系统与控制丛书 C5

程代展　齐洪胜　著

矩阵的半张量积
——理论与应用

（第二版）

科学出版社

系 统 与 控 制 丛 书

矩阵的半张量积

——理论与应用(第二版)

程代展　齐洪胜　著

科 学 出 版 社

北 京

编者的话

我们生活在一个科学技术飞速发展的信息时代，诸如宇宙飞船、机器人、因特网、智能机器及汽车制造等高新技术对自动化提出了更高的要求．系统与控制理论也因此面临着更大的挑战．它必须要能够为设计高水平的物理或信息系统提供原理和方法，使得设计出的系统能感知并自动适应快速变化的环境．

为帮助系统控制专业的专家、工程师以及青年学生迎接这些挑战，科学出版社和中国自动化学会控制理论专业委员会合作，设立了《系统与控制丛书》的出版项目．丛书分中、英文两个系列，目的是出版一些具有创新思想的高质量著作，内容既可以是新的研究方向，也可以是至今仍然活跃的传统方向．研究生是本丛书的主要读者群，因此，我们强调内容的可读性和表述的清晰．我们希望丛书能达到这些目的，为此，期盼着大家的支持和奉献！

《系统与控制丛书》编委会

2007 年 4 月 1 日

第二版前言

《矩阵的半张量积 —— 理论与应用》一书于 2006 年付梓, 2007 年出版, 至今四五载. 蒙读者错爱, 市场售缺, 索书者不断, 是以再版.

当年, 我们首次系统推出矩阵半张量积这个原创的概念和方法, 难免忐忑, 不知 "画眉深浅入时无"? 四五年间, 矩阵的半张量积有了很大发展, 它不再是我们的 Baby, 不少国内外同行开始和我们共同耕耘这块处女地. 矩阵半张量积虽然还属年少, 但它已经展示出了强大的生命力.

矩阵半张量积的生命力首先在于简单. 它将普通矩阵乘法推广到任意两个矩阵, 同时又保持了普通矩阵乘法的主要性质. 这样, 只要你接受了这个概念, 就可以像普通矩阵乘法一样地对任意两个矩阵进行乘法运算了. 老子说: "大道至简!" 数学上真正有意义的成果应当是简单而又便于应用的.

矩阵半张量积的生命力更在于它几乎处处可用. 最近, 它在布尔网络分析与控制中得到广泛应用, 并成为发展布尔网络控制理论的一个基本工具①. 另外, 它对连续动力系统的应用也有许多新的发展②, 在模糊控制、布尔函数微积分等若干其他问题上也得到许多新的应用.

由于时间关系, 第二版并未做重大改动, 主要是纠正了第一版中存在的不妥之处或计算错误. 另外, 为反映第一版出版以来矩阵半张量积理论与应用研究的进展, 我们添加了一个附录: 近期进展, 以便读者了解该方向研究的动态和前沿. IBM 最近组织的一份研究报告 Towards 2020 Science③中指出: "计算思维正……利用计算机科学的基本概念来解决问题、设计系统和理解人类行为", 而 "计算机科学的概念和定理以一种离散的模式来应对动态变化". 因此, 随着科学的发展和计算机能力的提高, 在未来的科学技术中, 有限值数学的重要性可能超过传统的连续值数学. 正如一些学者提出的: "微积分在数学当中一贯处于领袖地位, 可以预期, 有朝一日这种地位将被离散数学夺走."④我们相信, 矩阵半张量积会在未来领军的有限及离

① Cheng D, Qi H, Li Z. Analysis and Control of Boolean Networks: A Semi-tensor Product Approach. London: Springer, 2011.

② 梅生伟, 刘锋, 薛安成. 电力系统暂态分析中的半张量积方法. 北京: 清华大学出版社, 2010.

③ Emmott S. Towards 2020 Science. Cambridge: Microsoft Prsearch Ltd., 2006.

④ 王树和. 数学聊斋. 北京: 科学出版社, 2008.

散数学中起重要作用.

最后, 感谢读者对本书提出的建议和指正.

作　者
2011 年 7 月
于中国科学院数学与系统科学研究院

第一版前言

不管微积分和线性代数在数学中看来是多么初等, 它们却是近代数学的基础, 甚至可以说, 它们是整个自然科学研究中最基本的数字计算的工具. 谁都知道, 牛顿和莱布尼兹发明了微积分. 但是, 没有人知道谁发明了线性代数, 这也许是因为线性代数和矩阵的概念与线性方程组密切相关, 而线性方程组则是人们从远古时代就开始研究的最古老的课题之一. 例如, 在公元前 100 年的《九章算术》一书中, 线性系统的系数就被排成一个方阵的形式, 而西方称为高斯消去法的方法就被用来求解方程组. 这里使用的方阵实际上就是矩阵. 一言以蔽之, 矩阵是那样初等和自然, 所以, 在历史长河中, 许许多多数学家都研究过它, 以至于谁也说不清第一个发明矩阵或线性代数的是谁.

那么, 矩阵在实际应用中究竟起着什么样的作用呢? 我们引用一本经典的矩阵理论及应用的书中的一段话[1]: "矩阵理论可称为高等算术, 几乎每一个工程应用都涉及矩阵, 这是因为要处理带有许多部件的复杂系统, 必须有一种数学工具, 它能将这些部件结合在一起, 而矩阵的方法正好能达到这一目的. 在电网络、结构理论、力学系统、经济学研究等中均可找到矩阵理论的精彩应用." 这段话给了矩阵理论一个粗略的描述. 当然, 矩阵也不是万能的, 因此, 我们有必要对目前使用的矩阵工具的能力和适用范围作进一步的分析. 从线性代数知道, 矩阵是处理一维或二维数组的有力工具, 特别是在考虑线性映射或线性函数时, 矩阵是处理这些问题的完美手段. 当我们考虑二维数组时, 用矩阵表示的双线性型或二次型是最有力的工具.

高维数组在数学和工程问题中经常出现. 例如, 在微分几何中, 我们用称为 Christoffel 符号 $\{r^i_{jk}\}$ 的三维数组来描述联络[2]. 又如, 要描述 n 维空间上的一个协变阶为 s、逆变阶为 t 的张量, 结构常数 $\{w^{i_1,\cdots,i_s}_{j_1,\cdots,j_t}\}$ 是一个 $s+t$ 维数组[2]. 再如, 在统计学中, 考虑多变量的协方差时, 要用到高维数组[3,4]. 一个工程例子是: 在一个化工反应或者一种实验设计中, 如果有 k 个因素与产品质量有关, 在做试验时, 每个因素可以取若干不同水平, 那么, 实验数据就是一组 k 维数组.

在考虑高维数组时, 矩阵形式并不方便. 在考虑 3 维数组时, 有些人建议用立方阵[3,4], 但它并未得到学术界的广泛认可. 其原因首先是, 它的运算过于复杂, 为

了对付不同的情况, 就要定义不同的立方积 (参见第 2 章). 其次, 它无法用于更高维 (维数 > 3) 的情况, 显然, 将更高维数组排成抽象的更高维的长方体不仅在实现上难以做到, 而且定义运算更加困难.

那么, 怎样才能有效地解决这个问题呢? 计算机科学可以给我们一些启发. 在计算机存储器中, 数据是排成一个长列的, 不管它的维数是多少, 在编程的时候, 例如在 C 语言中, "指针"、"指针的指针"、"指针的指针的指针" 等被用来处理数据的层次. 或者形象地说, 自动寻找高维数组相应的指针所在, 这样, 高维数组就可以被合理地安排和处理了.

受这个启发, 我们提出了一种矩阵乘法, 叫做矩阵的半张量积, 这种乘法的优点就是可以自动地寻找数据的层次, 从而有效地处理多维数组的问题.

从另一个角度看, 向量和二次型都很容易用矩阵处理. 但是, 一般多线性映射就很难用矩阵表示了. 当考虑非线性问题时, 多线性映射是很重要的, 因为多项式就可以由多线性映射组成 (严格地说, 齐次多项式是一种特殊的多线性映射, 参见第 5 章). 在半张量积的框架下, 多线性映射很容易用矩阵处理, 而它可以用来逼近一般非线性映射. 所以, 半张量积使我们能用矩阵方法来处理非线性问题, 这是引进半张量积的另一个重要目的.

当然, 结合矩阵普通乘法和 Kronecker 积也可以表示多线性映射, 但这两种乘法之间无结合律, 这使得它们在进一步的使用中会有很大困难. 读者通过本书能看到, 在许多场合下, 半张量积可以代替 Kronecker 积来表示多线性映射, 而它与普通矩阵乘法之间有结合律, 这为讨论及应用带来了巨大的方便. 实际上, 普通矩阵乘法作为它的一种特例而被自然地吸收到这种新乘法中来了. 正因如此, 它为用矩阵处理多线性映射带来革命性的突破, 使得许多进一步的简化及演变成为可能. 这就是为什么半张量积使非线性问题可以通过矩阵和线性代数的方法得到处理.

以上提到引进这种新矩阵乘法的两个重要动机: 处理多维数组及处理非线性问题. 下面简单介绍一下什么是矩阵半张量积. 大家知道, 数乘和矩阵乘法的第一个巨大不同是前者对所有的数都可乘, 而后者是有条件的. A, B 可乘只有 A 的列数 (c_A) 与 B 的行数 (r_B) 相等才行. 为叙述方便, 我们称这个条件为 "等维数条件". 当然, Kronecker 积对任意 A, B 都可乘, 但它是另一种乘法, 与普通乘法不同. 简单地说, 半张量积就是把普通矩阵乘法推广到等维数条件不成立, 即 $c_A \neq r_B$ 的情况. 虽然我们对任意的 A, B 都能定义半张量积, 但目前在应用上真正有意义的是 c_A, r_B 中一个为另一个的因子的情况, 称这个条件为 "倍维数条件", 本书主要研究

倍维数条件成立的情况.

作为理论上的兴趣，本书也定义和讨论了任意两个矩阵的半张量积. 当两矩阵满足等维数条件时，这种乘法与普通乘法一致；当两矩阵满足倍维数条件时，它与上述倍维数条件下定义的乘法一致. 将矩阵乘法推广到任意两个矩阵的情况曾经是第一作者年轻时的梦，对于这种最一般的情况，有许多理论研究可以做. 本书之所以未对此展开，是因为目前尚未发现它有多少实际应用.

矩阵的半张量积首次是作者在文献 [5] 中提出，初步结果被收集在文献 [6] 中，进一步的结果和若干不同的应用发表在文献 [7]~[10] 中.

本书共分 12 章. 第 1 章到第 5 章是关于矩阵半张量积的定义和性质，其中，第 1 章到第 3 章讨论左半张量积，是基础. 本书主要用到的都是左半张量积，通常我们提到半张量积时实际默认其为左半张量积. 第 4 章考虑右半张量积以及任意两个矩阵的半张量积，初读时可以略去. 第 5 章讨论多元多项式及其微分的半张量积表示，它是用半张量积处理非线性问题的基础. 第 6 章到第 12 章为半张量积的各种应用. 第 6 章是它在逻辑及基于逻辑的智能系统中的应用. 第 7 章是它在一些几何、代数及物理问题中的应用，如微分几何中联络的半张量积表示、代数结构的半张量积公式、相对论中张量缩并的半张量积证明. 第 8 章是它在控制系统镇定中的应用，研究如何通过设计中心流形来镇定非最小相位的非线性系统，半张量积方法将用于多项式反馈设计. 第 9 章考虑动态系统对称性中的应用，介绍对称性条件的半张量积表达. 第 10 章考虑动态系统吸引域问题，通过半张量积得到吸引域边界公式的 Taylor 展式系数公式. 第 11 章考虑 Morgan 问题. 通过半张量积，问题的可解性转换为代数方程解的存在性. 第 12 章考虑线性化问题，线性化条件均通过半张量积及其性质求得或表示出.

第 1 章到第 5 章是矩阵半张量积的基础，因此，每章后均附有一定数量的习题，内容除练习性的问题外，也包括一些新概念和结果，它们对理解本书很有帮助，希望读者也能给予重视.

附录给出一些计算程序，包括半张量积计算、换位矩阵等，它们可以在 Matlab 中直接应用，这些程序不仅为读者提供了学习、练习及检验理论结果的方便工具，也可直接应用于理论研究及实际工程设计.

阅读本书的基本要求是微积分和线性代数. 因此，理工科大学一年级以上的学生都可以理解本书的主要内容. 但同时，作为应用的例子，本书涉及微分几何、抽象代数、李群、李代数、表示论、非线性控制、统计、对策论等许多领域，这无疑

会给读者带来困难. 作者除努力将问题的背景作尽可能清楚的说明外, 在每一章的最后有一个注释与参考, 它对涉及的有关学科或背景作了一个简明的解释, 以便读者理解或查询有关文献. 当然, 这也不可能完全解决问题, 作者对读者的最后一个建议是: 不必将每个应用实例都弄明白, 不妨选择与自己专业有关或感兴趣的例子读, 它不会影响对本书主要内容的理解和方法的应用.

"半张量积" 这个全新的概念从最初朦胧的想法到今天大体成形, 中间经历了十余年的努力. 和许多同行朋友的讨论, 甚至是面红耳赤的争辩, 才使它逐步合理起来. 这里想提到一些在这方面合作过或给过作者重要批评建议和意见的师长及朋友, 他们有清华大学卢强院士、梅生伟教授、北京大学黄琳院士、瑞典皇家工学院胡晓明教授、香港中文大学黄捷教授、香港浸会大学薛伟民教授、香港城市大学冯刚教授、美国华盛顿大学谈自忠教授、B. Ghosh 教授、美国 Texas Tech 大学 C. Martin 教授、W. Dayawansa 教授、美国 Bradley 大学刘江波教授等. 还有一些原博士研究生及博士后, 包括清华大学马进博士、刘锋博士后、中国科学院数学与系统科学研究院张利军博士、董亚莉博士等, 他们均在半张量积及其应用研究中作出许多贡献.

本书的主要内容均先后发表在若干国际、国内杂志上, 大部分内容曾在不同的国际会议上报告过. 部分内容在中国科学院数学与系统科学研究院相关研究生课程上讲授过. 许多同行, 特别是中国科学院数学与系统科学研究院的老师和研究生们提出了许多的批评建议, 使本书内容得以完善. 作者对此深表感谢! 同时, 感谢清华大学卢强院士、中国科学院数学与系统科学研究院陈翰馥院士、郭雷院士对本书及本项研究工作的一贯支持.

最后, 本书的出版得到中国科学院科学出版基金的支持, 科学出版社张扬编辑为本书出版作了大量编辑和组织工作, 特在此致谢.

作者相信, 矩阵的半张量积像矩阵本身一样, 是一个极基本又极具普遍意义的有力工具, 它将在几乎所有的工程和科学问题中找到自己的应用. 同时, 由于它是普通矩阵乘法的推广, 当它被学术界广泛接纳后, 人们就可以彻底忘却普通矩阵乘法了. 由于内容的原创性和作者的水平, 不妥之处在所难免, 敬请有关专家和读者们不吝赐教. 更希望有兴趣的读者和我们一起, 进一步完善这一新理论.

作　者

2006 年 8 月

于中国科学院数学与系统科学研究院

符号说明

$M_{m\times n}$	$m\times n$ 矩阵集合
M_n	$n\times n$ 矩阵集合
$V_r(M)$	矩阵的行展开
$V_c(M)$	矩阵的列展开
$\otimes$	矩阵的张量积
$\circ$	矩阵的 Hadamard 积
$\ltimes$	矩阵的左半张量积
$\rtimes$	矩阵的右半张量积
$\prec$	升序
$\succ$	降序
$\mathrm{diag}(A_1,\cdots,A_n)$	由块 $A_1,\cdots,A_n$ 作为对角元的矩阵
$\mathrm{col}(A_1,\cdots,A_n)$	$[A_1^{\mathrm{T}},\cdots,A_n^{\mathrm{T}}]^{\mathrm{T}}$
$\mathrm{tr}(A)$	矩阵 A 的迹
$A^{-\mathrm{T}}$	矩阵 A 的转置逆
$A^{\mathrm{T}(p\times q)}$	矩阵 A 的块转置
$\mathbf{1}_n$	$\underbrace{[1,1,\cdots,1]}_{n}^{\mathrm{T}}$
$\mathbf{0}_n$	$\underbrace{[0,0,\cdots,0]}_{n}^{\mathrm{T}}$
δ_i^n	单位阵 I_n 的第 i 列
δ_n^i	单位阵 I_n 的第 i 行
L_A	矩阵 A 的 Lyapunov 映射
$\sigma(A)$	矩阵 A 的特征值集合
$\mathrm{Re}\,\sigma(A)$	矩阵 A 的特征值的实部
$[A]$	矩阵 A 的等价类
$\wedge$	合取, 最大公因数
$\vee$	析取, 最小公倍数
$\neg$	否定
$\to$	蕴涵
$\leftrightarrow$	等值
$\Rightarrow$	逻辑推断

$\Leftrightarrow$	逻辑等价
$GL(n,\mathbb{R})$	一般线性群
$gl(n,\mathbb{R})$	一般线性代数
$SO(n,\mathbb{R})$	特殊正交线性群
$so(n,\mathbb{R})$	特殊正交线性代数
$Sp(n,\mathbb{R})$	辛群
$sp(n,\mathbb{R})$	辛代数
$\mathbf{S}_n$	置换群
$[\cdot,\cdot]$	李括号
$\mathrm{ad}_f^k g$	向量场 g 对 f 的 k 次李导数
$L_f^k h$	函数 h 对 f 的 k 次李导数
$T_s^r(V)$	V 上协变阶 r 逆变阶 s 的张量集合
$\Omega^r(V)$	V 上 r 阶反对称协变张量集合
$\Omega(V)$	V 上反对称协变张量集合
$\wedge$	反对称协变张量的外积
$Id(i;k)$	指标集
DF	F 的微分
∇F	F 的梯度
F_*	微分同胚 F 的正向导出映射
F^*	微分同胚 F 的逆向导出映射
$\nabla_f g$	g 沿 f 的联络
$a\%b$	整数相除 a/b 的余数
$[a]$	不大于 a 的最大整数
$T(N)$	流形 N 的切空间
$T^*(N)$	流形 N 的余切空间
$C^\infty(N)$	流形 N 上的 C^∞ 函数集合
$C^\omega(N)$	流形 N 上的解析函数集合
$V(N)$	流形 N 上的光滑向量场集合
$V^\omega(N)$	流形 N 上的解析向量场集合
$\phi_t^X(x_0)$	向量场 X 的以 x_0 为初值的积分曲线
$\{\cdot,\cdot\}$	Poisson 括号
$\mathrm{Hess}(h(x))$	$h(x)$ 的 Hessian 矩阵
$H < G$	H 是 G 的子群
$H \lhd G$	H 是 G 的正规子群

目　录

第 1 章　高维数组及其矩阵形式

本章介绍高维数组的排列. 当数组的维数大于 1 时, 它可以排列成不同的矩阵形式. 我们首先对多指标集及其刻画的数组的排列形式给出严格的定义, 从而导出指标形式与相应的数组矩阵形式之间的关系. 为了将一种矩阵形式转化为另一种矩阵形式, 引入了两个辅助工具: 矩阵的块转置和换位矩阵. 然后讨论数组的不同排列形式以及它们之间的转化问题. 这些概念和工具在本书以后的讨论中起着重要作用.

1.1　高 维 数 组

在科学计算中, 一项基本的工作就是处理数据. 我们将一组数据称为数组. 基于数组的自然特性, 通常每个数组都有它的维数. 先让我们来看看什么是数组的维数. 也许不能轻易地给出数组维数的严格定义, 但是粗略地说, 由 k 个独立变量产生的数组, 或者说, 从一个 k 维空间中采样出的数据就是一个 k 维数组. 从应用的观点来看, 大多数情况下, 数组的维数是显而易见的. 下面我们给出一些简单的例子来描述它.

例 1.1.1 (1) 测量一天的温度. 如果采样周期是 5 分钟, 那么得到 288 个数据, 可将它们表示成 $t_1, t_2, \cdots, t_{288}$, 这是一个 1 维数组.

(2) 考虑一个 $n\times n$ 矩阵 M. 显然, 它的所有元素 $m_{11}, m_{12}, \cdots, m_{nn}$ 是一个 2 维数组.

(3) 为了在区域 $\{x\in\mathbb{R}^k \,|\, a_i\leqslant x_i\leqslant b_i, i=1,\cdots,k\}$ 上数值地描述函数 $f(x_1, x_2,\cdots,x_k)$, 我们可以将每个区间 $[a_i, b_i]$ 分割成 n_i-1 个子区间, 这样得到 n_i 个分割点 $x_i^1, x_i^2, \cdots, x_i^{n_i}$, 这些分割点共产生 $n=\prod\limits_{i=1}^{k} n_i$ 个结点, 计算函数在这 n 个结点的值, 就得到了一个 k 维数组

$$\{v_{s_1,s_2,\cdots,s_k}=f(x_1^{s_1}, x_2^{s_2},\cdots,x_k^{s_k}) \,|\, s_i=1,2,\cdots,n_i,\ 1\leqslant i\leqslant k\}.$$

□

从上面的例子可以看出, 一个数组的维数可以由其独立指标的个数来决定. 本书中若无特别说明仅考虑由指标索引的有限数据集合, 在这种情况下, 我们给出数组维数的严格定义.

定义 1.1.1 称一个数组是 k 维的, 如果它的元素是由 k 个指标索引的. 更确切一些, 说 S 是一个 k 维数组, 如果它能够表示成

$$S = \{ s_{i_1,\cdots,i_k} \mid i_1 = 1,\cdots,n_1;\ \cdots;\ i_k = 1,\cdots,n_k \}. \tag{1.1.1}$$

S 的大小, 即 S 中元素个数, 记作 $|S|$.

显然, 式 (1.1.1) 中 S 的大小为

$$|S| = n_1 \times n_2 \times \cdots \times n_k.$$

如果数组是 1 维的, 可以将它排列成一个向量, 当数组是 2 维时, 可以将它排列成一个矩阵, 但是当数组维数高于 2 时, 我们如何排列它呢? 我们不能将它排列成 3 维或者更高维数矩阵的形式, 而且即使我们可以将它排列成那种形式, 我们又如何进行计算呢?

对于 3 维数组, 一些学者引入了立方阵的概念. 在下一章的讨论中可以看出, 立方阵的引入并不是很自然, 定义也比较复杂, 而且立方阵乘法与普通矩阵乘法不相容, 这在很大程度上限制了它的应用. 再者, 很难将它推广到更高维数的情形. 本书的目的就是要找到一个统一的且简洁有效的方法来解决高维数组的矩阵表示及其运算的问题.

本书介绍的这种新算法的一个启示来自计算机科学. 计算机科学家为我们提供了一个思路: 在存储器中, 数据不需要排列成高于 1 维的形式. 在内存中, 它们排列成一个序列. 但是在程序设计中, 例如在 C 语言中, 人们使用所谓的 "指针"、"指针的指针"、"指针的指针的指针" 等来区分数据的不同层次. 因此, 问题不是如何排列这些数据, 而是如何去确定这些高维数组的层次结构. 换句话说, 问题的关键是: 我们要用适当的方法操纵数据而不是排列数据. 这就是本书提出的一种新的矩阵乘法的基本出发点. 在这种新方法中, 索引起着重要的作用. 下面我们给出索引的严格定义.

定义 1.1.2 给定一组含有 $\prod_{i=1}^{k} n_i$ 个元素的数组 S, 如式 (1.1.1) 中 S 的元素由 k 个指标来索引. 将 S 排列成一行 (或一列), 说它是由指标 $i_1,\cdots,i_k$ 按照索引

$$Id(i_1,\cdots,i_k; n_1,\cdots,n_k)$$

排列的, 如果它是由指标 $i_1,\cdots,i_k$ 按照如下方式排序: i_t, $t = 1,\cdots,k$ 按照字母表次序依次从 1 跑到 n_t. 更确切地说, $s_{\alpha_1,\cdots,\alpha_k}$ 排在 $s_{\beta_1,\cdots,\beta_k}$ 之前, 当且仅当存在 $1 \leqslant j \leqslant k$, 使得

$$\alpha_i = \beta_i,\ i = 1,\cdots,j-1, \quad \alpha_j < \beta_j.$$