现代物流运筹学

Modern Logistics Operations

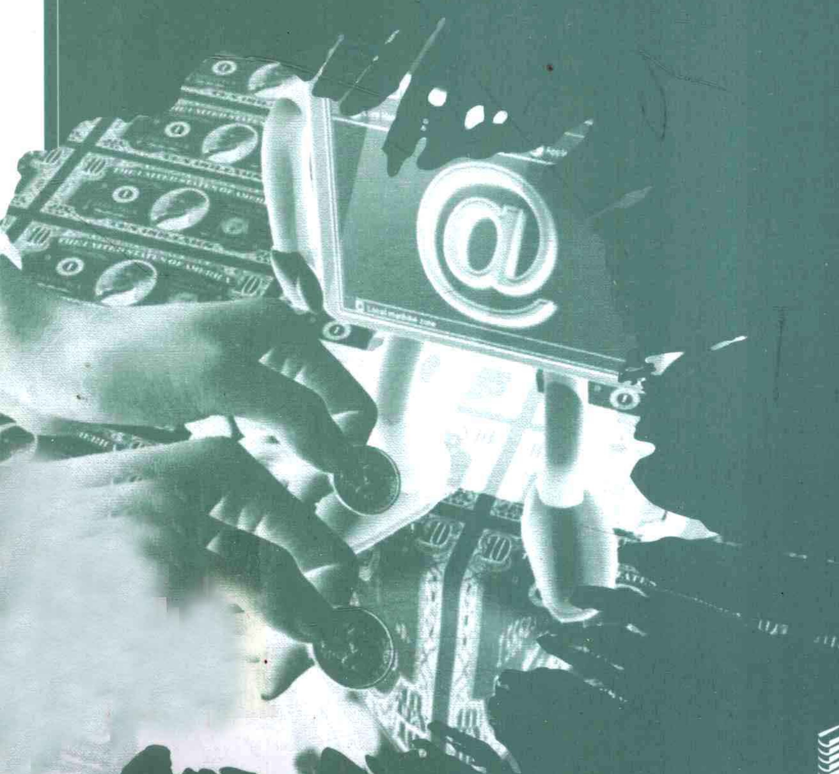
沈家骅 ◎ 主编

赵刚 ◎ 副主编　张志乔 ◎ 主审

21世纪高等职业教育财经类规划教材

物流管理专业

Logistics Management



人民邮电出版社
POSTS & TELECOM PRESS

现代物流运筹学

Modern Logistics Operations

沈家骅 ◎ 主编

赵刚 ◎ 副主编　张志乔 ◎ 主审

21世纪高等职业教育财经类规划教材

物流管理专业

Logistics Management

人民邮电出版社

北京

图书在版编目（CIP）数据

现代物流运筹学 / 沈家骅主编. -- 北京 : 人民邮电出版社, 2011.3
21世纪高等职业教育财经类规划教材. 物流管理专业
ISBN 978-7-115-24320-1

Ⅰ. ①现… Ⅱ. ①沈… Ⅲ. ①物流—运筹学—高等学校：技术学校—教材 Ⅳ. ①F252

中国版本图书馆CIP数据核字(2011)第002765号

内 容 提 要

本书根据全国高等职业教育物流管理专业规划教材的教学大纲编写而成，比较系统地论述了物流运筹学的基本概念、基本内容和基本方法，介绍了Excel在物流管理中的运用以及物流运筹问题建模方法等。全书内容包括：线性规划图解法、线性规划单纯形法、运输问题（TP）、整数规划简介、图与网络规划、网络计划、对策论。为了让读者能够及时地检查自己的学习效果，把握自己的学习进度，每章后面都附有丰富的习题。

本书既可以作为高职高专物流管理专业的教材，也可以作为企业物流管理人员自学的参考用书。

21世纪高等职业教育财经类规划教材·物流管理专业

现代物流运筹学

◆ 主　　编　沈家骅
　副 主 编　赵　刚
　主　　审　张志乔
　责任编辑　李育民

◆ 人民邮电出版社出版发行　　北京市崇文区夕照寺街14号
　邮编　100061　　电子函件　315@ptpress.com.cn
　网址　http://www.ptpress.com.cn
　北京铭成印刷有限公司印刷

◆ 开本：700×1000　1/16
　印张：12.5　　　　2011年3月第1版
　字数：293千字　　　2011年3月北京第1次印刷

ISBN 978-7-115-24320-1

定价：23.00元

读者服务热线：(010)67170985　印装质量热线：(010)67129223
反盗版热线：(010)67171154
广告经营许可证：京崇工商广字第0021号

出版说明

近30年来，我国取得巨大的进步，靠的是改革开放带来的经济腾飞。经济的发展使得财经类学科一时成为显学，财经类专业也成为了大中专院校的热门专业。

当前，企业对财经类人才的需求又开始呈现增长的态势，但同时企业对财经类人才的要求与以往相比也越来越高。因此，能够培养出数量充足，而且素质和技能较高、能够充分适应和满足企业需求的财经类人才，已成为未来高职高专院校亟待探索和解决的问题。

何谓高层次的财经人才，首先，应该有科学、完整、宽厚、扎实的专业知识，现在市场细分，岗位细分，越是细分，就对人才的要求越综合，就越需要具备综合知识，以做好细分后的工作；其次，需要有较强的实践能力，能够高质量地承担第一线工作，并且能够在实践中不断地发展自己。要培养出这样一支高素质、高技能的应用型技术人才队伍，就要摸索出一套有效的人才培养模式，做好高校人才培养工作。

教材建设在高校人才培养中占有重要的地位。基于这一点，人民邮电出版社在广泛征求全国高职高专财经类专家、学者和教师意见的基础上，组建了 21 世纪高等职业教育财经类规划教材编写委员会，以课题研究的形式，组织全国多所知名财经院校教师，召开了多次教材建设研讨会，从而确立了系列规划教材的编写思路和编写体例，并对系列规划教材的大纲和内容进行了深入研讨和论证，几易其稿，终能付梓。

本系列规划教材涉及财务会计、财政金融、市场营销、工商管理、经济贸易、物流管理、电子商务等多个方向，其内容既体现教育部发布的 16 号文件精神，又与高职高专院校教学实践相结合，具有鲜明的编写特色。

1. 整体策划，项目推进。本系列规划教材注重专业整体规划，从分析专业工作岗位入手，获得专业核心技能和岗位核心技能，进而来组织教材选题，安排教材结构和内容。同时，本系列教材采用项目研究、整体推进的形式，可以有效保证各专业教材内部之间的衔接性和系统性。

2. 定位准确，紧扣改革。本系列规划教材紧扣教学改革的最新趋势，体现教育部发布的《关于全面提高高等职业教育教学质量的若干意见》的文件精神，专业核心课程以应用知识为主，重点是培养学生解决实际问题的能力，满足培养应用型人才的教学需求。

3. 理论够用，突出技能。本系列规划教材遵循“以就业为导向，工学结合”的原则，以实用为基础，根据企业的岗位需求进行课程体系设置和教材内容选取，理论知识以“够用”为度，突出工作过程导向，突出技能的培养。在编写体例上将案例教学方式和项目教学方式与不同的课程合理结合，以期能够更贴近教学实际。

为了提升教学效果和满足学生的学习需求，本系列规划教材大部分还建设了配套的立体化教学辅助资源，包括多媒体课件、电子教案、实训资料、习题及答案、生动的教学案例及案例分析，部分教材还配有图片、动画和视频等教学资源。

期望通过本系列规划教材的推出，能够为推动财经类专业职业教育教学模式、课程体系和教学方法的改革贡献一份力量。同时，我们也希望能有更多的专家和老师参与到本系列规划教材的建设中来，对教材提出宝贵的意见和建议。

前 言

“现代物流运筹学”是物流管理专业人才必须熟练掌握的一门重要专业课程。第二次世界大战时期，美军开始系统地研究军事后勤保障问题以及后勤服务中的物资和武器设备的调运问题，研究成果后来分别发展为物流学和运筹学。运筹学在战后更是被运用到包括经济在内的相关行业，并迅速发展成为一门比较完备的学科。相对而言，物流学科发展比较缓慢，但物流学与运筹学的相互联系、相互渗透和交叉发展却日趋紧密。

本书在编写过程中以实例结合理论，将应用技术具体化，避免繁琐的数学公式推导，通俗易懂，强调对学生实践能力的培养。因而特别符合高职高专学生的学习要求，使他们能利用本书掌握课程要点，为以后的工作和学习打好基础。

本书可作为高等职业教育物流管理、运输、货运等专业的教材或教学参考书，也适合企事业单位管理人员和工程技术人员阅读参考。书中每一章都附有思考题和练习题，可帮助读者复习和巩固所学的内容。

全书内容包括物流的基本概念、线性规划图解法、线性规划单纯形法、运输问题（TP）、整数规划简介、图与网络规划、网络计划、对策论，以及使用Excel求解运筹学问题的方法。

本书的参考学时为40～54学时，各章的参考学时见下面的学时分配表。

章　　节	课程内容	学　　时
第 1 章	线性规划图解法	4～6
第 2 章	线性规划单纯形法	6～8
第 3 章	运输问题（TP）	6～8
第 4 章	整数规划简介	6～8
第 5 章	图与网络规划	6～8
第 6 章	网络计划	6～8
第 7 章	对策论	6～8
课时总计		40～54

参加本书编写工作的人员及其分工情况如下：上海海事大学的赵刚编写了第 1 章和第 2 章；上海海事大学的盛子宁编写了第 4 章；宁波城市学院的李春富编写了第 5 章；上海市工业技术学校的陈秀英编写了第 3 章；西安科技大学的王新平编写了各章中的使用Excel求解运筹学问题的方法部分；上海海事大学的沈家骅编写了第 6 章和第 7 章；最后由沈家骅统稿并任主编，浙江经贸职业技术学院的张志乔主审。上海海事大学的张修丽对本书的编写工作提供了一些帮助，在此表示衷心的感谢。

由于时间仓促和水平有限，错漏之处在所难免，恳请广大读者指正。

编　者

2011年2月

目录

第 1 章

线性规划图解法

学习目标

- 通过介绍几个简单的实际问题，建立线性规划模型。
- 应用图解法，培养和提高学生分析问题、解决实际问题的能力。
- 培养优化思想，能用一定的数学方法实现优化。

在人们的生产实践中，经常会遇到如何利用现有资源来安排生产，以取得最大经济效益的问题。此类问题构成了运筹学的一个重要分支——数学规划，而线性规划（Linear Programming，LP）则是数学规划的一个重要分支。

自从 1947 年 G. B. Dantzig 提出求解线性规划的单纯形方法以来，线性规划在理论上日趋成熟，在实际应用中日益广泛与深入。特别是在计算机能处理成千上万个约束条件和决策变量的线性规划问题之后，线性规划的适用领域更为广泛了，已成为现代管理中经常采用的基本方法之一。

1.1 线性规划及其数学模型

1.1.1 案例

例 1.1 某机床厂生产甲、乙两种机床，每台销售后的利润分别为 4 000 元与 3 000 元。生产甲机床需用 A、B 两种机器加工，加工时间分别为每台 2 小时和 1 小时；生产乙机床需用 A、B、C 三种机器加工，加工时间为每台各 1 小时。若每天可用于加工的机器时数分别为 A 机器 10 小时、B 机器 8 小时和 C 机器 7 小时，问该厂应生产甲、乙机床各几台，才能使总利润最大?

上述问题的数学模型：设该厂生产 x_1 台甲机床和 x_2 台乙机床时总利润 z 最大，首先列出该问题的数据，如表 1.1 所示。

表 1.1　　例 1.1 数据表

机器 \ 机床	单耗（时/台）		生产能力（时/天）
	甲 x_1	乙 x_2	
A	2	1	10
B	1	1	8
C	0	1	7
利润（百元/件）	40	30	

根据题意，则 x_1, x_2 应满足

（目标函数）
$$\max\ z = 40x_1 + 30x_2 \tag{1-1}$$

s.t.（约束条件）
$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 \leqslant 10 \\ x_1 + x_2 \leqslant 8 \\ x_2 \leqslant 7 \\ x_1, x_2 \geqslant 0 \end{cases} \tag{1-2}$$

这里 max 是英文 maximize（最大化）的缩写。变量 x_1, x_2 称为决策变量；式（1-1）被称为问题的目标函数；式（1-2）中的几个不等式是问题的约束条件，记为 s.t.（即 subject to）。上述即为一规划问题数学模型的 3 个要素。由于上面的目标函数及约束条件均为线性函数，故被称为线性规划问题。

总之，线性规划问题是在一组线性约束条件的限制下，求一线性目标函数最大或最小值的问题。

在解决实际问题时，把问题归结成一个线性规划数学模型是很重要的一步，但往往也是困难的一步，模型建立得是否恰当，直接影响到求解。而选取适当的决策变量，是我们建立有效数学模型的关键之一。

例 1.2　有 A、B、C 三个工地，每天 A 工地需要水泥 17 百袋，B 工地需要水泥 18 百袋，C 工地需要水泥 15 百袋。为此，甲、乙两个水泥厂每天生产 23 百袋水泥和 27 百袋水泥专门供应 3 个工地。两个水泥厂至工地的单位运价如表 1.2 所示。问：如何组织调运使总运费最省。

表 1.2　　**水泥厂至工地运价**　　千元/百袋

工地 / 水泥厂	A	B	C
甲	1	1.5	2
乙	2	4	2

解　设 x_{ij} 为甲、乙两个水泥厂分别运到 A、B、C 3 个工地的水泥袋数，则可以得出如表 1.3 所示的数据表。

表 1.3　　**例 1.2 数据表**

工地 / 水泥厂	A	B	C	供应量（百袋）
甲	x_{11}	x_{12}	x_{13}	23
乙	x_{21}	x_{22}	x_{23}	27
需求量（百袋）	17	18	15	50

由题意容易得到如下数学模型：

$$\min z=x_{11}+1.5x_{12}+2x_{13}+2x_{21}+4x_{22}+2x_{23}$$

$$\text{s.t.}\begin{cases} x_{11}+x_{12}+x_{13}=23 \\ x_{21}+x_{22}+x_{23}=27 \\ x_{11}+x_{21}=17 \\ x_{12}+x_{22}=18 \\ x_{13}+x_{23}=15 \\ x_{ij}\geqslant 0(i=1,2;j=1,2,3) \end{cases} \tag{1-3}$$

其中，min 是英文 minimize（最小化）的缩写。

例 1.3　光明厂生产中需要某种混合料，它应包含甲、乙、丙 3 种成分。这些成分可由市场购买的 A、B、C 3 种原料混合后得到。已知各种原料的单价、成分含量以及各种成分每月的最低需求量如表 1.4 所示。

表 1.4

原料 / 成分	A	B	C	各种成分的每月最低需求量
甲	1	1	1	20
乙	1/2	1/2	1/4	6
丙	2	1	1	10
原料的单价（万元/吨）	6	3	2	

问：该厂每月应购买各种原料多少吨，才能使在满足需求的基础上使用于购买原料所耗费的资金为最少？

解 现设 x_1、x_2、x_3 为原料 A、B、C 的购买数量，因为 x_1、x_2、$x_3 \geqslant 0$，设 z 为总的耗费资金，则 $\min z = 6x_1 + 3x_2 + 2x_3$。由题意容易得到如下数学模型：

$$\min z = 6x_1 + 3x_2 + 2x_3$$

$$\text{s.t.}\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 \geqslant 20 \\ \dfrac{1}{2}x_1 + \dfrac{1}{2}x_2 + \dfrac{1}{4}x_3 \geqslant 6 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 \geqslant 10 \\ x_1, x_2, x_3 \geqslant 0 \end{cases} \tag{1-4}$$

例 1.4 一家昼夜服务的饭店，一天 24 小时分成 6 个时段，每个时段需要的服务员数如表 1.5 所示。

表 1.5

起 迄 时 间	服务员人数
2～6 时	4
6～10 时	8
10～14 时	10
14～18 时	7
18～22 时	12
22～2 时	4

每个服务员每天连续工作 8 小时，且在每个时段开始时上班。问：最少需要多少名服务员？试建立该问题的线性规划模型。

解 现设 x_j 为第 j 时段开始上班工作的服务员数（$j = 1,2,3,4,5,6$），又设 z 为服务员总的人数。由题意得到如下数学模型：

$$\min\ z = x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6$$

$$\text{s.t.}\begin{cases} x_6 + x_1 \geqslant 4 \\ x_1 + x_2 \geqslant 8 \\ x_2 + x_3 \geqslant 10 \\ x_3 + x_4 \geqslant 7 \\ x_4 + x_5 \geqslant 12 \\ x_5 + x_6 \geqslant 4 \\ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 \geqslant 0 \end{cases} \tag{1-5}$$

1.1.2 线性规划的一般数学模型

线性规划模型的目标是企业利润的最大化。在不考虑产品销售情况的理想状态

下，将资源尽可能地配置到利润率更高的产品上去，并尽可能减少资源的浪费，是实现线性规划模型总目标的关键所在。

一般线性规划模型可以表示如下：

$$\text{opt } z = c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n \tag{1-6}$$

$$\text{s.t.}\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \leqslant b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n \leqslant b_2 \\ \cdots\cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n \leqslant b_m \\ x_j \geqslant 0, j = 1,2,\cdots,n \end{cases} \tag{1-7}$$

建立一个实用的线性规划模型必须明确以下四个组成部分的含义：

第一，决策变量。决策变量是模型中的可控而未知的因素，经常使用带不同下标的英文字母表示不同的变量，如式（1-7）中的 x_j。

第二，目标函数。线性规划模型的目标是求系统目标的极值，可以是求极大值，如企业的利润和效率等，也可以是求极小值，如成本和费用等。式（1-6）即为最优化目标函数，简称目标函数。式中 opt 即 optimize（最优化）的缩写，根据问题要求不同，可以表示为 max（最大化）或 min（最小化）。

第三，约束条件。约束条件是指实现系统目标的限制性因素，通常表现为生产力约束、原材料约束、能源约束、库存约束等资源性约束，也有可能表现为指标约束和需求约束，如式（1-7）中的前 m 个式子。

第四，非负限制。由于在生产实际问题中，资源总是代表一些可以计量的实物或人力，因而一般不能是负数，如式（1-7）中的最后一个式子。

由式（1-6）和式（1-7）两式组成的线性规划模型还可以用下列的矩阵式表示，即

$$\text{opt z} = \boldsymbol{CX}$$

$$\text{s.t.}\begin{cases} \boldsymbol{AX} \leqslant \boldsymbol{B} \\ \boldsymbol{X} \geqslant \boldsymbol{O} \end{cases}$$

其中，$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$ 为系数矩阵；$\boldsymbol{C} = [c_1,\cdots,c_n]$；

$\boldsymbol{X} = [x_1,\cdots, x_n]^{\mathrm{T}}$；$\boldsymbol{B} = [b_1, \cdots,b_m]^{\mathrm{T}}$；$\boldsymbol{O} = [0, \cdots,0]^{\mathrm{T}}$ 表示 0 矩阵。

1.2　线性规划的图解法

上一节列举了四个把实际问题构造成线性规划数学模型的例子，初步解决了模型构造问题。如何求解数学模型以获得问题的最优解自然成为了本节关心的焦点。

从简单到复杂、从具体到抽象是人类认识客观事物的一般过程，首先讨论用图解

法解决只包含两个变量的线性规划问题正是尊重人类认识规律的具体体现。虽然在实际问题中，只有两个决策变量的小问题是很少见的，但图解法能揭示线性规划问题解的一些基本概念，并为解决大规模线性规划问题提供原则性的指导。

图解法顾名思义是通过绘图来达到求解线性规划问题这一目的的。在介绍图解法的具体步骤前，让我们先来明确一些有关线性规划问题解的概念。

决策变量的一组取值便构成了线性规划问题的一个解；满足约束条件（包括资源约束和非负约束）的解称为可行解；所有可行解构成的集合称为可行域；使目标函数达到所追求极值的可行解称为最优解；最优解所对应的目标函数值称为最优值。

例 1.5 用图解法求解线性规划问题：

（目标函数） $\max\ z = 2x_1 + 3x_2$

s.t.（约束条件）
$$\begin{cases} 4x_1 \leqslant 16 \\ 4x_2 \leqslant 12 \\ x_1 + 2x_2 \leqslant 8 \\ x_1, x_2 \leqslant 0 \end{cases}$$

解 第一步，构造平面直角坐标系（由于决策变量非负，所以只取第一象限）；

第二步，为了在图上表示可行域，按自然顺序将各个约束条件都绘制出来（不等式约束先绘制其对应的等式直线，然后再判断其不等号方向并用箭头方向代表所选定的半平面）；

约束条件 $x_1 + 2x_2 \leqslant 8$ 要求问题的可行解位于直线 $x_1 + 2x_2 = 8$ 的左下方。直线 $x_1 + 2x_2 = 8$ 可先通过两个方便点绘制出来，如（8，0）和（0，4）。直线上的箭头表明了满足条件的区域。同理，约束条件 $4x_1 \leqslant 16$ 和 $4x_2 \leqslant 12$ 也可以用直线表示出来。图 1.1 中的阴影部分即为例 1.5 的可行域。显然，在这个区域内的每一个点（有无数多个）都是一个可行解。我们的目标是确定使目标函数 $z = 2x_1 + 3x_2$ 达到最大值的最优解。

第三步，选取一个方便的 z 值，使得此 z 值所对应的目标函数的直线通过可行域的某一点或一些点；目标函数 $z = 2x_1 + 3x_2$ 可以表示为斜截式 $x_2 = -\frac{2}{3}x_1 + \frac{z}{3}$。不妨令 $z = 0$，于是有 $x_2 = -\frac{2}{3}x_1$，它是一条通过坐标原点的直线。

第四步，为寻求最优解，向使 z 值得到优化的方向平行移动目标函数直线，当目标函数直线平移到极限状态时，其与可行域的交点即为最优解点。

向右上方平行移动目标函数直线 $x_2 = -\frac{2}{3}x_1 + \frac{z}{3}$，得到一族使 z 值（截距）不断增加的平行线（如图 1.1 虚线所示）。目标函数直线向右上方移动使目标函数值增加，而这样的移动是受到一定限制的，那就是必须保持直线与可行域至少有一个公共点。显然可行域的顶点 B 就是目标函数直线脱离可行域前经过的最后一点，即 B（4, 2）

就是最优解点，其最优值 $z = 2 \times 4+3 \times 2 = 14$。所以，最优解：$x_1 = 4$，$x_2 = 2$，最优值 $z_{max} = 14$。

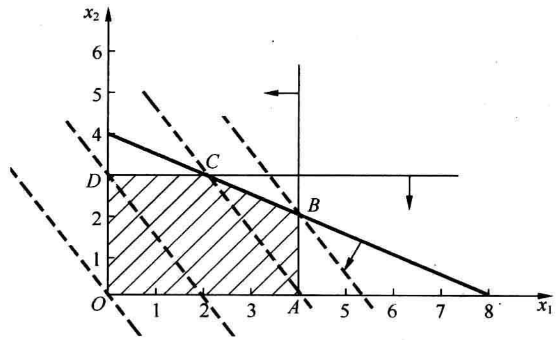


图 1.1　例 1.5

例 1.6　用图解法求解线性规划问题：

（目标函数）　　　$\min z = 40x_1 + 36x_2$

s.t.（约束条件）

$$\begin{cases} x_1 \leqslant 8 \\ x_2 \leqslant 10 \\ 5x_1 + 3x_2 \geqslant 45 \\ x_1, x_2 \geqslant 0 \end{cases}$$

解　为了在图上表示可行域，首先将每一约束条件绘制出来。约束条件 $x_1 \leqslant 8$ 和 $x_2 \leqslant 10$ 的可行域分别位于其直线的左侧和下方，与坐标系构成一个矩形；而约束条件 $5x_1 + 3x_2 \geqslant 45$ 要求问题的任何一个可行解都应位于直线 $5x_1 + 3x_2 = 45$ 的右上方；于是可得如图 1.2 阴影部分所示的可行域。

为寻求最优解，可以选取一个方便的 z 值，使得此 z 值所对应的目标函数的直线通过可行域的某一点或某些点，这里不妨假设 $z = 600$。当 z 值由大变小时，直线 $x_2 = -\dfrac{40}{36}x_1 + \dfrac{z}{36}$ 沿其法线方向向左下方平移，当目标函数线平移至 A 点时 z 值达到最小（见图 1.2），即此线性规划问题的最优解为 $X^* = \left(8, \dfrac{5}{3}\right)$。所以，最优解：$x_1 = 8$，$x_2 = \dfrac{5}{3}$，最优值 $z_{min} = 380$。

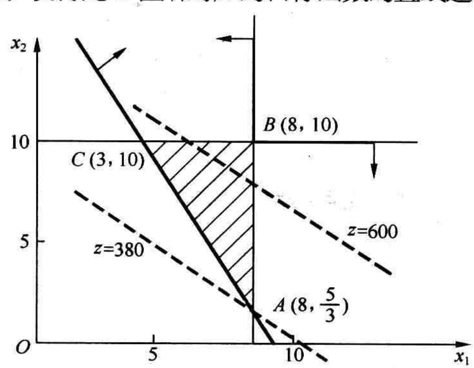


图 1.2　例 1.6

图解法所揭示的第一个重要结论：对一般线性规划模型而言，求解结果可能出现唯一最优解、无穷多最优解、无界解和无可行解四种情况。

1. 唯一最优解（上述两例的最优解都是唯一的）

2. 无穷多最优解（多重解）

某些线性规划问题，可能存在一个以上的可行解使目标函数达到最优，在这种情况下，所有这些可行解都是最优解，线性规划具有无穷多最优解（或称为具有多重解）。为说明这一情况，现将例 1.5 的目标函数变为 $z = 2x_1 + 4x_2$，则以 z 为参数表示目标函数的直线族与约束条件 $x_1 + 2x_2 \leqslant 8$ 所示的可行域的边界平行。当 z 由小变大时最终将与线段 BC 重合（见图 1.3），线段 BC 上任意一点都使 z 取得相同的最大值，此时线性规划问题有无穷多最优解。

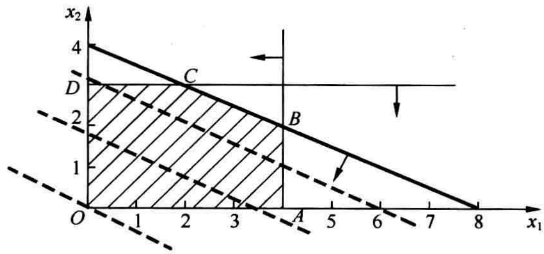


图 1.3　无穷多最优解示意图

3. 无界解

有些线性规划模型有可行解，但可能没有最优解；也就是说，能不断地找到更好的可行解使目标函数值增大，此时线性规划问题有无界解（见图 1.4）。

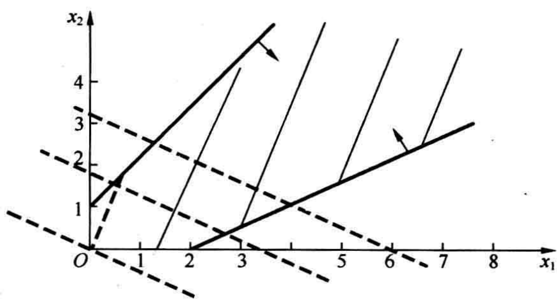


图 1.4　无界解示意图

4. 无可行解

有些线性规划模型可能根本没有可行解。没有可行解即可行域为空集，当然也就不存在最优解（见图 1.5）。

当实际问题的数学模型求解结果出现 3、4 两种情况时，一般说明线性规划问题数学模型的构建出现了错误。前者缺乏必要的约束条件，后者则是存在相互矛盾的约束条件。

图解法所揭示的第二个重要结论：当线性规划问题的可行域非空时，它是有界或无界的凸多边形（凸集）。

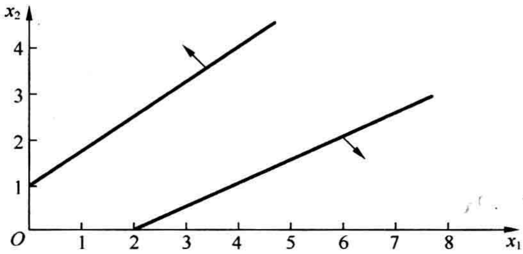


图 1.5　无可行解示意图

集合中任意两点的线性组合仍然属于该集合的集合称为凸集，图 1.6（a）、（b）所示的集合为凸集，图 1.6（c）、（d）所示的集合为非凸集。

图 1.6　凸集概念示意图

图解法所揭示的第三个重要结论：若线性规划问题存在最优解，其最优解一定在可行域的某个顶点（唯一最优解）或某两个顶点及其连线上（无穷多最优解）得到，即一定能在顶点上得到。

图解法虽然直观、简便，但当变量数多于两个时，它就无能为力了。下一章将介绍一种求解线性规划的代数法——单纯形法。

本章小结

本章主要介绍了如何建立一个简单的线性规划模型，讨论了线性规划模型的图解法。

思考与练习

1.1　用图解法求下列线性规划问题的解。

（1）$\max z = 10x_1 + 5x_2$

$$\text{s.t.}\begin{cases} 3x_1 + 4x_2 \leqslant 9 \\ 5x_1 + 2x_2 \leqslant 8 \\ x_1 \geqslant 0,\ x_2 \geqslant 0 \end{cases}$$

（2）$\max z = 2x_1 + x_2$

$$\text{s.t.}\begin{cases} 5x_2 \leqslant 15 \\ 6x_1 + 2x_2 \leqslant 24 \\ x_1 + x_2 \leqslant 5 \\ x_1 \geqslant 0,\ x_2 \geqslant 0 \end{cases}$$