普通高等教育“十二五”规划教材

高等数学教程例题与习题集

北京工业大学高等数学课程组 编

机械工业出版社
CHINA MACHINE PRESS

普通高等教育“十二五”规划教材

高等数学教程例题与习题集

北京工业大学高等数学课程组　编

机械工业出版社

本书是与主教材《高等数学教程》(上、下册)配套的教学辅导书，致力于化解数学的难点和突出重点，并把这一原则贯彻到全书。书中精选例题587道，练习题1016道，是学习高等数学必要的工具书。

本书的主要特点是，其内容在章节上与主教材同步，并在每一章设有“本章主要内容及教学要求”，以阐明教学基本要求、重点、难点、深度和广度及要点提示；本书还充分体现了主教材的特色和优势，如用无穷小的比较定理和极限的语言两种方法来证明相关极限。通过比较，读者可以很清楚地看到前一种方法的优势；本书与主教材配合，在第二型曲面积分计算上体现出了较其他同类教材或习题集更具简单、清晰的优势；本书还单独地分出两章来介绍综合性的例题，其中一章为一元微积分的综合例题，另一章为整个微积分的综合例题。

本书可作为高等院校理工科类各专业学生的教学辅导书，也可作为自学、考研的参考书。

图书在版编目（CIP）数据

高等数学教程例题与习题集/北京工业大学高等数学课程组编．—北京：机械工业出版社，2011．8
普通高等教育“十二五”规划教材
ISBN 978－7－111－34504－6

Ⅰ．①高…　Ⅱ．①北…　Ⅲ．①高等数学－高等学校－习题集
Ⅳ．①O13－44

中国版本图书馆CIP数据核字（2011）第137635号

机械工业出版社（北京市百万庄大街22号　邮政编码100037）
策划编辑：李永联　责任编辑：李永联　陈崇昱
版式设计：张世琴　责任校对：吴美英
封面设计：赵颖喆　责任印制：杨　曦
北京京丰印刷厂印刷
2011年9月第1版·第1次印刷
169mm×239mm·23.25印张·450千字
标准书号：ISBN 978－7－111－34504－6
定价：38.00元

凡购本书，如有缺页、倒页、脱页，由本社发行部调换

电话服务	网络服务
社服务中心：(010) 88361066	门户网：http：//www.cmpbook.com
销售一部：(010) 68326294	教材网：http：//www.cmpedu.com
销售二部：(010) 88379649	
读者购书热线：(010) 88379203	**封面无防伪标均为盗版**

前　言

本书是和范周田、张汉林编著的主教材《高等数学教程》（上、下册）配套的教学辅导书，与主教材构成一个完整的教材体系.

高等数学是众多专业课程的基础，其工具性尽人皆知，但更重要的是其思想性. 因此，在高等数学的教学过程中，尤其重要的是思想方法的训练与培养. 为学习者提供一整套的参考与训练材料使之能够顺利掌握高等数学的知识与思想是本书的立意所在.

本书有以下特点：

1. 书中以无穷小及其比较定理为核心从正面诠释极限理论，较之传统的证明简单，有助于读者更好地接受和理解极限理论；

2. 部分内容的例题，如二阶常系数线性微分方程的解法和第二型曲面积分的计算等，采用了相对简单一些的计算方法.

本书各章具有完全类似的结构：第一部分是“本章的主要内容和教学要求”，可以使读者方便地了解高等数学教学大纲的要求；第二部分是精选的“例题”，读者可以从中学习典型的解题思想与基本技巧；第三部分是选编的“练习题”，题量可以满足学习高等数学所必需的练习要求. 事实上，没有一定量的实际练习就不可能学好高等数学.

参加本书编写的有范周田、张汉林、张方、丁津、田鑫、杨晓华、李贵斌、胡京兴.

本书在内容的编排上首先满足《高等数学大纲》的要求，强调基本概念的理解和基本技巧的掌握，同时，为了适应优秀学生考研或竞赛的需求，在例题和习题中适当加入相关重点内容. 本书适合于高等院校理工科类专业学生使用，也可作为自学或考研的参考书.

由于编者水平和时间所限，书中不妥之处在所难免，敬请广大读者批评指正.

编　者

目　录

第一章　无穷小与极限

一、本章主要内容及教学要求

主要内容　函数的定义，函数的基本性质，基本初等函数，复合函数，反函数，初等函数，数列极限的 ε-N 定义，数列收敛的条件，函数极限的 ε-X 定义，函数极限的 ε-δ 定义，函数的左右极限，极限的四则运算，两个极限存在准则，两个重要极限，无穷小与无穷大的定义，无穷小与函数极限的关系，无穷小的比较，函数连续的定义，间断点，连续函数的和、差、积、商的连续性，连续函数的反函数的连续性，连续函数的复合函数的连续性，基本初等函数和初等函数的连续性，闭区间上连续函数的最大值、最小值定理及介值定理.

基本要求

1. 理解函数的概念.

2. 了解函数奇偶性、单调性、周期性和有界性.

3. 理解复合函数的概念，了解反函数的概念.

4. 掌握基本初等函数的性质及其图形.

5. 会建立简单实际问题中的函数关系式.

6. 理解极限的概念（对极限的 ε-N、ε-δ 定义可在学习过程中逐步加以理解，对于给出 ε 求 N 或 δ 不做过高要求）.

7. 掌握极限四则运算法则.

8. 了解两个极限存在准则（夹逼准则和单调有界准则），会用两个重要极限求极限.

9. 了解无穷小、无穷大以及无穷小的阶的概念. 会用等价无穷小求极限.

10. 理解函数在一点连续的概念.

11. 了解间断点的概念，并会判断间断点的类型.

12. 了解连续函数的和、差、积、商的连续性，连续函数的反函数的连续性，连续函数的复合函数的连续性，基本初等函数和初等函数的连续性，及闭区间上连续函数的性质（介值定理和最大最小值定理）.

重点　函数的概念、数列极限的 ε-N 定义、函数极限的 ε-δ 定义、无穷小、极限的四则运算、函数的连续性.

难点 抽象函数符号的使用，复合函数的分解，分段函数，数列极限的 ε-N 定义，函数极限的 ε-δ 定义.

深度和广度 中学学过的有关函数的内容只需加以复习提高，不必再做详细讲解. 但对于函数符号 $f(x)$ 的意义和用法、复合函数的分解应有足够的说明和训练，还应当介绍分段函数，举例说明建立函数式的方法. 对某些函数要求对给定的 ε 会求 N 或 δ，不定式求极限的训练主要放在洛必达法则中进行；对第二个重要极限 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x=\mathrm{e}$，只需证明 x 为正整数的情况；基本初等函数的连续性可不全证；对于连续函数在闭区间上的性质，只要求作几何说明.

要点提示 无穷小概念、无穷小比较定理、复合函数的极限、函数的连续性.

关于极限的证明：

极限的证明对于微积分初学者来说通常比较困难，特别是用 ε-δ 定义证明极限更是如此，以致很多初学者对此产生困惑或迷茫.

《高等数学教程》对此问题作了特别的处理. 首先，引入了无穷小概念，然后给出无穷小比较定理；其次，用无穷小的概念和方法展示极限的 ε-δ 语言，基本结论如下：

无穷小比较定理：

若 $|f(x)|\leqslant|g(x)|$，且 $g(x)$ 是无穷小，则 $f(x)$ 也是无穷小.

三个基本无穷小：(1) $\dfrac{1}{n}\to0\quad(n\to\infty)$

(2) $\dfrac{1}{x}\to0\quad(x\to\infty)$

(3) $(x-x_0)\to0\quad(x\to x_0)$

用三个基本无穷小以及无穷小比较定理就可以证明简单的极限了. 例如，当 $p>0$ 时，$\dfrac{1}{n^p}\to0$ $(n\to\infty)$，$\dfrac{1}{x^p}\to0$ $(x\to\infty)$ 和 $(x-x_0)^p\to0$ $(x\to x_0)$. 这些无穷小也可以作为结论来使用.

结合无穷小比较定理，极限的证明问题将不再成为微积分初学者学习上的巨大障碍. 下面我们给出两个具体的极限证明问题，通过《高等数学教程》中无穷小比较定理和众多微积分教材中的 ε-δ 定义这两种方法证明，读者可以从中体会利用无穷小比较定理证明极限问题的实用性和有效性.

二、例题

例 1.1　设 $u_n=\dfrac{\sin\frac{n\pi}{2}}{n}$，证明：$\lim\limits_{n\to\infty}u_n=0$.

证法 1　（利用无穷小比较定理）因为

$$|u_n|=\left|\frac{\sin\frac{n\pi}{2}}{n}\right|=\frac{\left|\sin\frac{n\pi}{2}\right|}{n}\leqslant\frac{1}{n}$$

而$\dfrac{1}{n}\to0$　$(n\to\infty)$，由无穷小比较定理有 $u_n\to0$，即$\lim\limits_{n\to\infty}u_n=0$.

证法 2　（利用 ε-δ 定义）

分析　$|u_n-0|=\left|\dfrac{\sin\frac{n\pi}{2}}{n}\right|=\dfrac{\left|\sin\frac{n\pi}{2}\right|}{n}$，$\forall\varepsilon>0$，欲使$\dfrac{\left|\sin\frac{n\pi}{2}\right|}{n}<\varepsilon$，注意到 $\left|\sin\frac{n\pi}{2}\right|\leqslant1$，所以只要$\dfrac{1}{|n|}<\varepsilon$，只要 $n>\dfrac{1}{\varepsilon}$即可.

证明　$\forall\varepsilon>0$，取 $N=\left[\dfrac{1}{\varepsilon}\right]$，则当 $n>N$ 时，恒有$|u_n-0|<\varepsilon$，由极限定义有

$$\lim_{n\to\infty}u_n=0$$

例 1.2　证明：$\lim\limits_{x\to2}(x^2-4)=0$.

证法 1　（利用无穷小比较定理）

$|x^2-4|=|x+2||x-2|$,因为 $x\to2$,不妨设$|x-2|<1$,从而有$|x+2|<3$，进而有

$$|x^2-4|=|x+2||x-2|<3|x-2|$$

由无穷小比较定理有

$$\lim_{x\to2}(x^2-4)=0$$

证法 2　（利用 ε-δ 定义）

分析　$\forall\varepsilon>0$，因为 $x\to2$，不妨设$|x-2|<1$，从而有$|x+2|<3$，欲使

$$|x^2-4|=|x+2||x-2|<3|x-2|<\varepsilon,\text{只要}|x-2|<\frac{\varepsilon}{3}.$$

证明　$\forall\varepsilon>0$，取 $\delta=\min\left\{1,\ \dfrac{\varepsilon}{3}\right\}$，当 $0<|x-2|<\delta$ 时，恒有$|x^2-4|=<\varepsilon$，由

极限定义有

$$\lim_{x\to 2}(x^2-4)=0$$

注

(1) 通过以上两个极限问题的证明可以看出，证法 1 较证法 2 要简洁得多. 事实上，证法 1 只需要证法 2 的分析过程即可.

(2) 例 1.2 中的证法 2 关于如何取 $\delta\left(\delta=\min\left\{1,\frac{\varepsilon}{3}\right\}\right)$ 常常是学生不易理解和掌握的问题，在证法 1 中避免了这样的问题，学生较容易理解、接受和掌握.

(3) 在下面的例题中，我们主要利用无穷小及比较定理证明极限.

例 1.3 求证：$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{4n^2+1}{3n^2+2}=\frac{4}{3}$.

证明

$$\left|\frac{4n^2+1}{3n^2+2}-\frac{4}{3}\right|=\frac{5}{9n^2+6}<\frac{9}{9n}=\frac{1}{n}$$

而$\frac{1}{n}$是无穷小，由无穷小比较定理，有

$$\lim_{n\to\infty}\frac{4n^2+1}{3n^2+2}=\frac{4}{3}$$

例 1.4 若 x_n，y_n 都收敛，$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=A$，$\lim\limits_{n\to\infty}y_n=B$，求证：$x_n-y_n$ 也收敛，且 $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n-y_n)=A-B$.

证明 因为 $x_n-y_n-(A-B)=(x_n-A)-(y_n-B)$，当 $n\to\infty$ 时，$x_n-A\to 0$，$y_n-B\to 0$，从而 $(x_n-A)-(y_n-B)\to 0$

所以，

$$\lim_{n\to\infty}(x_n-y_n)=A-B$$

例 1.5 求证：$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1+x^3}{5x^3}=\frac{1}{5}$.

证明 $\left|\frac{1+x^3}{5x^3}-\frac{1}{5}\right|=\frac{1}{5\cdot|x|^3}$

而$\frac{1}{|x^3|}\to 0$，由无穷小比较定理，有

$$\lim_{x\to\infty}\left|\frac{1+x^3}{5x^3}-\frac{1}{5}\right|=0，即$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{1+x^3}{5x^3}=\frac{1}{5}$$

例 1.6　用定义证明：$\lim\limits_{x\to 2}x^3=8.$

证明　因 $x\to 2$，故只考虑 $x=2$ 附近的值，不妨设 $1<x<3$．于是

$$|x^3-8|=|x-2|\cdot|x^2+2x+4|<19|x-2|$$

由无穷小比较定理，有 $\lim\limits_{x\to 2}(x^3-8)=0$，即

$$\lim_{x\to 2}x^3=8$$

例 1.7　求证：$\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{x^2-2}{x+4}=1.$

证明　因 $x\to -2$，故只考虑 $x=-2$ 附近的值，

可设 $|x+2|<1$，即 $-3<x<-1$，且 $|x+4|>1$.

因为

$$\left|\frac{x^2-2}{x+4}-1\right|=\left|\frac{x^2-x-6}{x+4}\right|<|x^2-x-6|$$

$$=|x+2||x-3|=|x+2||x+2-5|<6|x+2|$$

由 $x+2$ 是无穷小及无穷小比较定理，有

$$\lim_{x\to -2}\left|\frac{x^2-2}{x+4}-1\right|=0$$

即
$$\lim_{x\to -2}\frac{x^2-2}{x+4}=1$$

注　从以上各题可以看出，利用几个基本无穷小及无穷小比较定理证明大多数具体的极限问题是非常有效的，相比用 ε-$N(\delta)$ 语言来证明要简单许多，但有些情形，我们也需要用 ε-$N(\delta)$ 语言证明极限问题，见下面例 1.8.

例 1.8　设数列 x_n 的奇项组成的子列 $x_{2k-1}(k=1,2,3,\cdots)$ 的极限为 a，x_n 的偶项组成的子列 $x_{2k}(k=1,2,\cdots)$ 的极限也是 a，试证 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$.

证明　由 $\lim\limits_{k\to\infty}x_{2k-1}=a$ 及 $\lim\limits_{k\to\infty}x_{2k}=a$ 可知，

$\forall\varepsilon>0$，$\exists K>0$，当 $k>K$ 时，有 $|x_{2k-1}-a|<\varepsilon$ 与 $|x_{2k}-a|<\varepsilon$ 同时成立.

于是，当 $n>2K$ 时，$|x_n-a|<\varepsilon$ 成立，所以 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$.

例 1.9　计算 $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{1}{n}-\dfrac{2}{n}+\dfrac{3}{n}-\cdots+\dfrac{(-1)^{n-1}n}{n}\right|$.

解　设 $S_n=\left|\dfrac{1}{n}-\dfrac{2}{n}+\dfrac{3}{n}-\cdots+\dfrac{(-1)^{n-1}n}{n}\right|$，

当 $n=2k-1(k=1,2,\cdots)$ 时，得到 S_n 的奇项组成的子列：

$$S_{2k-1}=\left|\frac{1}{2k-1}-\frac{2}{2k-1}+\cdots+\frac{2k-3}{2k-1}-\frac{2k-2}{2k-1}+\frac{2k-1}{2k-1}\right|=\frac{k}{2k-1}$$

$$\lim_{k\to\infty}S_{2k-1}=\frac{1}{2}$$

当 $n=2k(k=1,2,\cdots)$ 时，得到 S_n 的偶项组成的子列：

$$S_{2k}=\left|\frac{1}{2k}-\frac{2}{2k}+\cdots+\frac{2k-1}{2k}-\frac{2k}{2k}\right|=\left|\frac{-k}{2k}\right|=\frac{1}{2}$$

$$\lim_{k\to\infty}S_{2k}=\frac{1}{2}$$

所以 $$\lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{1}{n}-\frac{2}{n}+\frac{3}{n}-\cdots+\frac{(-1)^{n-1}n}{n}\right|=\frac{1}{2}$$

例 1.10 如果一个数列的两个子数列有相同的极限，原数列是否收敛？请举例说明.

答 不一定，例如，$x_n=\begin{cases}2 & (n=3k+1)\\ \dfrac{n}{n+1} & (n=3k+2)\\ \dfrac{n-1}{n+2} & (n=3k+3)\end{cases}$，$k=0,1,2,\cdots$

由 $2,5,8,\cdots,3k+2,\cdots$ 诸项构成的子数列极限是 1；

由 $3,6,9,\cdots,3k+3,\cdots$ 诸项构成的子数列极限也是 1，但 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 发散.

例 1.11 (1)若 x_n 收敛，y_n 发散，问 x_n+y_n 和 $x_n\cdot y_n$ 如何？

(2)若 x_n 和 y_n 均发散，问 x_n+y_n 和 $x_n\cdot y_n$ 如何？

答 (1)x_n+y_n 发散.

若不然，设 $z_n=x_n+y_n$，若 z_n 收敛，则 $y_n=z_n-x_n$，由例 1.4，两收敛数列之差 y_n 应该收敛，与题设矛盾.

$x_n\cdot y_n$ 可能收敛，也可能发散.

收敛的例子：$x_n=\dfrac{1}{n}$，$y_n=\begin{cases}1 & (n=1,3,5,\cdots)\\ 0 & (n=2,4,6,\cdots)\end{cases}$

发散的例子：$x_n=\dfrac{n}{n+1}$，$y_n=\begin{cases}1 & (n=1,3,5,\cdots)\\ 2 & (n=2,4,6,\cdots)\end{cases}$

(2)x_n+y_n 和 $x_n\cdot y_n$ 可能都收敛，也可能都发散.

x_n+y_n 和 $x_n\cdot y_n$ 都收敛的例子：

$$x_n=\begin{cases}1 & (n=1,3,5,\cdots)\\ -1 & (n=2,4,6,\cdots)\end{cases},\quad y_n=\begin{cases}-1 & (n=1,3,5,\cdots)\\ 1 & (n=2,4,6,\cdots)\end{cases}$$

x_n+y_n 和 $x_n\cdot y_n$ 都发散的例子：

$$x_n=\begin{cases}1 & (n=1,3,5,\cdots)\\ -1 & (n=2,4,6,\cdots)\end{cases},\quad y_n=\begin{cases}1 & (n=1,3,5,\cdots)\\ 1 & (n=2,4,6,\cdots)\end{cases}$$

例 1.12 若 x_n 和 y_n 都收敛，且 $x_n>y_n$，是否一定有 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n>\lim\limits_{n\to\infty}y_n$？

答 不一定，例如：$x_n=\dfrac{1}{n}$，$y_n=\dfrac{1}{2n}$，则有 $x_n>y_n$，但是，$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\lim\limits_{n\to\infty}y_n$.

例 1.13　试证 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a^n}{n}=+\infty\quad(a>1)$.

证明　令 $a=1+b\quad(b>0)$，则

$$a^n=(1+b)^n=1+nb+\frac{n(n-1)}{2}b^2+\cdots+b^n>\frac{n(n-1)}{2}b^2$$

因此，有

$$0<\frac{n}{a^n}<\frac{2}{(n-1)b^2}$$

由于 $\dfrac{1}{n-1}$ 是无穷小，再由无穷小比较定理，有 $\dfrac{n}{a^2}\to 0^+\ (n\to\infty)$，从而有 $\dfrac{a^n}{n}\to+\infty$，即

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a^n}{n}=+\infty$$

注　本题也可以用无穷大定义证明.

例 1.14　当 $x\to 0$ 时，研究函数 $f(x)=\dfrac{1}{x}\tan\dfrac{1}{x}$ 的极限.

解　若取点列 $x_n=\dfrac{1}{n\pi}\to 0$，则有 $\lim\limits_{n\to\infty}f(x_n)=\lim\limits_{n\to\infty}n\pi\cdot\tan n\pi=0$，

又取点列 $x_n'=\dfrac{1}{n\pi+\frac{\pi}{4}}\to 0$，则有

$$\lim_{n\to\infty}f(x_n')=\lim_{n\to\infty}\left(n\pi+\frac{\pi}{4}\right)\cdot\tan\left(n\pi+\frac{\pi}{4}\right)=+\infty$$

因此，当 $x\to 0$ 时，$f(x)$ 的极限不存在，且 $f(x)$ 不是无穷大.

例 1.15　求 $\lim\limits_{x\to 0}x\left[\dfrac{1}{x}\right]$.

解　对任意实数 t，都有 $t=[t]+\{t\}$，
其中 $\{t\}$ 表示 t 的小数部分，$0\leqslant\{t\}<1$. 据此，

$$\frac{1}{x}=\left[\frac{1}{x}\right]+\left\{\frac{1}{x}\right\}，即\left[\frac{1}{x}\right]=\frac{1}{x}-\left\{\frac{1}{x}\right\}$$

所以

$$\lim_{x\to 0}x\left[\frac{1}{x}\right]=\lim_{x\to 0}x\cdot\left(\frac{1}{x}-\left\{\frac{1}{x}\right\}\right)=\lim_{x\to 0}\left(1-x\left\{\frac{1}{x}\right\}\right)=1$$

其中，$\lim\limits_{x\to 0}x\left\{\dfrac{1}{x}\right\}=0$ 是因为当 $x\to 0$ 时，无穷小 x 与有界变量 $\left\{\dfrac{1}{x}\right\}$ 的乘积还是无穷小.

例 1.16 在 $x=-1$ 处，研究函数 $f(x)=\dfrac{(x-1)(-1)^{[x]}}{x^2-1}$ 的左、右极限.

解 注意到 $\lim\limits_{x\to-1-0}[x]=-2$，$\lim\limits_{x\to-1+0}[x]=-1$，所以

$$f(-1-0)=\lim_{x\to-1-0}\frac{(x-1)(-1)^{[x]}}{x^2-1}=\lim_{x\to-1-0}\frac{(-1)^{-2}}{x+1}=-\infty$$

$$f(-1+0)=\lim_{x\to-1+0}\frac{(x-1)(-1)^{[x]}}{x^2-1}=\lim_{x\to-1+0}\frac{(-1)^{-1}}{x+1}=-\infty$$

因此，$\lim\limits_{x\to-1}f(x)=-\infty$.

例 1.17 若 $\lim\limits_{x\to a}f(x)$ 与 $\lim\limits_{x\to a}(f(x)+g(x))$ 都存在，$\lim\limits_{x\to a}g(x)$ 一定存在吗？

答 因 $\lim\limits_{x\to a}g(x)=\lim\limits_{x\to a}[(f(x)+g(x))-f(x)]$，由极限的运算性质，$\lim\limits_{x\to a}g(x)$ 一定存在.

例 1.18 若 $\lim\limits_{x\to a}f(x)$ 与 $\lim\limits_{x\to a}f(x)g(x)$ 都存在，$\lim\limits_{x\to a}g(x)$ 一定存在吗？

答 不一定存在，例如，$f(x)=x$，$g(x)=\sin\dfrac{1}{x}$，$a=0$.

例 1.19 求 $\lim\limits_{x\to1}\left(\dfrac{3}{1-x^3}-\dfrac{1}{1-x}\right)$.

解 原式 $=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{3-(1+x+x^2)}{1-x^3}=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{(1-x)(2+x)}{(1-x)(1+x+x^2)}=1$

例 1.20 计算 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n}{2}-\dfrac{1+2+\cdots+n}{n+2}\right)$.

解
$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{2}-\frac{1+2+\cdots+n}{n+2}\right)=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{2}-\frac{\frac{1}{2}n(n+1)}{n+2}\right)$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{n(n+2)-n(n+1)}{2(n+2)}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{2(n+2)}=\frac{1}{2}$$

例 1.21 计算 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1^2}{n^3}+\dfrac{2^2}{n^3}+\cdots+\dfrac{(n-1)^2}{n^3}\right)$.

解 原式 $=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\frac{1}{6}(n-1)n(2n-1)}{n^3}=\dfrac{1}{3}$

例 1.22 计算 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(2x-3)^{20}(3x-2)^{30}}{(3x+5)^{50}}$.

解 该有理分式的分子、分母展开后都是多项式，最高次数相同，都是 50，该极限等于最高次项的系数之比，故

$$\lim_{x\to\infty}\frac{(2x-3)^{20}(3x-2)^{30}}{(3x+5)^{50}}=\frac{2^{20}\times3^{30}}{3^{50}}=\left(\frac{2}{3}\right)^{20}$$

例 1.23　计算 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}}{\sqrt{x}}$.

解　分子、分母同时除以$\sqrt{x}$，原式 $=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{1+\sqrt{\dfrac{1}{x}+\dfrac{\sqrt{x}}{x^2}}}}{1}=1.$

例 1.24　计算 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln(2+e^{3x})}{\ln(3+e^{2x})}$.

解

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln(2+e^{3x})}{\ln(3+e^{2x})}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln\left[e^{3x}\left(1+\frac{2}{e^{3x}}\right)\right]}{\ln\left[e^{2x}\left(1+\frac{3}{e^{2x}}\right)\right]}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln e^{3x}+\ln\left(1+\frac{2}{e^{3x}}\right)}{\ln e^{2x}+\ln\left(1+\frac{3}{e^{2x}}\right)}=\frac{3}{2}$$

例 1.25　计算 $\lim\limits_{x\to-8}\dfrac{\sqrt{1-x}-3}{2+\sqrt[3]{x}}$.

解

$$\text{原式}=\lim_{x\to-8}\frac{(\sqrt{1-x}-3)(\sqrt{1-x}+3)(4-2\cdot\sqrt[3]{x}+(\sqrt[3]{x})^2)}{(2+\sqrt[3]{x})(\sqrt{1-x}+3)(4-2\cdot\sqrt[3]{x}+(\sqrt[3]{x})^2)}$$

$$=\lim_{x\to-8}\frac{-(x+8)(4-2\cdot\sqrt[3]{x}+(\sqrt[3]{x})^2)}{(8+x)(\sqrt{1-x}+3)}$$

$$=-\lim_{x\to-8}\frac{4-2\cdot\sqrt[3]{x}+(\sqrt[3]{x})^2}{\sqrt{1-x}+3}=-2$$

例 1.26　设 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2+1}{x+1}-ax-b\right)=0$，求常数 a 和 b.

解　由

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+1}{x+1}-ax-b\right)=\lim_{x\to\infty}\left[\frac{(1-a)x^2-ax+1}{x+1}-b\right]=0$$

可知，$\dfrac{(1-a)x^2-ax+1}{x+1}$的分子中，二次项系数必须为0，

否则，$\lim\limits_{x\to\infty}\left[\dfrac{(1-a)x^2-ax+1}{x+1}-b\right]=\infty$.

由此得，$1-a=0$，即 $a=1$.

将 $a=1$ 代入 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2+1}{x+1}-ax-b\right)=0$，

有$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2+1}{x+1}-x-b\right)=0$，故

$$b=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+1}{x+1}-x\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{1-x}{x+1}=-1$$

例 1.27 $\lim\limits_{n\to\infty}[(1+x)(1+x^2)(1+x^4)\cdots(1+x^{2^n})]$，其中$|x|<1$.

解 因

$$\begin{aligned}(1+x)(1+x^2)(1+x^4)\cdots(1+x^{2^n})&=\frac{(1-x^2)(1+x^2)(1+x^4)\cdots(1+x^{2^n})}{1-x}\\&=\frac{(1-x^4)(1+x^4)\cdots(1+x^{2^n})}{1-x}=\cdots\\&=\frac{(1-x^{2^n})(1+x^{2^n})}{1-x}=\frac{1-x^{2^{n+1}}}{1-x}\end{aligned}$$

注意到$|x|<1$，有$\lim\limits_{n\to\infty}x^{2^{n+1}}=0$，故

$$\lim_{n\to\infty}[(1+x)(1+x^2)(1+x^4)\cdots(1+x^{2^n})]=\lim_{n\to\infty}\frac{1-x^{2^{n+1}}}{1-x}=\frac{1}{1-x},\quad |x|<1.$$

例 1.28 求$\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{1+2}+\dfrac{1}{1+2+3}+\cdots+\dfrac{1}{1+2+\cdots+n}\right)$.

解 令$S_n=\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{1+2+\cdots+k}=\sum_{k=1}^{n}\frac{2}{k(k+1)}$

$$=2\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right)$$

$$=2\left(1-\frac{1}{n+1}\right)$$

所以

$$原式=\lim_{n\to\infty}S_n=2\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)=2$$

例 1.29 根据单调有界数列极限存在原理，研究数列

$$x_n=\frac{9}{1}\cdot\frac{10}{4}\cdot\cdots\cdot\frac{n+8}{3n-2}$$

的极限.

解 由$x_{n+1}=x_n\cdot\dfrac{n+9}{3n+1}$可知，当$n>4$时，$x_{n+1}<x_n$，数列$x_n$单调递减；又$x_n>0$，数列$x_n$有下界，根据单调有界数列必有极限原理，数列$x_n$收敛.可设$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=A$，对$x_{n+1}=x_n\cdot\dfrac{n+9}{3n+1}$的两端取极限，

得$A=A\cdot\dfrac{1}{3}$，解得$A=0$，即$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=0$.

例 1.30　根据单调有界数列极限存在原理，研究数列 $x_n=\sqrt{3+\sqrt{3+\cdots+\sqrt{3}}}$（$n$ 层根号）的极限.

解　由 x_n 的定义可知，$x_{n+1}>x_n>\cdots>x_1=\sqrt{3}(n=2,3,\cdots)$，
即 x_n 单调递增；

再由 $x_{n+1}=\sqrt{3+x_n}$，$x_{n+1}^2=3+x_n$，即 $x_{n+1}=\dfrac{3}{x_{n+1}}+\dfrac{x_n}{x_{n+1}}<\dfrac{3}{x_1}+\dfrac{x_{n+1}}{x_{n+1}}=\sqrt{3}+1$ 可知，数列 x_n 有上界（当 $n=1$ 时，$x_1<\sqrt{3}+1$ 也成立）.

故数列 x_n 收敛，可设 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=A$.

对 $x_{n+1}^2=3+x_n$ 两端取极限，得 $A^2=3+A$，注意到 $x_n>0$，进而 $A>0$，解得 $A=\dfrac{1+\sqrt{13}}{2}$，即

$$\lim_{n\to\infty}x_n=\frac{1+\sqrt{13}}{2}$$

例 1.31　计算 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{[nx]}{n}$.

解　由 $nx-1<[nx]\leqslant nx$，有 $x-\dfrac{1}{n}<\dfrac{[xn]}{n}\leqslant x$，

因为 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(x-\dfrac{1}{n}\right)=x$，$\lim\limits_{n\to\infty}x=x$，由极限存在准则 1′（夹逼定理），得

$$\lim_{n\to\infty}\frac{[nx]}{n}=x$$

例 1.32　任何两个非零的无穷小量都能比较阶的高低吗？

答　不能，例如，当 $x\to0$ 时，$f(x)=x\sin\dfrac{1}{x}$ 与 $g(x)=x$ 都是无穷小，但 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x\sin\frac{1}{x}}{x}=\lim\limits_{x\to0}\sin\dfrac{1}{x}$ 不存在.

例 1.33　当 $x\to0$，试确定下列各无穷小对于 x 的阶数.

(1) $\sqrt{x}-\sqrt[3]{x}$，$x>0$

(2) $1-\cos x$

(3) $\sqrt{2+x^3}-\sqrt{2}$

解　(1) $\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{\sqrt{x}-\sqrt[3]{x}}{x^{\frac{1}{3}}}=\lim\limits_{x\to0^+}(x^{\frac{1}{6}}-1)=-1$，

故 $x\to0$ 时，$\sqrt{x}-\sqrt[3]{x}$ 是 x 的 $\dfrac{1}{3}$ 阶无穷小.

注　对于由幂函数(指数大于零时)的代数和组成的无穷小，较小的指数就是阶数.

(2) 因 $x\to0$ 时，$1-\cos x\sim\frac{1}{2}x^2$，

故 $x\to0$ 时，$1-\cos x$ 是 x 的 2 阶无穷小.

注　如果这个无穷小有已知的等价无穷小，则与之等价的无穷小中 x 的较小的指数就是阶数.

(3) 因 $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sqrt{2+x^3}-\sqrt{2}}{x^3}=\lim\limits_{x\to0}\frac{2+x^3-2}{x^3(\sqrt{2+x^3}+\sqrt{2})}=\frac{1}{2\sqrt{2}}$，

故 $x\to0$ 时，$\sqrt{2+x^3}-\sqrt{2}$ 是 x 的 3 阶无穷小.

注　(3) 的实际计算思路是：设 $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sqrt{2+x^3}-\sqrt{2}}{x^k}=$ 非零常数.

$$\lim_{x\to0}\frac{\sqrt{2+x^3}-\sqrt{2}}{x^k}=\lim_{x\to0}\frac{2+x^3-2}{x^k(\sqrt{2+x^3}+\sqrt{2})}=\lim_{x\to0}\frac{x^3}{x^k(\sqrt{2+x^3}+\sqrt{2})}$$
$$=\lim_{x\to0}\frac{x^3}{x^k}\cdot\lim_{x\to0}\frac{1}{\sqrt{2+x^3}+\sqrt{2}}$$

因

$$\lim_{x\to0}\frac{1}{\sqrt{2+x^3}+\sqrt{2}}=\frac{1}{2\sqrt{2}}\neq0$$

所以由 $\lim\limits_{x\to0}\frac{x^3}{x^k}$ 确定，$\sqrt{2+x^3}-\sqrt{2}$ 是 x 的 3 阶无穷小.

例 1.34　计算极限的过程中，作等价无穷小替换时，通常的规则是：作为因式中的无穷小，可以用它的等价无穷小替换，作为和、差中的和式不作替换，为什么?

答　设 α, α', β, β' 都是某一极限过程下的无穷小，且 $\alpha\sim\alpha'$, $\beta\sim\beta'$.

因式替换的根据是

$$\lim\frac{\alpha}{\beta}=\lim\frac{\alpha}{\beta}\cdot\frac{\beta'}{\alpha'}\cdot\frac{\alpha'}{\beta'}=\lim\frac{\alpha}{\alpha'}\cdot\frac{\beta'}{\beta}\cdot\frac{\alpha'}{\beta'}=\lim\frac{\alpha'}{\beta'}$$

而和、差中的和式，如果替换，可能错误，

例如，$\lim\limits_{x\to0}\frac{\tan x-\sin x}{x^3}$，正确结果是 $\frac{1}{2}$，但替换后，会得出错误结果 0.

例 1.35　(1) 证明：当 $x\to0^+$ 时，$\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}\sim\sqrt[8]{x}$.

(2) 证明：当 $x\to0^+$ 时，$\frac{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}-2}{\sqrt{x}}\sim-\frac{1}{2}x^{\frac{3}{2}}$.