NONLINEAR
PHYSICAL
SCIENCE

罗朝俊 著

非线性变形体动力学

Nonlinear Deformable-body Dynamics

郭 羽 黄健哲 闵富红 译

高等教育出版社
HIGHER EDUCATION PRESS

非线性变形体动力学

Feixianxing Bianxingti Donglixue

罗朝俊 著
郭羽 黄健哲 闵富红 译

高等教育出版社·北京
HIGHER EDUCATION PRESS BEIJING

图书在版编目（CIP）数据

非线性变形体动力学 / 罗朝俊著；郭羽，黄健哲，闵富红译 .— 北京：高等教育出版社，2011.5

（非线性物理科学 / 罗朝俊，（瑞典）伊布拉基莫夫主编）

书名原文：Nonlinear Deformable-body Dynamics

ISBN 978-7-04-032186-9

Ⅰ. ①非…　Ⅱ. ①罗… ②郭… ③黄… ④闵…　Ⅲ. ①非线性-动力学　Ⅳ. ① O313

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2011）第 049589 号

策划编辑	王丽萍	责任编辑	李华英	封面设计	杨立新
版式设计	范晓红	责任校对	陈旭颖	责任印制	朱学忠

出版发行	高等教育出版社	咨询电话	400-810-0598
社　　址	北京市西城区德外大街 4 号	网　　址	http://www.hep.edu.cn
邮政编码	100120		http://www.hep.com.cn
印　　刷	涿州市星河印刷有限公司	网上订购	http://www.landraco.com
开　　本	787×1092　1/16		http://www.landraco.com.cn
印　　张	23.25		
字　　数	400 000	版　　次	2011 年 5 月第 1 版
彩　　插	2	印　　次	2011 年 5 月第 1 次印刷
购书热线	010-58581118	定　　价	69.00 元

本书如有缺页、倒页、脱页等质量问题，请到所购图书销售部门联系调换

物 料 号　32186-00

译者序

变形体动力学一直都是科学界和工程界热衷的话题。在工程中，它的应用也无处不在。例如，大到用于探索太空的宇宙飞船，小到我们日常生活中用的棉绳，都能用变形体动力学来描述。这门科学的发展和应用对于近代人类文明起到了前所未有的推动作用，因此牢固掌握这些知识显得尤为重要。《非线性变形体动力学》(*Nonlinear Deformable-Body Dynamics*) 是由美国南伊利诺伊大学爱德华分校 (Southern Illinois University Edwardsville) 著名教授罗朝俊所著。这本书是读者了解和研究变形体动力学不可缺少的好书。本书系统地介绍了变形体动力学的数学理论，并提出和发展了绳索动力学、薄梁和细棒、板壳以及软网等的最新非线性数学理论。书中首先阐述了变形体的发展史；接着，详细介绍了研究变形体运动学所必需的数学工具，即张量分析基础，讨论了变形体的变形几何、运动学以及动力学，并讨论了变形体的本构定律及其损伤理论；最后，基于三维体理论，对绳索的非线性动力学，非线性板及其波动，网、膜、壳、薄梁和细棒的非线性理论等内容作了详细阐述，并为工程应用提供了精确的、完善的数学理论。

作为一本非线性变形体动力学专著，本书的内容涉及广泛。作者对于书中的每个定理和推论都给出了非常详细的推导与证明，并配以插图进行讲解。为了让读者最大限度地汲取到本书的精华，译者在翻译过程中尽全力尊重原文，并尽可能避免直译产生的歧义。但是由于才疏学浅，翻译中难免有纰漏之处，希望广大读者批评指正，以便在今后的版本中予以修订。

本书由美国南伊利诺伊大学爱德华分校的郭羽和黄健哲主笔翻译，南京师范大学闵富红教授参与翻译和校对。在此我们衷心感谢翻译期间本书作者罗朝俊教授给予的耐心指导，他对学术的热忱、严谨的治学态度以及对科学发展的无私奉献精神，让我们受益匪浅。

郭　羽　黄健哲　闵富红
美国南伊利诺伊大学爱德华分校

前　言

变形体动力学是一门研究外力作用下变形体的应力和内在相对运动的学科。这是一个古老而又有趣的话题, 有许多问题还悬而未决。这个话题中存在的问题, 如果对其反复思考, 我们可能会对现代科学与技术产生新的认识。1638 年, Galileo (伽利略) 首先考虑了变形体对于断裂的抗弯性本质。这个始于伽利略问题的变形体理论, 起源于 1660 年 Hooke (胡克) 定律以及 1821 年 Navier (纳维尔) 弹性一般微分方程的发现。Hooke 定律在实验基础上得出了应力和应变的关系。这个定律奠定了发展变形体数学理论的基础。1821 年, Navier 首次研究了一般平衡方程和弹性体的振动。1850 年, Kirchhoff (基尔霍夫) 提出了两个假设: (i) 板的直线元最初垂直于中面, 变形后它仍垂直于变形后的中面; (ii) 中面的所有纤维是不可伸长的。基于 Kirchhoff 假设, 梁、细棒、板以及壳的近似理论在最近的 150 年里得到了发展。根据三维变形体理论以及这些假设, 本书将会介绍包括绳、梁、细棒、网、膜、板以及壳在内的薄变形体近似理论的数学论述。基于 Kirchhoff 假设的变形体非线性理论将作为一个特例来进行讨论。本书共有八章。第一章讲述变形体理论的发展史。第二章介绍变形以及变形体运动学的数学工具。第三章讨论变形体的变形几何、运动学以及动力学。第四章讨论变形体的本构定律以及变形体的损伤理论。第五章着重讲述绳的非线性动力学。第六章讨论非线性板及其波动。第七章介绍网、膜和壳的非线性理论。第八章介绍薄梁和细棒的非线性理论。

写这本书的目的是为了解答在 1990 年我的硕士论文答辩中孙焕纯教授 (我的导师) 提出的问题。在我的硕士论文中, 考虑了用高阶项来修正在 von Karman (冯 · 卡门) 板理论中的应变。然而, 这个修正没有考虑在平衡公式中的曲率影响。孙教授问我, 与三维变形体的精确理论相比, 它的误差是多少。在将近二十年后, 我相信我能够对这个问题给出合适的答案了。实际上, 我在论文答辩后, 几乎将此问题束之高阁了。然而, 1996 年在加州大学

伯克利分校期间，我在 C.D.Mote, Jr. 教授研究组里工作，致力于研究在计算机硬盘中高速旋转磁盘的非线性动力行为。这个问题使我重新思考板的精确理论。为了感谢他们两人的教诲之恩，本书将作为我的小小薄礼来祝贺孙老师的 80 大寿以及 Mote, Jr. 老师的 70 大寿。本书同时献给我的朋友兼同事郭仲衡教授。过去 20 年，他的《非线性弹性力学》激发了我对非线性变形体的兴趣。这是一本很好的研究生教材和参考书。本书许多地方是受《非线性弹性力学》的启发。另外，我要诚挚地感谢车有金教授在 1981 年我大二期间借给我《张量分析》和《变分原理》两本书。30 年后，我却无法找到这两本书并将其归还给他。我真心地希望这本书能够将我的愧疚以及感谢带给他。

在这里，我要感谢我的妻子 (Sherry X. Huang) 以及我的孩子们 (Yanyi Luo、Robin Ruo-Bing Luo 和 Robert Zong-Yuan Luo)，感谢在我写书的过程中，他们的宽容、耐心、理解和支持。

Albert C.J. Luo
美国南伊利诺伊大学爱德华分校

目　录

第一章
概　论

为了研究变形体动力学，探悉变形体的数学理论发展史显得极为重要．从这段发展史中，我们可以发现变形体动力学是如何促进现代物理发展的．本章将介绍变形体近似理论发展的简要历史．首先我们会讨论绳索动力学，并给出非线性梁和细棒的以前的数学处理方法．然后，我们将讨论板壳理论的过去及现状．最后给出本书的大纲以及每章的简要总结．

1.1　变形体动力学

变形体动力学是研究受外力作用下的变形体的应变状态和内在质点的相对运动关系的一门学科．1638 年，Galileo (伽利略) 提出了固体抗破裂性的初期概念．他把变形体看作是非弹性体，其位移和力的关系不遵循任何定律和假说．伽利略把一端固定于墙体中的梁作为研究对象，在梁受重力的情况下研究它的阻力．他得出的结论是，梁围绕着同时垂直于其长边以及墙面的轴旋转．这个轴的确定被称为伽利略问题．起源于伽利略问题的变形体理论，是基于 1660 年的 Hooke (胡克) 定律以及 1821 年 Navier (纳维尔) 提出的弹性力学常微分方程模型发展而来的．Hooke 定律 (Hooke, 1678) 在实验基础上讨论了应力和应变的关系，它为变形体数学理论的发展打下了基础．正如 Love 在 1944 年指出的那样，Navier 是研究弹性固体平衡和振动的一般方程的鼻祖．虽然我们认为板壳平衡和振动是先于一般弹性力学理论发展的，但是人们仍然有兴趣致力于通过在中面运用幂级数展开，来将一般弹性力学理论简化为板壳理论．问题是在边缘的合力以及合力矩必须等于由于形变产生的内力和内力矩，然而未知数过多却使得求解变成了天方

夜谭. Kirchhoff (基尔霍夫) (1850a,b) 提出了两个假设: (i) 板上的直线元最初垂直于中面, 变形后它仍然垂直于变形后的中面; (ii) 中面上的所有纤维是不可伸长的. 独立于一般弹性方程, 运用和 Euler (欧拉) 提出的相类似的方法, 他提出了细棒和细丝的弯曲扭转理论. 并且, 他还考虑如何把一般弹性力学和细棒理论联系起来. 1859 年, Kirchhoff 指出, 如果细棒任一部分的线性尺寸和截面尺寸的大小是同一数量级的, 那么一般弹性力学方程在它的任何一个微小部分都适用. 这段细棒的运动方程可以由其变形运动学的一阶近似简化得到. 基于 Kirchhoff 的假设, 梁、细棒、板和壳的近似理论发展了近 150 年. 根据特定假设下的三维变形体理论, 本书将会提出一个数学框架, 来推出这个薄变形体的近似数学理论, 其中包括绳索、梁、细棒、网、膜以及板壳. 我们将这个基于 Kirchhoff 假设的理论作为一个特例来进行讨论. 在本章中, 我们首先讨论非线性绳索动力学理论的发展史.

1.1.1 绳索动力学

数千年来, 绳索是人类运用最为普遍的东西之一. 自从早期绳索被用于制作吊桥以来, 科学家们就被它的结构吸引住了. 在中国, 复杂吊桥在公元前就有史料记载了. 早在公元 65 年, 中国云南已经修建了铁索桥 (Needham, 1954). 1586 年, Stevin 通过实验建立了有负载弦的力三角, 以此来了解石拱桥的下陷与坍塌机理 (Hopkins, 1970). 1615 年, Beeckman 首次解决了悬索桥问题, 其抛物线弧形悬链结构受平面内均匀荷载作用 (Truesdell, 1960). 1638 年, Galileo 在 *Discourse on Two New Sciences* 中提出, 将以飞行中的炮弹轨道作为借鉴, 悬梁的形状是抛物线. 然而, 根据 Bernoulli (伯努利) 兄弟 (James 和 John)、Leibnitz 以及 Huygens 共同发现的悬链线, 可证明这种观点是不正确的 (Truesdell, 1960). 为了解决悬链线这个问题, Huygens 依据几何原理, 同时 Leibnitz 和 Bernoulli 兄弟使用微积分和 Hooke 定律推导出了不同载荷作用下的链单元的平衡常微分方程. 此外, Bernoulli 兄弟采用了变分法的基本原理来使链的重心尽可能低, 并进一步得到了虚功原理. 18 世纪初, 绷紧弦的振动得到了广泛研究, 以得到该偏微分方程解的性质. 1738 年, Daniel Bernoulli (John Bernoulli 的儿子) 发表了一端悬挂的链的固有频率的解, 该解是以无穷级数的形式存在的 (Watson, 1966). 1764 年, Euler 得到了振动中绷紧膜的运动方程, 并通过分离变量得到了无穷级数的解. Poisson 以及其后的 Clebsch 分别于 1829 年和 1862 年给出了部分解. 此外, Lagrange 用绷紧弦的离散珠串模型来作为此运动方程的说明 (Whittacker, 1970). 这是人们第一次用差分方程来解决振动问题.

在任意荷载下, 当设计绳索结构时, 我们需要考虑弹性绳索的平衡构型、张力以及位移. 1851 年, Rohrs 首次模拟了均匀振动, 他将无延伸性的均匀悬链线在只有自重的情况下自由吊挂, 得到绳索的固有频率及其响应. 1884 年, Routh 认为把一个不均匀的悬链以摆线的形式悬挂起来, 作对称横向振动, 当垂跨比很小时, 将这种不均匀悬链模型简化为均匀悬链模型, 由此得到 Rohrs 模型. 这种悬链仍然是不可伸长的. 1949 年, 对于均匀的不可伸长的悬链的前三个模态的平面内固有频率, Pugsley 提出了半经验理论. 1953 年, Saxon 和 Cahn 提出渐近法来解决跨比很大的悬链的固有频率. 1966 年, Simpson 通过已伸长绳索的平衡状态, 来研究其平面内振动, 同时采用传递矩阵法, 确定了多跨垂吊绳索的固有频率. 1974 年, Irvine 和 Caughey 使用类似的方法研究了只受自重并且可伸长的绳索, 以及由于悬挂处于下垂状态时的自由振动. 1980 年, Hagedorn 和 Schafer 指出, 几何非线性对于计算弹性绳索平面内振动的固有频率非常重要. 1984 年, Luongo 等人通过摄动法分析了垂吊绳索的二维非线性自由振动. 1992 年, Perkins 通过解析和实验方法分析了三维弹性垂吊绳索的非线性振动, 并对绳索动力学最近的发展做了详细的回顾. 1972 年, 对于轴向移动绳索, Simpson 通过在平衡位置附近的线性化运动方程研究了它的平面振动. 1985 年, Triantafyllou 用另外的方法推导出在平衡状态下的线性运动方程. Perkins 和 Mote (Perkins, 1987; Mote, 1989) 推导出轴向移动弹性绳索的三维绳索理论. 通过离散其连续系统的固有模态解, 研究了在平衡状态附近的轴向移动绳索振动及其稳定性, 并且发表了一些相关的实验结果. 1996 年, Luo 等人获得了可伸展、旋转非线性绳索的解析解, 并研究了其相关的谐波振动.

通过近似法, 我们确定了非直线绳索的平衡态. 1969 年, Dickey 对在垂直力作用下静止的非线性绳或线进行了研究, 并得出其拉伸和压缩下的平衡解. 1979 年, Antman 扩展了 Dickey 的研究, 并对不同荷载下的非线性弹性绳索的存在性、多重性以及平衡状态下的定性行为进行了全面的研究. 由于离心载荷, 该轴向移动垂吊绳索有两个平衡状态. 1995 年, O'Reilly 和 Varadi 研究了轴向移动弹性绳索的平衡状态. 1996年, O'Reilly 指出, 如果用 Routh 对不可延伸绳索的观察结果 (Routh, 1884), 那么 Antman (1979) 和 Dickey (1969) 在绳索静态平衡时得到的结果可以拓展用来检验这些绳索的稳态运动. 1990 年, Healey 和 Papadopoulos 将不可延伸绳索的结果推广到所有弹性绳索. 1996 年, O'Reilly 得到了弹性和不可延伸绳索的稳态运动及其稳定性, 并表明多重稳态运动存在的可能性. 在弹性绳索的定量研究中, Irvine (1981) 用 Dickey 的方法 (Dickey, 1969), 来确定正张力作用的二维绳索准确的平衡构型以及近似位移. 对于单独的集中垂直荷载, 预测位移受两个

假设的影响. 其一, 平衡构型是抛物线状的; 其二, 绳索的两端是固定的. 对于有多个集中力作用的物体, Irvine 的解 (Irvine, 1981) 需要满足初始构型的特异性. 为了克服这些限制, 1995 年, Yu 等人按照 Irvine 的方法, 计算出相同横向集中载荷作用下的三维绳索的张力和平衡构型. 因为初始构型未知, 所以上述的精确解描述的只是平衡状态, 而并不是变形位移. 2000 年, Luo 和 Mote 提出轴向移动、任意处垂吊的弹性绳索的非线性理论, 并且解析地提出了封闭形式的平衡解及其存在性. 为了研究非线性垂吊弹性绳索的动力学, 我们必须研究不可延伸绳索的动力学. 2002 年, Luo 和 Wang 给出了轴向移动不可延伸绳索振动的级数解. 2004 年, Wang 和 Luo 提出了轴向移动不可延伸绳索运动的另一种解析解. 当平移速度超过临界速度时, 这个解析解也是正确的. 基于不可延伸绳索的动力学, 可以确定垂吊绳索的动力学.

1.1.2 梁和棒理论

1638 年, Galileo 研究了在自身重力或者外力作用下, 一端固定在墙上的梁的阻力, 这促进了现代科学的发展. 通过变形体的波动和振动, 他认识到了光和声音的传播. 在基于 Hooke 定律和对于变形体的 Navier 一般微积分的弹性力学之前, 人们研究了细棒和绳索的弯扭理论. 在 1638 年到 1821 年间, 为了得到 Galileo 问题的解以及其拓展, 与细棒和板的振动以及柱的稳定相关的近似理论得到了发展. 1684 年, 通过平均三维模型横截面上的应力, Leibniz 提出了一维细棒理论. 自此之后, James Bernoulli 于 1705 年对弹性细梁做了首次研究. 在此次研究中, 弯曲细梁的阻力被看作是由伸长后的弹性纤维伸缩产生的, 并且给出了坐标系下的曲线方程, 其中抗弯指的是弯矩正比于弯曲细梁的曲率. 在建立了弯矩和曲率正交的概念后, 我们可以知道, 弯曲细梁做的功和曲率的平方是成正比的. Danial Bernoulli 向 Euler 建议, 弯曲细梁的微分方程可以通过无限细化沿着细梁的曲率平方的积分得到. 根据这个建议, 在 1744 年, Euler 得到了弯曲细梁的微分方程, 并对这个问题的不同形式进行了归类. 从这个问题中, Euler 得出弯曲弹性梁在自重或者外力 (分布力) 作用下的最小长度. 继 Euler 定理之后, Lagrange 又得出了杆的最强形式. 这个思想是变分原理的基础, 而且它是最早研究弹性稳定性的. 在 Euler 的研究中, 细梁被假想为一排微粒同时抵抗弯曲. 1776 年, Coulomb 利用细梁的横截面来提出梁的抗弯理论, 并且研究了细棒的扭转. 该理论使得 Daniel Bernoulli 和 Euler 的细棒理论得到了进一步的发展. 剪力的概念第一次被提了出来. 因为能量方程的变化, Euler 和 Daniel Bernoulli 得到了细棒横向振动的微分方程, 并且讨论了在不同边界条件下的细棒的

振动. 1802 年, Chldni 介绍了对于这类振动模式的研究, 并且讨论了细棒的纵向振动和扭转振动. 1821 年, 在 Hooke 定律的基础上, Navier 提出了弹性理论的一般微分方程. 由于细棒的理论是单独提出来的, 于是如何把一般弹性理论和细棒理论联系起来就成了他亟待解决的问题. 1859 年, Kirchhoff 指出, 如果细棒所有局部长度方向的尺寸和其横截面直径是同一数量级的, 那么一般弹性方程适用于细棒的任意部分. 这部分细棒的运动方程可以从变形和运动学的第一近似得到简化. 早期的梁理论也是由 Kirchhoff (1859) 和 Clebsch (1862) 发展起来的 (参见 Love, 1944). 弹性力学的完整史详见参考文献 (Todhunter and Pearson, 1960; Truesdell, 1960).

自 20 世纪 40 年代以来, 人们就对从三维连续力学发展而来的细棒理论的系统化发展感兴趣了. 1942 年, Hay 从厚度参数的幂级数得到了应变. 1948 年, Novozhilov 提出了大变形细棒的非线性理论. 其他关于一维细棒的近似理论详见参考文献 (Midlin and Herrmann, 1952; Volterra, 1955, 1956, 1961; Midlin and McNiven, 1960; Medick, 1966). 这些理论是用来研究波的振动和传播的. 另外, 为了建立基于一维连续介质的细棒理论, E. Cosserat 和 F. Cosserat (1909) 提出四个向量场的概念来描述有向曲线上一点的可变向量. 1958 年, Ericksen 和 Truesdell 通过有向变形体, 用 Cosserat 方法提出了细棒壳应力和应变的非线性理论. 1966 年, Cohn 提出了弹性曲线的静态等温理论. 1969 年, Whitman 和 DeSilva 接着 Cohn 所做的工作, 讨论了其动态情况, 并给出了具有惯性项的显示表达式. 1971 年, DeSilva 和 Whitman 提出了材料本构方程的有向曲线的热力学定理. 当假设被引入到相应的理论, 并且提出非线性细棒理论 (Whitman and DeSilva, 1970,1972,1974) 时, 这种理论可以简化为经典弹性无延伸梁和 Timoshenko 线性梁理论. 另一方面, 1959 年 Green 通过对横截面上的三维方程进行积分, 提出了合力以及合力矩的严格平衡方程. 1966 年, Green 和 Laws 延伸了这个概念, 通过细棒上每个质点的特定三个向量场可用两个定向向量来描述, 进而提出了细棒的一般理论. 1966 年, Antman 和 Warner 在横向方向上的多项式表示出细棒上质点的位置, 并得到了用横坐标幂指数形式表示的超弹性细棒的运动方程. 1967 年, Green, Laws 和 Naghdi 根据 Green 和 Laws 的思想 (Green and Laws, 1966) 提出了弹性细直棒的线性理论, 次年, Green, Knops 和 Laws 对有限弹性变形细棒用同样的方法解决小变形叠加. 对于细棒理论更为详细的讨论详见参考文献 (Antman, 1972). Reissner (1972, 1973) 提出了一维有限应变、静态梁理论, 然而却没有介绍如何处理力矩. 1973 年, Wempner 探讨了弯曲细棒力学, 但是该应变是 Almansi-Hamel 应变. 1982 年, Berdichevsky (1982) 提出了非线性细棒的应变能. 1983 年, Maewal 给出了非线性细棒和壳的应变位移关

系. 1987 年, Danielson 和 Hodges 通过分解旋转张量, 讨论了梁的运动学, 并且介绍了梁动力学的混合变分形式 (Hodges, 1990). Simo 和 Vu-Quoc (1987, 1991) 用精确应变提出了几何非线性平面细棒理论, 同时提出了几个高阶近似理论. 最近, 这个方法被用来发展三维夹心梁理论, 并且数值方法可被用来预测动态响应 (Vu-Quoc and Ebcioglu, 1995, 1996; Vu-Quoc and Deng, 1995, 1997). 对于几何非线性细棒的运动方程的其他推导, 详见参考文献 (Crespo da Silva and Glynn, 1978a; Crespo da Silva, 1991; Pai and Nayfeh, 1990, 1992, 1994).

1972 年, Verma 用扰动法研究了基于精确梁理论的非线性细棒的平面振动 (Verma, 1972). 1973 年, Nayfeh 研究了当梁的特性沿着其长边变化时梁的非线性自由横向振动 (Nayfeh, 1973). Ho 等人用单模态模型和摄动法讨论了细棒的非线性振动 (Ho et al., 1975, 1976). 1978 年, Crespo da Silva 和 Glynn 研究了扭转的非线性不可延伸梁的受迫振动 (Crespo da Silva and Glynn, 1978b). 1986 年, Luongo 等人用特定的单模态响应和扰动方法研究了具有剪切变形的可变形梁的平面的受迫振动 (Luongo et al., 1986). 在压力作用下的弹性细棒的平面运动也得到了分析 (Atanackovic and Cveticanin, 1996). 1981 年, Holmes 和 Marsden 用 Melnikov 方法研究了强迫作用梁的混沌振动. 1986 年, Maewal 用扰动法和 Lyapunov 指数法研究了谐激励下的弹性梁的混沌运动. 1995 年, 悬臂梁的非线性振动的动态势得到了探讨 (Berdichevsky et al., 1995), 同时给出了非线性无阻力细棒的混沌运动的数值仿真. 1999 年, Luo 和 Han 推导了平面梁的非线性方程, 并用这个方程研究了其混沌现象. 在实际应用中, 人们通常用近似理论来讨论非线性梁和细棒的变形和振动. 近几十年来, 为了更精确地描述 DNA 的结构和微机电系统 (MEMS), 人们试着重新探讨细棒理论. Kirchhoff 非线性细棒理论 (Kirchhoff, 1859) 被重新讨论了. 1987 年, Tsuru 讨论了弹性细棒的平衡形态和振动. 1992 年, Coleman 和 Dill 讨论了弹性细棒的横向挠曲波 (Coleman et al., 1993). 1993 年, Tobias 和 Olson 用具有均匀截面的不可伸长的弹性细棒来描述 DNA 段 (Coleman et al., 1995, 1996; Swigon et al., 1998). 2001 年, Lembo 讨论了自由形状的弹性细棒, 2004 年, Colemen 和 Swigon 提出了具有超螺旋和不打结 DNA 载体的 Kirchhoff 棒的自接触理论. 最近, 弹性细棒的 Cosserat 理论被用来模拟微电机系统 (Cao et al., 2005, 2006), 并介绍了基于 Cosserat 理论系统地描述了弹性细棒 (Cao and Tucker, 2008). 从上述研究中可以看出, 提出正确的梁和细棒理论至关重要. 本书将为你呈现梁和细棒精确理论发展的数学框架.

1.1.3 板壳理论

17 世纪, 在特定假设的基础上, 细棒理论得以问世. 用同样的方法, 可以得到板壳理论. Euler 是第一个认为板是由细棒组成的人. 实际上, 板的弯曲理论是根据 Kirchhoff 的细棒理论猜想提出来的 (Kirchhoff, 1850a,b). 1888 年, Love (1944) 根据三维线弹性力学方程提出了壳的线性理论. 非线性应变取决于展开式的一阶近似, 这个理论源于弹性薄壳的小自由振动 (Love, 1888). Rayleigh (1888) 对此不以为然, 因为这个壳的延伸变形理论违反了不可延伸的变形理论. Lamb (1890) 用另外的方法推导出了与 Love 相同的方程, Basset (1890) 考虑了薄壁圆筒和球壳的展开式的高阶项. 1940 年前后, 为了解决这一课题, 在 Kirchhoff-Love 假设的框架下, Chien (1944a,b) 提出了板壳的内在数学理论. Gol'denveizer (1944) 讨论了薄壳弹性力学一般理论的适用性. Reissner (1944) 通过假定位移场, 将切应变引起的变形引入了弹性板的弯曲. 对于线性理论的讨论, 我们可以参见 Naghdi (1972) 以及其他的书籍.

该三维薄连续变形体可由二维有向的表面来描述. 这个连续有向介质面的概念由 Duhem (1906) 首先提了出来. E. Cosserat 和 F. Cosserat (1909) 拓展了这个概念, 提出了壳和细棒理论. 这个概念为板壳理论的发展提供了基础. 另外, 板壳现存的近似非线性理论是由三维方程推导出来的. 早期, 人们假设应变很小但转动很大或一般大, 并且假定它的线性本构方程是正确的. von Karman (1910) 基于展开式的一阶近似拓展了 Love 的应变, 提出了板的近似理论, 另外, von Karman 和 Tsien (1939, 1941) 用这个近似理论研究了在外压力作用下, 薄壁球壳和圆柱壳的失稳. 然而, Galerkin (1915) 讨论了板和细棒弹性平衡问题的级数解. 1941 年, Novozhilov 提出了薄壳稳定性的一般理论, 并在 Galerkin 想法的引导下系统地提出了弹性力学的非线性理论 (Nolvozhilov, 1948 或 Nolvozhilov (英文版), 1953). 继 von Karman 理论之后, Reissner (1957) 提出了包含剪变形在内的非线性板理论. Herrmann (1955) 推导出适用于小伸长、有剪切变形和适度大的转动状态下动态运动的板理论. Wang (1990) 将横向的各向同性板的三维理论简化为二维理论. Hodges (1993) 等人通过翘曲位移提出了几何非线性板理论. 自从 von Karman (1910) 提出大变形情况下薄板的非线性理论以来, 人们用这个理论研究了屈曲稳定性 (Levy, 1942) 以及旋转盘的非线性振动 (Nowinski, 1964, 1981).

基于有向连续介质的概念, Ericksen 和 Truesdell (1958) 通过 n 维空间的 n 向可伸展介绍了有向介质动力学发展概述, 并引入了有向向量的概念. Truesdell 和 Toupin (1960) 诠释了有向变形体动力学. 有向介质上所有点的