda_1\subset\Lambda_2$ 分别表示集 Λ_1，Λ_2 的并、交及包含关系．显然容易从例 2—4 举出各种具体例子．

因此按照 § 2.1 的法则易证，在 $\mathscr{C}$ 的每一次实现之下，$\widetilde{A}\cup\widetilde{B}$（相应地： $\widetilde{A}\cap\widetilde{B}$）发生当且仅当有一 $\omega\in A$ **或** $\omega\in B$（相应地：$\omega\in A$ 且 $\omega\in B$）发生，即有一 $\omega\in A\cup B$（相应地： $\omega\in A\cap B$）发

生(其中 $A\cup B$, $A\cap B$ 分别表示集 A, B 的并与交). 因此，事件的和与积分别与 Ω 的相应子集的并与交对应. 其次，若 $\tilde{A}\subset\tilde{B}$，则在 $\mathscr{C}$ 的每次实现下，$\tilde{A}$ 发生当且仅当 $\tilde{A}$, $\tilde{B}$ 都发生，即当且仅当 $\tilde{A}\cap\tilde{B}$ 发生，所以有 $\tilde{A}=\tilde{A}\cap\tilde{B}$. 按照 § 2.1 的对应规则及上面证明的 $\tilde{A}\cap\tilde{B}$ 与 $A\cap B$ 对应的结论知 $A=A\cap B$，即 $A\subset B$，这就证明了：若 $\tilde{A}\subset\tilde{B}$，则 $A\subset B$. 上面各个证明步骤都是可以反推的，所以有，若 $A\subset B$，则 $\tilde{A}\subset\tilde{B}$. 因此，事件的包含关系 $\tilde{A}\subset\tilde{B}$ 等价于 Ω 中相应子集 A, B 的包含关系 $A\subset B$.

定义 1. 设 Ω 是一集合，称为一个基本事件空间，$\mathfrak{E}$ 是 Ω 的某些子集作成的类，称为关于 Ω 的**事件类**，对于 A, $B\in\mathfrak{E}$, 若 $A\cup B\in\mathfrak{E}$ (相应地: $A\cap B\in\mathfrak{E}$) 则称 $A\cup B$ (相应地: $A\cap B$) 为事件 A, B 的**并**或**和**(相应地: **交**或**积**). 若 $\Omega\in\mathfrak{E}$，则称 Ω 为**必然事件**；若 $\varnothing\in\mathfrak{E}$，则称 $\varnothing$ 为**不可能事件**. 对 A, $B\in\mathfrak{E}$, 若 $A\cap B=\varnothing$，则称 A, B **互不相容**；若 $A\cap B=\varnothing$ 且 $A\cup B=\Omega$ 则称 A, B 互为**对立事件**，A 的对立事件(余集)记作 A^c; 事件 $A-B=A\cap B^c$ 称为 A, B 的**差**, $A\triangle B=(A-B)\cup(B-A)$ 称为 A, B 的**对称差**；若 $A\subset B$，则称事件 A **被** B **包含**或 B **包含** A.

由以上定义可以看出随机事件类就是一个集 Ω 的一个子集类. 这样定义使我们可以充分应用集合论的结论和公式. 但对于具体的随机现象，还需要具体决定 Ω 及 $\mathfrak{E}$.

为了应用，我们还将事件的运算推广到事件的有限类或可数类上去，这就是

定义 2. 设 $\mathfrak{E}$ 是关于基本事件空间 Ω 的一个事件类，若 $\{A_n: n\in I\}\subset\mathfrak{E}$，其中 I 是非空有限集或可数集，则 $\bigcup\limits_{n\in I}A_n$, $\bigcap\limits_{n\in I}A_n$ (若它们仍属于 $\mathfrak{E}$ 的话)分别称为 $\{A_n:n\in I\}$ 的**并**，**交**；若 $I=\varnothing$，则约定 $\bigcup\limits_{n\in I}A_n=\varnothing$, $\bigcap\limits_{n\in I}A_n=\Omega$; 若 A_n, $n\in I$ 两两不交，则称 $\{A_n, n\in I\}$ **两两互不相容**. 此时称它们的并为**和**，记作 $\sum\limits_{n\in I}A_n$.

下面列出一些事件的运算性质(即集合运算性质):

(i) $(A\cup B)\cup C=A\cup(B\cup C)$;

$$(A\cap B)\cap C = A\cap(B\cap C);$$
$$(A\triangle B)\triangle C = A\triangle(B\triangle C);$$

(ii) $A\cup B = B\cup A;$
$$A\cap B = B\cap A;$$
$$A\triangle B = B\triangle A;$$

(iii) $(A\cap B)\cup C = (A\cup C)\cap(B\cup C);$
$$(A\cup B)\cap C = (A\cap C)\cup(B\cap C);$$
$$(A\triangle B)\cap C = (A\cap C)\triangle(B\cap C);$$

(iv) $A\cap A^c = \varnothing$; $A\cup A^c = \Omega;$

(v) $(A^c)^c = A$; $\Omega^c = \varnothing$; $\varnothing^c = \Omega;$

(vi) $\left(\bigcup_{n\in I} A_n\right)^c = \bigcap_{n\in I} A_n^c;$
$$\left(\bigcap_{n\in I} A_n\right)^c = \bigcup_{n\in I} A_n^c.$$

习题及补充

1. 试证:

i) $A\triangle B = (A\cup B)-(A\cap B) = (A\cap B^c)\cup(A^c\cap B);$
$A\triangle B = B\triangle A;$

ii) $A\triangle\varnothing = A$; $A\triangle\Omega = A^c$; $A\triangle B = A^c\triangle B^c;$

iii) $(A\triangle B)\triangle C = A\triangle(B\triangle C);$
$(A\triangle B)\cap C = (A\cap C)\triangle(B\cap C);$

iv) $A\cup B = (A\triangle B)+(A\cap B);$

v) $(A_1\cup A_2)\triangle(B_1\cup B_2)\subset(A_1\triangle B_1)\cup(A_2\triangle B_2);$

vi) $(A_1 - A_2)\triangle(B_1 - B_2)\subset(A_1\triangle B_1)\cup(A_2\triangle B_2).$

2. 若 $N\subset B$,试证:

i) $A\cup N = (A-B)\triangle[B\cap(A\cup N)];$

ii) $A\triangle N = (A-B)\cup[B\cap(A\triangle N)].$

3. 设 A_1, A_2, $\cdots$是任一集序列,若令