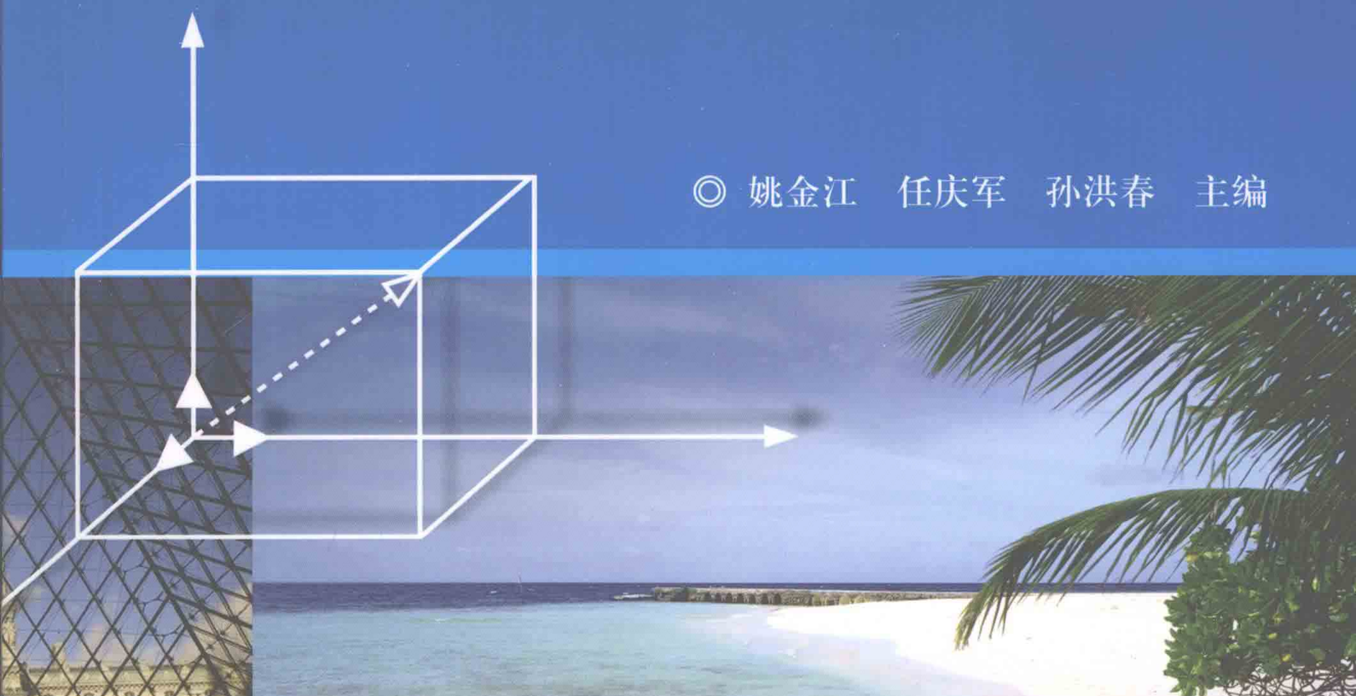
香樟书库系列

数学卷

教育部高等学校特色专业建设教材

几何学



◎ 姚金江　任庆军　孙洪春　主编

電子工業出版社
PUBLISHING HOUSE OF ELECTRONICS INDUSTRY
http://www.phei.com.cn

香樟书库系列　数学卷
教育部高等学校特色专业建设教材

几　何　学

姚金江　任庆军　孙洪春　主　编
马振明　王树艳　黄宜坤　副主编

Publishing House of Electronics Industry
北京·BEIJING

内容简介

几何学包含解析几何、高等几何（即射影几何）两个部分。在教学内容上，几何学注重以现代几何观点审视传统几何学，突出几何方法，注重少而精，删除一些相对陈旧的在现代科学中没有发展前景的概念、知识和方法，并适应时代发展，更新与拓宽几何学教育内容，把经典几何的结构和内容尽可能用现代数学的观点、语言来表述，以有效知识为主体构建支持学生终生学习的知识基础，引导学生达到相关学科的前沿领域。因此，几何学的教学内容体现了本课程的基础性、时代性和前沿性。

第1~3章讨论的是解析几何内容，主要讲授解析几何的基本方法和基本知识，内容包括向量代数、空间直角坐标系、空间的平面与直线、常用曲面及二次曲面等。

第4~8章讨论的是射影几何（高等几何）。射影几何是研究几何图形的射影性质，即经过射影变换不变的性质。本部分主要讲授射影几何的基本理论与基本方法。首先在拓广欧氏平面的基础上引出射影平面的概念，这样定义射影平面不仅保持了几何的直观性，而且看到了几何发展的连续性；继而从拓广欧氏平面上点的齐次坐标出发引进射影平面上点的射影坐标，并在此基础上给出交比概念与阐述对偶原理，讨论一维基本形之间的射影变换与其特殊的变换形式——透视变换与对合变换，射影平面上的直射变换，以及二次曲线的射影性质；最后介绍Klein关于从变换群观点看几何学，明确射影几何与仿射几何、欧氏几何的内在联系和根本差别，使读者对几何学有一个比较全局性的认识。

图书在版编目(CIP)数据

几何学／姚金江，任庆军，孙洪春主编. —北京:电子工业出版社，2010.10
教育部高等学校特色专业建设教材
ISBN 978-7-121-11873-9

Ⅰ.①几… Ⅱ.①姚… ②任… ③孙… Ⅲ.①几何学－高等学校－教材 Ⅳ.①O18

中国版本图书馆CIP数据核字(2010)第184481号

策划编辑:张贵芹
责任编辑:徐云鹏　　文字编辑:韩奇桅
印　　刷:北京市海淀区四季青印刷厂
装　　订:三河市鹏成印业有限公司
出版发行:电子工业出版社
　　　　　北京市海淀区万寿路173信箱　邮编100036
开　　本:787×1092　1/16　印张:11.25　字数:288千字
印　　次:2010年10月第1次印刷
印　　数:4 000册　　定价:22.00元

凡所购买电子工业出版社图书有缺损问题,请向购买书店调换。若书店售缺,请与本社发行部联系,联系及邮购电话:(010)88254888

质量投诉请发邮件至zlts@phei.com.cn,盗版侵权举报请发邮件至dbqq@phei.com.cn。

服务热线:(010)88258888

《香樟书库》总序

临沂师范学院院长　韩延明

2006年8月，由我校教师主编的首批立项资助教材《香樟书库》系列校本教材由山东大学出版社正式出版。在此基础上，根据教学计划和课程建设的实际需要，我们又很快启动了第二批立项教材的编撰工作。在学校教材建设指导委员会的组织、指导与协调下，教材编著者们夜以继日地辛勤劳作，如今已顺利完成了第二批教材的编撰工作，即将付梓面世。这批教材的编撰出版，既是我校校本教材建设工作步入规范化、系统化、科学化轨道的一种重要标志，也是我校认真贯彻落实国家教育部、山东省教育厅高等院校质量建设工程、促进学校内涵发展的一项重大举措。

我认为，对今日之高校而言，思路决定出路，就业决定专业，能量决定质量，质量决定力量。办学质量始终是一所学校的声誉之源、立校之本、发展之基，是高等学校的一条生命线。提高教学质量，理应是高校矢志不渝所追寻的永恒主题和永远高奏的主旋律，这就是我们常讲的“教学为本，质量立校”。而众所瞩目的高校办学质量又始终贯穿于实现“人才培养、知识创新和服务社会”三大职能的各个具体环节之中，其中既有人才培养的质量问题，也有科技成果和社会服务的质量问题，但人才培养质量是核心和旨归。孔子曰：“君子务本，本立而道生。”培养高质量人才是大学责无旁贷的神圣使命，而人才培养的主渠道又相对集中于课堂教学。课堂教学的基本要素是教师、学生和教材。

教材即教学材料的简称。细言之，它是指依据教学大纲和教学实际需要为教师、学生选编的教科书、讲义、讲授提纲、参考书目、网络课程、图片、教学影片、唱片、录音、录像以及计算机软件等。古人云：“书山有路勤为径，学海无涯苦作舟。”在漫漫求学路途上，千辛苦、万劳累、呕心沥血、夜以继日，书总会一直忠诚地陪伴着学习者，承前启后、继往开来、输送知识、启迪智慧，成为学习者解疑释难的知心朋友和指点迷津的人生导师，而学生之“书”的主体是教材。教材是教学内容和教学方法的载体，是教师实施课堂教学的依据和工具，是学生最基本的学习参考材料，是师生互动、教学相长、顺利完成教学任务的必要基础。“教本教本，教学之本。”教材建设水平，是衡量一所高校教学质量与学术水平的重要标志之一。临沂师范学院历来重视教材建设工作，曾多次对教材建设工作进行专题研究。几年前，为了督导教师选用优质教材、提高教学质量、强化教学管理、优化教学环境，学校曾严格规定：全部本科教材均使用教育部、教育厅统编教材或获奖教材，禁止使用教师自编教材，从而保证了教材质量，为规范、完善本科教学工作奠定了良好的基础。

近年来，伴随着我国高等教育大众化的迅速推进和高校本科教学工作水平评估的深入进行，临沂师范学院实现了超常规、跨越式发展，其中之一是卓有成效地开展了“四大建设”，即“深化课程建设，优化专业建设，亮化学科建设，强化师资队伍建设”，使专业学科建设水平与教师教学水平不断提高，课程体系建设与课程开出能力不断增强，课

堂教学改革与课外活动革新不断深入，相继涌现出一批质量上乘、优势明显、特色突出的优质课程和爱岗敬业、授课解惑、教书育人的优秀教师，因而启动自编教材工作的条件日臻成熟。古人云："临渊羡鱼，不如退而织网。"2006 年，学校正式启动了首批立项教材建设工作，紧紧围绕人才培养目标，密切联系教学改革及课程建设实际，配合学校课程体系构建、教学内容改革及系列选修课程建设，在确保质量的基础上，正式出版了第一批校本教材，并于当年投入使用，得到了师生的普遍认可和同行专家的高度评价。在认真总结第一批立项教材建设经验的基础上，2007 年，学校又启动了第二批立项教材的编撰与出版工作。

我校的教材建设是有计划、有组织、有步骤进行的，经过教材建设指导委员会专家们的精心论证和严格审核，确定了校本教材建设的重点和选题范围：一是解决教学急需的，填补学科、专业、课程空白的新教材；二是体现我校教师在某一学科、专业领域独具优势或特色的专业基础课和选修课教材；三是针对我校作为区域性院校特点，结合地方社会政治、经济、科技、文化需求所开设的地方课程教材。

常言道："意识决定形态，细节决定成败。 在教材编撰原则上，我们强调：一是注重知识性与思想性相辅相成；二是注重学术性与可读性融为一体；三是注重科学性与学科性彼此糅合；四是注重理论性与实践性相得益彰；五是注重统一性与多样性有机结合；六是注重现实性与前瞻性有效拓展。记得我国著名教育家张楚廷教授曾提出了教材编写的"五最"准则，即最佳容量准则、最广泛效用准则、最持久效应准则、最适于发展准则、最宜于传授准则，我深表赞同。

在教材编写内容上，我们要求：既重视对国内外该领域经典的基本理论问题进行透彻的解析，又对当前教育现实中所面临的新现象、新理论、新方法给予必要的回应；既考虑到如何有利于教师的课堂讲授与辅导，又顾及到如何有助于学生的课后复习和思考；既能反映我校教学内容和课程体系改革的基本方向，又要展示我校教材建设及学术研究的最新成果，适应我校创建精品课程、优质课程和品牌课程的实际需要。在教材教法改革上，我们倡导：秉持素质教育理念，坚持课堂讲授与课堂讨论相结合、教师讲授与学生自学相结合、理论学习与案例分析相结合、文本学习与网络学习相结合，"优化课内，强化课外"，重视教师启发式、研讨式、合作式等教学方式方法的科学运用，重视学生思维能力、创新能力、实践能力与创业能力的培养和训练，力图为学生知识、能力、素质的协调发展创设条件。可喜的是，这些方面都在教材编写中得到了充分体现。同时，所有教材均是在试用多年的成熟讲义的基础上经编著者精心修改和委员会严格审订后出版的，保证了教材的思想性、科学性、系统性、适用性、启发性和相对稳定性。作者所撰章节，都是自己多年来多次教授与潜心研究的内容，在阐述上颇有真知灼见，能够引领和推动学生对有关基本理论和基本技能问题产生独特的理解和感悟，最终进入学与习、学与辑、学与思、学与行、学与创相结合的学人境界。学校对所有立项出版教材均给予经费资助。

临沂师范学院《香樟书库》系列立项校本教材的编撰出版，饱含了编著者们的辛勤劳动和指导委员会成员的热情支持。"香樟"为常绿乔木，树冠广展、枝叶茂密、香气浓郁、长势雄伟，乃优质行道树及庭荫树。我们之所以命名为《香樟书库》，乃在于香樟树根系发达、材质上乘、耐贫瘠、能抗风、适应性广、生命力强。它茁壮、清新、芳香，代表健康、

温馨、希望，寓意我们的校本教材建设一定也会像2001年首批由南方移植于我校校园，如今已是根深叶茂、枝繁冠阔的香樟树一样，生机勃勃，充满希望和力量。然而，由于此项工作尚处于尝试、探索阶段，疏漏、偏颇甚或错误之处在所难免，正所谓“始生之物，其形必丑”，敬请各位同仁和同学批评指正，以期再版时予以修订。

最后，摘录俄国著名文学家托尔斯泰的一句名言与同学们共勉：“选择你爱的，爱你选择的!”

2010年8月26日
草于羲之故里

目　录

第 1 章　向 量 代 数

自然界有一些量只要确定了测量单位就可以用一个实数表示，这种量通常称为数量．而另一类量，它们既有大小又有方向，只用一个数是不足以反映它们的本质的，这类量称为向量(或矢量)．向量是几何空间的基本几何量，通过它可以反映几何空间中点与点之间的位置关系．在对向量引进运算以后，就成为研究空间的有力工具．

解析几何的思想是用代数方法研究几何，其中最常用的代数方法是坐标法，即建立一个坐标系使得点用有序实数组(称为它的坐标)表示，图形用方程表示，并通过方程来研究几何图形的性质．有时也用向量法，即利用向量的代数运算来研究几何图形性质的方法．

本章将系统地介绍向量代数基本知识及研究解析几何的基本方法，为以后各章的学习奠定基础．

1.1　向量及其线性运算

1.1.1　向量及其相关概念

在研究力学、物理学及其它应用科学时，常会遇到这样一类量，它们既有大小，又有方向. 例如，力、力矩、位移、速度、加速度等，这一类量叫做向量.

定义 1.1　既有大小又有方向的量称为**向量**.

在几何上，用一条有方向的线段(称为有向线段)来表示向量. 有向线段的长度表示向量的大小，有向线段的方向表示向量的方向．

以 A 为起点，B 为终点的有向线段所表示的向量记做$\overrightarrow{AB}$. 向量可用粗体字母表示，也可用上加箭头书写体字母表示，例如，$\boldsymbol{\alpha}$，$\boldsymbol{\beta}$，$\boldsymbol{r}$，$\boldsymbol{v}$，$\boldsymbol{F}$ 或$\vec{a}$，$\vec{r}$，$\vec{v}$，$\vec{F}$.（如图 1.1 所示）

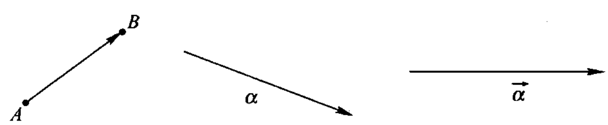


图 1.1

由于一切向量的共性是它们都有大小和方向，所以在数学上我们只研究与起点无关的向量，并称这种向量为**自由向量**，简称向量.

定义 1.2　向量的大小叫做向量的**模**.

向量 $\boldsymbol{a}$,$\vec{a}$,$\overrightarrow{AB}$的模分别记为$|\boldsymbol{a}|$，$|\vec{a}|$，$|\overrightarrow{AB}|$.

定义 1.3　模等于 1 的向量叫做**单位向量**. 模等于 0 的向量叫做**零向量**，记做 $\boldsymbol{0}$ 或$\vec{0}$. 零向量的起点与终点重合，它的方向可以看作是任意的.

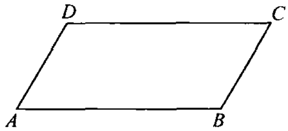


图 1.2

定义 1.4　如果两个向量 $\boldsymbol{\alpha}$ 和 $\boldsymbol{\beta}$ 的大小相等方向相同，则称其为相等的向量，记做 $\boldsymbol{\beta}=\boldsymbol{\alpha}$.（相等的向量经过平移后可以完全重合.）如果两个向量 $\boldsymbol{\alpha}$ 和 $\boldsymbol{\beta}$ 的大小相等方向相反，则称 $\boldsymbol{\beta}$ 是 $\boldsymbol{\alpha}$ 的反向量，记做 $\boldsymbol{\beta}=-\boldsymbol{\alpha}$. 也可以称 $\boldsymbol{\beta}$ 是 $\boldsymbol{\alpha}$ 的**负向量**.

例如，在平行四边形 $ABCD$ 中(如图 1.2 所示)：

$$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC},\ \overrightarrow{AD}=\overrightarrow{BC},\ \overrightarrow{BA}=\overrightarrow{CD}.\ \overrightarrow{AD}=-\overrightarrow{CB},\ \overrightarrow{AB}=-\overrightarrow{CD},\ \overrightarrow{AB}=-\overrightarrow{BA}$$

定义 1.5　两个非零向量如果它们的方向相同或相反，就称这**两个向量平行**. 向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 平行，记做 $\boldsymbol{a}//\boldsymbol{b}$.

注：1. 零向量认为是与任何向量都平行.

2. 由于每个方向都有一个单位向量，若空间中所有单位向量都以 O 为起点，则这些向量的终点就构成一以 O 点为球心半径为 1 的球面.

1.1.2　向量的线性运算

在物理学中，作用于一点 O 的两个力的合力可以用“平行四边形法则”表示出来，设向量 $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$分别表示这两个力，以 OA, OB 为边作平行四边形 $OACB$，那么平行四边形的对角线 OC 所构成的向量$\overrightarrow{OC}$就是这两个力的合力(如图 1.3 所示)

两次位移的合成一般用“**三角形法则**”，由 O 位移至 A，再由 A 位移至 B，就相当于由 O 位移至 B(如图 1.4 所示). 以 O 为起点作向量$\overrightarrow{OA}$表示 O 到 A 的位移，再以 A 为起点作向量$\overrightarrow{AB}$表示由 A 到 B 的位移，那么向量$\overrightarrow{OB}$就表示这两次位移的合成.

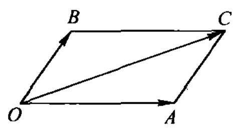


图 1.3

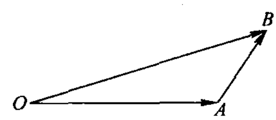


图 1.4

不难看出，力的合成也可以用三角形法则，而位移的合成也可以用平行四边形法则. 向量的加法运算正是这些物理概念在数学上的抽象和概括.

定义 1.6　设有两个向量 $\boldsymbol{\alpha}$ 与 $\boldsymbol{\beta}$，平移向量使 $\boldsymbol{\beta}$ 的起点与 $\boldsymbol{\alpha}$ 的终点重合，此时从 $\boldsymbol{\alpha}$ 的起点到 $\boldsymbol{\beta}$ 的终点的向量 $\boldsymbol{\gamma}$ 称为向量 $\boldsymbol{\alpha}$ 与 $\boldsymbol{\beta}$ 的和，记作 $\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}$，即 $\boldsymbol{\gamma}=\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}$. 这种由两个向量 $\boldsymbol{\alpha}$ 和 $\boldsymbol{\beta}$ 求它们的和 $\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}$ 的运算，称为**向量的加法**.

上述作出两向量之和的方法叫做向量加法的**三角形法则**.

当向量 $\boldsymbol{\alpha}$ 与 $\boldsymbol{\beta}$ 不平行时，平移向量使 $\boldsymbol{\alpha}$ 与 $\boldsymbol{\beta}$ 的起点重合，以 $\boldsymbol{\alpha}$, $\boldsymbol{\beta}$ 为邻边作一平行四边形，从公共起点到对角的向量等于向量 $\boldsymbol{\alpha}$ 与 $\boldsymbol{\beta}$ 的和 $\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}$. 这种方法称为平行四边形法则.

不难验证向量的加法有如下的运算规律：

(1) 交换律　$\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}=\boldsymbol{\beta}+\boldsymbol{\alpha}$;

(2) 结合律$(\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta})+\boldsymbol{\gamma}=\boldsymbol{\alpha}+(\boldsymbol{\beta}+\boldsymbol{\gamma})$；(如图 1.5 所示)

(3) $\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{0}=\boldsymbol{0}+\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{\alpha}$;

(4) $\boldsymbol{\alpha}+(-\boldsymbol{\alpha})=(-\boldsymbol{\alpha})+\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{0}$.

由于向量的加法符合交换律与结合律，三个向量 $\boldsymbol{\alpha}$, $\boldsymbol{\beta}$, $\boldsymbol{\gamma}$ 之和就可简记为 $\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}+\boldsymbol{\gamma}$，而

不必用括号来表示运算的顺序，n 个向量 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n$ 的和可以用三角形法则以折线一次画出，即作 $\overrightarrow{OA_1}=\boldsymbol{\alpha}_1$，再由 A_1 点作向量 $\overrightarrow{A_1A_2}=\boldsymbol{\alpha}_2, \cdots$，最后从 $\boldsymbol{\alpha}_{n-1}$ 的终点 A_{n-1} 作向量 $\overrightarrow{A_{n-1}A_n}=\boldsymbol{\alpha}_n$，那么 $\overrightarrow{OA_n}=\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+\boldsymbol{\alpha}_n$.

例如图 1.6 中，$\overrightarrow{OA_6}=\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+\boldsymbol{\alpha}_6$

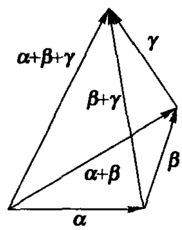


图 1.5

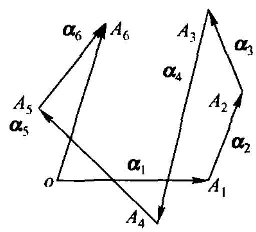


图 1.6

定义 1.7　对于 $\boldsymbol{\alpha}$ 和 $\boldsymbol{\beta}$ 两个向量，$\boldsymbol{\beta}$ 与 $\boldsymbol{\alpha}$ 的负向量 $-\boldsymbol{\alpha}$ 的和称为两个向量 $\boldsymbol{\beta}$ 与 $\boldsymbol{\alpha}$ 的差，记做 $\boldsymbol{\beta}-\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{\beta}+(-\boldsymbol{\alpha})$，这种由两个向量 $\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}$ 求它们差的运算，称为**向量的减法**. 即把向量 $-\boldsymbol{\alpha}$ 加到向量 $\boldsymbol{\beta}$ 上，便得 $\boldsymbol{\beta}$ 与 $\boldsymbol{\alpha}$ 的差 $\boldsymbol{\beta}-\boldsymbol{\alpha}$.（如图 1.7 所示）

特别地，当 $\boldsymbol{\beta}=\boldsymbol{\alpha}$ 时，有 $\boldsymbol{\alpha}-\boldsymbol{\alpha}=\vec{0}$

显然，任给向量 $\overrightarrow{AB}$ 及点 O，有 $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}$.

因此，若把向量 $\boldsymbol{\alpha}$ 与 $\boldsymbol{\beta}$ 移到同一起点 O，则从 $\boldsymbol{\alpha}$ 的终点 A 向 $\boldsymbol{\beta}$ 的终点 B 所引向量 $\overrightarrow{AB}$ 便是向量 $\boldsymbol{\beta}$ 与 $\boldsymbol{\alpha}$ 的差 $\boldsymbol{\beta}-\boldsymbol{\alpha}$.（如图 1.8 所示）

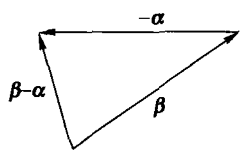


图 1.7

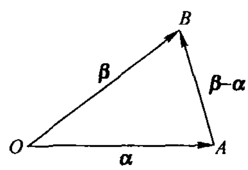


图 1.8

由三角形两边之和大于第三边的原理，有如下的三角不等式

$$|\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}| \leqslant |\boldsymbol{\alpha}|+|\boldsymbol{\beta}| \text{ 及 } |\boldsymbol{\alpha}-\boldsymbol{\beta}| \leqslant |\boldsymbol{\alpha}|+|\boldsymbol{\beta}|,$$

其中，等号在 $\boldsymbol{\beta}$ 与 $\boldsymbol{\alpha}$ 同向或反向时成立.

定义 1.8　向量 $\boldsymbol{\alpha}$ 与实数 k 的乘积记做 $k\boldsymbol{\alpha}$，规定 $k\boldsymbol{\alpha}$ 是一个向量，它的模 $|k\boldsymbol{\alpha}|=|k||\boldsymbol{\alpha}|$，它的方向当 $k>0$ 时与 $\boldsymbol{\alpha}$ 相同，当 $k<0$ 时与 $\boldsymbol{\alpha}$ 相反. 上述定义的这种运算称为**数乘向量**. 当 $k=0$ 时，$|k\boldsymbol{\alpha}|=0$，即 $k\boldsymbol{\alpha}$ 为零向量，这时它的方向可以是任意的.（如图 1.9 所示）

特别地，当 $k=\pm 1$ 时，有 $1\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{\alpha}$，$(-1)\boldsymbol{\alpha}=-\boldsymbol{\alpha}$. 如果 $\boldsymbol{\alpha}=0$，则对任意 k，有 $k\boldsymbol{\alpha}=0$.

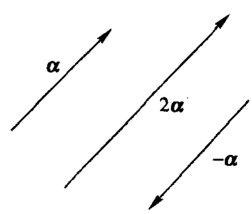


图 1.9

数乘向量的性质是：

(1) $k(l\boldsymbol{\alpha})=(kl)\boldsymbol{\alpha}$，$k, l$ 是实数，加法与数乘向量之间有分配律；

(2) $(k+l)\boldsymbol{\alpha}=k\boldsymbol{\alpha}+l\boldsymbol{\alpha}$；

(3) $k(\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta})=k\boldsymbol{\alpha}+k\boldsymbol{\beta}$.

例 1.1 如图 1.10 所示在平行四边形 $ABCD$ 中，设$\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{\alpha}$，$\overrightarrow{AD}=\boldsymbol{\beta}$. 试用 $\boldsymbol{\alpha}$ 和 $\boldsymbol{\beta}$ 表示向量 $\overrightarrow{MA}$、$\overrightarrow{MB}$、$\overrightarrow{MC}$、$\overrightarrow{MD}$，其中 M 是平行四边形对角线的交点.

解 由于平行四边形的对角线互相平分，所以

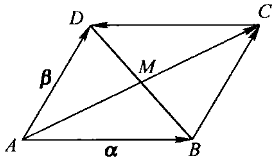


图 1.10

$$\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}=\overrightarrow{AC}=2\,\overrightarrow{AM},$$

即

$$2\,\overrightarrow{AM}=(\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}),$$

于是$\overrightarrow{MA}=-\dfrac{1}{2}(\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta})$. 因为$\overrightarrow{MC}=-\overrightarrow{MA}$，

所以

$$\overrightarrow{MC}=\frac{1}{2}(\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}).$$

又因

$$\boldsymbol{\beta}-\boldsymbol{\alpha}=\overrightarrow{BD}=2\,\overrightarrow{MD},$$

所以$\overrightarrow{MD}=\dfrac{1}{2}(\boldsymbol{\beta}-\boldsymbol{\alpha})$. 由于$\overrightarrow{MB}=-\overrightarrow{MD}$，所以

$$\overrightarrow{MB}=-\frac{1}{2}(\boldsymbol{\beta}-\boldsymbol{\alpha}).$$

定义 1.9 设 $\boldsymbol{\alpha}\neq 0$，则向量$\dfrac{\boldsymbol{\alpha}}{|\boldsymbol{\alpha}|}$是与 $\boldsymbol{\alpha}$ 同方向的单位向量，记为 $\boldsymbol{\alpha}_0$. 于是 $\boldsymbol{\alpha}=|\boldsymbol{\alpha}|\boldsymbol{\alpha}_0$. 上述这一过程称为**向量的单位化**.

向量的加法运算和数乘向量运算统称为**向量的线性运算**.

例 1.2 设平面上的一个四边形的对角线互相平分，证明它是平行四边形.

证 设 M 是四边形 $ABCD$ 的对角线的交点，(如图 1.10 所示)因为

$$\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{MC},\ \overrightarrow{BM}=\overrightarrow{MD},\ \overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{MD}=\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{BM}=\overrightarrow{BC}$$

所以$\overrightarrow{AD}$与$\overrightarrow{BC}$平行且长度相等. 故四边形 $ABCD$ 是平行四边形.

例 1.3 P_1，P_2 是轴 u 上坐标分别为 u_1，u_2 的点，又$\overrightarrow{\xi}$是轴 u 上的单位向量，则 $\overrightarrow{P_1P_2}=(u_2-u_1)\overrightarrow{\xi}$.

解 因为 $OP_1=u_1$，所以$\overrightarrow{OP_1}=u_1\overrightarrow{\xi}$，同理可得$\overrightarrow{OP_2}=u_2\overrightarrow{\xi}$，所以

$$\overrightarrow{P_1P_2}=\overrightarrow{OP_2}-\overrightarrow{OP_1}=u_2\overrightarrow{\xi}-u_1\overrightarrow{\xi}=(u_2-u_1)\overrightarrow{\xi}.$$

1.1.3 共线向量、共面向量

定义 1.10 方向相同或相反的向量称为**共线向量**. 即两个平行向量的起点放在同一点时，它们的终点和公共的起点在一条直线上. 平行同一平面的向量称为**共面向量**.

如 $\boldsymbol{\alpha}$ 与 $\boldsymbol{\beta}$ 是共线的，可以记为 $\boldsymbol{\alpha}/\!/\boldsymbol{\beta}$.

特别的，设有 $k(k\geqslant 3)$ 个向量，当把它们的起点放在同一点时，如果 k 个终点和公共起点在一个平面上，就称这 k 个向量共面.

定理 1.1 两个向量 $\boldsymbol{\alpha}$，$\boldsymbol{\beta}$ 共线的充分必要条件是存在不全为零的数 u 和 v，使

$$u\boldsymbol{\alpha}+v\boldsymbol{\beta}=0$$

证 定理的充分性是显然的，下面证明定理的必要性.

设 $\boldsymbol{\alpha}$ 与 $\boldsymbol{\beta}$ 共线，如果 $\boldsymbol{\alpha}\neq\mathbf{0}$，则有 $\boldsymbol{\alpha}$ 的模不等于零，因而有非负实数 m 使得：$|\boldsymbol{\beta}|=m|\boldsymbol{\alpha}|$. 当 $\boldsymbol{\alpha}$ 与 $\boldsymbol{\beta}$ 同向时，可取 $u=m$，$v=-1$，而当 $\boldsymbol{\alpha}$ 与 $\boldsymbol{\beta}$ 反向时，令 $u=m$，$v=1$ 就都有 $u\boldsymbol{\alpha}+v\boldsymbol{\beta}=\mathbf{0}$，

其中,u, v 是不全为零的数；当 $\boldsymbol{\alpha}=\mathbf{0}$ 时，显然有 $1\cdot\boldsymbol{\alpha}+0\cdot\boldsymbol{\beta}=\mathbf{0}$.

定理 1.2　三个向量 $\boldsymbol{\alpha}$, $\boldsymbol{\beta}$, $\boldsymbol{\gamma}$ 共面的充分必要条件是存在不全为零的的数 k_1, k_2, k_3 使 $k_1\boldsymbol{\alpha}+k_2\boldsymbol{\beta}+k_3\boldsymbol{\gamma}=\mathbf{0}$.

证　如果三个向量 $\boldsymbol{\alpha}$, $\boldsymbol{\beta}$, $\boldsymbol{\gamma}$ 中有两个向量例如 $\boldsymbol{\alpha}$, $\boldsymbol{\beta}$ 共线，由定理 1.1 知，则有不全为零的数 u, v 使 $u\boldsymbol{\alpha}+v\boldsymbol{\beta}=0$ 成立，那么 u, v, 0 仍不全为零，有 $u\boldsymbol{\alpha}+v\boldsymbol{\beta}+0\boldsymbol{\gamma}=\mathbf{0}$

设三个向量 $\boldsymbol{\alpha}$, $\boldsymbol{\beta}$, $\boldsymbol{\gamma}$ 两两不共线，作$\overrightarrow{OB}=\boldsymbol{\alpha}$, $\overrightarrow{OA}=\boldsymbol{\beta}$, $\overrightarrow{OC}=\boldsymbol{\gamma}$, 过点 C 作直线与 OB 平行交$\overrightarrow{OA}$所在直线于 D 点，(如图 1.11 所示)于是根据三角形法则及数乘向量定义有

$$\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OD}+\overrightarrow{DC}=u\,\overrightarrow{OA}+v\,\overrightarrow{OB},$$

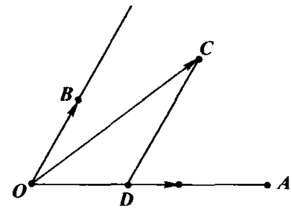


图 1.11

从而有

$$u\,\overrightarrow{OA}+v\,\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OC}=\mathbf{0}.$$

其中,u, v, -1 不全为零.

反之，如有不全为零的的数 k_1, k_2, k_3 使 $k_1\boldsymbol{\alpha}+k_2\boldsymbol{\beta}+k_3\boldsymbol{\gamma}=\mathbf{0}$ 成立，不妨设 $k_3\neq 0$, 于是

$$\boldsymbol{\gamma}=-\frac{k_1}{k_3}\boldsymbol{\alpha}-\frac{k_2}{k_3}\boldsymbol{\beta}.$$

说明 $\boldsymbol{\gamma}$ 是以 $-\dfrac{k_1}{k_3}\boldsymbol{\alpha}$, $-\dfrac{k_2}{k_3}\boldsymbol{\beta}$ 为边的平行四边形的对角线，因此 $\boldsymbol{\alpha}$, $\boldsymbol{\beta}$, $\boldsymbol{\gamma}$ 共面.

用向量作为工具，可以证明平面几何中的命题. 下面通过例子说明平面几何的命题和向量的命题是如何相互转化的.

例 1.4　$\triangle ABC$ 中，D 是 BC 边中点. 证明：$\overrightarrow{AD}=\dfrac{1}{2}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC})$.

证　如图 1.12 所示，由三角形法则$\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BD}\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CD}$又因为 D 是 BC 的中点，$\overrightarrow{BD}=-\overrightarrow{CD}$, 两式相加，得 $2\,\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}$, 即$\overrightarrow{AD}=\dfrac{1}{2}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC})$.

例 1.5　用向量证明三角形中位线定理.

证　如图 1.13 所示，设 D, E 分别是 AB, AC 边中点，则

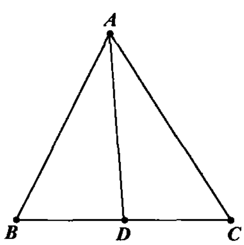


图 1.12

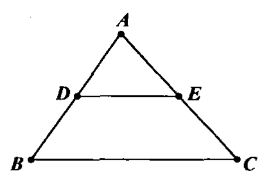


图 1.13

$$\overrightarrow{DE}=\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{AE}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AC})=\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}.$$

由数乘向量定义知，$DE//BC$ 且 $DE=\dfrac{1}{2}BC$, 即三角形两边中点连线平行于底边且等于底边的一半.

例 1.6　用向量法证明：如点 M 是 $\triangle ABC$ 的重心，AD 是 BC 边上的中线，（如图 1.14 所示）则

$$AM=\frac{2}{3}AD$$

证　因为$\overrightarrow{AM}$，$\overrightarrow{AD}$共线，故可设$\overrightarrow{AM}=x\overrightarrow{AD}$又因为 D 是 BC 边上的中点，由例 1.4 知，

$$\overrightarrow{AD}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}).$$

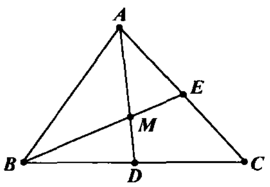


图 1.14

因此 $$\overrightarrow{AM}=\frac{x}{2}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}).$$

又因为 BE 是 AC 边上中线，并设$\overrightarrow{ME}=y\overrightarrow{BE}$有

$$\overrightarrow{BE}=\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AE}=-\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}.$$

因此 $$\overrightarrow{ME}=y\left(-\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}\right).$$

在 $\triangle AME$ 中，$\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{ME}+\overrightarrow{EA}=0$，即

$$\frac{x}{2}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC})+y\left(-\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}\right)-\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}=\mathbf{0}.$$

即

$$\left(\frac{x}{2}-y\right)\overrightarrow{AB}+\left(\frac{x+y-1}{2}\right)\overrightarrow{AC}=\mathbf{0}.$$

由$\overrightarrow{AB}$，$\overrightarrow{AC}$不共线，根据定理(1.1)有

$$\begin{cases}\dfrac{x}{2}-y=0\\[2mm]\dfrac{x+y-1}{2}=0\end{cases}$$

解此方程组得 $x=\dfrac{2}{3}$ 即 $AM=\dfrac{2}{3}AD$.

习　题　1.1

1. 要使下列各式成立，向量 $\boldsymbol{\alpha}$，$\boldsymbol{\beta}$ 应满足什么条件？

(1) $|\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}|=|\boldsymbol{\alpha}-\boldsymbol{\beta}|$；　　(2) $|\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}|=|\boldsymbol{\alpha}|+|\boldsymbol{\beta}|$；

(3) $|\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}|=|\boldsymbol{\alpha}|-|\boldsymbol{\beta}|$；　　(4) $|\boldsymbol{\alpha}-\boldsymbol{\beta}|=|\boldsymbol{\alpha}|+|\boldsymbol{\beta}|$；

(5) $|\boldsymbol{\alpha}-\boldsymbol{\beta}|=|\boldsymbol{\alpha}|-|\boldsymbol{\beta}|$；　　(6) $\dfrac{\boldsymbol{\alpha}}{|\boldsymbol{\alpha}|}=\dfrac{\boldsymbol{\beta}}{|\boldsymbol{\beta}|}$.

2. 已知向量方程组$\begin{cases}2\boldsymbol{x}-3\boldsymbol{y}=\boldsymbol{\alpha}\\ \boldsymbol{x}+5\boldsymbol{y}=\boldsymbol{\beta}\end{cases}$，求解向量 $\boldsymbol{x}$，$\boldsymbol{y}$.

3. 已知四边形 $ABCD$ 中，$\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{\alpha}-2\boldsymbol{\gamma}$，$\overrightarrow{CD}=5\boldsymbol{\alpha}+6\boldsymbol{\beta}-8\boldsymbol{\gamma}$，对角线 AC，BD 的中点分别为 E，F，求$\overrightarrow{EF}$.

4. 已知平行四边形 $ABCD$ 的对角线为$\overrightarrow{AC}=\boldsymbol{\alpha}$，$\overrightarrow{BD}=\boldsymbol{\beta}$，求$\overrightarrow{AB}$，$\overrightarrow{BC}$.