高等数学选讲

与考研辅导

夏大峰　薛巧玲　朱杏华　编

科学出版社

高等数学选讲与考研辅导

夏大峰　薛巧玲　朱杏华　编

科学出版社
北　京

内 容 简 介

本书是高等数学课程教学内容的拓展与延伸，除了有巩固教学内容的辅助功能外，兼可拓宽高等数学知识，与课堂教学内容同步，便于自学，加深学生对教学内容的理解和应用. 例题选讲一般具有多个知识点的综合性，每章节都配有练习题，最后还精选了部分历年的考研试题，以供学生考研前练习. 本书内容包括：函数、极限、连续，导数与微分，微分中值定理与导数的应用，一元函数积分学及其应用，微分方程，向量代数与空间解析几何，多元函数微分法及其应用，多元函数积分学及其应用，无穷级数，综合练习题精选. 另外，还附有练习题参考答案.

本书可作为高等数学的配套教材，并可供硕士研究生入学考试的备考者在复习相关知识时学习使用.

图书在版编目(CIP)数据

高等数学选讲与考研辅导 / 夏大峰，薛巧玲，朱杏华编. —北京：科学出版社，2012

ISBN 978-7-03-033187-8

Ⅰ. ①高… Ⅱ. ①夏… ②薛… ③朱… Ⅲ. ①高等数学-高等学校-教学参考资料 Ⅳ. ①O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2011)第 277254 号

责任编辑：伍宏发 曾佳佳 胡 凯/责任校对：刘小梅

责任印制：赵 博/封面设计：许 瑞

科 学 出 版 社 出版

北京东黄城根北街16号

邮政编码：100717

http://www.sciencep.com

源海印刷有限责任公司 印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

*

2012 年 1 月第 一 版 开本：787×1092 1/16

2012 年 1 月第一次印刷 印张：22

字数：511 000

定价：48.00 元

（如有印装质量问题，我社负责调换）

前　　言

高等数学是高等学校非数学专业普遍开设的公共基础课，具有独特的知识结构完整性、基本概念和基本理论的抽象性，以及分析和解决问题的技巧性.

本书作为南京信息工程大学教改项目（即教材基金资助项目）的成果，是在结合南京信息工程大学数学素质拓展课程，参照教育部制定的全国硕士研究生入学考试理、工、经、管类数学考试大纲中对高等数学部分的要求，并借鉴其他高校高等数学教学改革的成果和考研辅导经验的基础上编写而成的. 本书既可以作为高等数学配套教材、拓展课程的教材，又可以作为考研的辅导教材和参考书. 所以，本书具备以下特点：

1. 全面覆盖全国硕士研究生入学考试数学考试大纲中高等数学部分的知识点，并对重要概念、公式、定理等进行剖析，增强学生对这些内容的理解和应用，以便达到全面复习和巩固高等数学知识和内容的目的.

2. 选择的例题一般涉及多个知识点，技巧性强，使学生从不同的角度考虑问题，拓宽知识面，达到素质拓展的要求，从而提高学生分析问题、解决问题的能力，力求使学生在考虑问题时具有全面性、灵活性、技巧性.

3. 每一节的练习注重巩固知识点的练习；每章的总练习注重综合运用能力、解题思路与技巧的练习；综合练习题精选注重考研复习的练习. 这些练习题主要参照历年考研题型精心设计挑选.

4. 本书每章节的内容安排：每章前面是内容概要，每节分为三部分——内容选讲概述、典型例题选讲、练习. 这种安排使得本书既可以作为高等数学拓展和延伸方面的教材，又可以作为考研辅导班的教材，同时还具有考研复习资料的功能.

5. 本书与高等数学教材配合使用，使得教师在教学过程中无需花过多的时间讲解有关概念和结论，只需指导学生参考本书的相关内容. 这样不仅便于学生课后复习、巩固所学知识，还可以缓解教学学时不足带来的压力，使得教师的课堂教学时间更充裕、减轻教学压力，达到提高教学效果的目的.

本书共分九章，外加综合练习题精选，后面还附有每节、章、综合练习题精选的参考答案，以方便学生做练习时把握其准确性. 由于不定积分与定积分、重积分与曲线积分和曲面积分的内在联系，本书把不定积分与定积分及其应用作为一章，重积分与曲线积分和曲面积分作为一章，便于问题的讨论和连贯性.

本书主要由夏大峰、薛巧玲、朱杏华老师组稿、编写完成. 另外，在编写书稿的过程中，南京信息工程大学的大学数学部老师提出了宝贵的意见，在此表示感谢.

在本书编写过程中，我们参考了许多已出版的有关教材、教材辅导书以及研究成果，由于数量较多，在此不便一一列出. 由于编者水平有限，难免存在一些缺点和不足，敬请各位专家、同行和广大读者批评指正.

编　者

2011 年 10 月于南京信息工程大学

目　　录

第一章　函数 极限 连续

本章的知识点与重难点概要

1. 函数是微积分研究的对象，函数部分的知识点和重难点：函数的定义域、复合函数、反函数、分段函数和函数的性质.

2. 极限是微积分的理论基础，研究函数的性质实质上是研究各种类型的极限，如连续、导数、定积分、无穷级数等. 极限部分的知识点和重难点是求极限.

3. 无穷小是极限为零的特殊变量，极限问题可以归结为无穷小问题. 无穷小的知识点和重难点：无穷小的比较、无穷小的阶、用等价无穷小替换求极限.

4. 我们研究的对象是连续函数或除若干点外是连续的函数. 由于函数的连续性是通过极限来定义的，判断函数是否连续以及函数间断点的类型等问题本质上仍是求极限. 因此，函数连续性的知识点和重难点：掌握间断点类型的判断方法，特别是分段函数在分段点的连续性，以及连续性的应用.

5. 函数的许多性质与连续性有关，要掌握有界闭区间上连续函数的性质：有界性定理，最大值、最小值定理，介值定理与零点存在性定理，重点是会应用这些性质.

第一节　函数与性质

一、内容选讲概述

【函数的定义】

设 D 是一个给定的数集，如果对每一 $x\in D$，按照一定的法则总存在唯一确定的值 y 与之对应，则称 y 是 x 的函数，记为 $y=f(x)$. 其中 x 称为自变量，y 称为因变量；数集 D 称为该函数的定义域，$W=\{y\mid y=f(x),x\in D\}$ 称为函数 $y=f(x)$ 的值域.

函数定义有两个要素：定义域和对应法则. 当两个函数的定义域和对应法则完全相同时，这两个函数相同.

另外，函数的表示具有与字母的无关性，即 $y=f(x)$ 与 $s=f(t)$ 可表示同一个函数.

【复合函数】

设函数 $y=f(u)$ 的定义域为 U，函数 $u=\varphi(x)$ 的定义域为 D. 如果函数 $u=\varphi(x)$ 值域是 U 的子集，则称 $y=f[\varphi(x)]$ 是定义在 D 上的复合函数. 其中 u 称为中间变量. 若 $u=\varphi(x)$ 值域不含在 $y=f(u)$ 的定义域内，则 $u=\varphi(x)$ 与 $y=f(u)$ 不能复合.

【反函数】

设函数 $y=f(x)$ 的定义域为 D，值域为 W. 如果对每一 $y\in W$，都存在唯一的 $x\in D$，使得 $y=f(x)$，这样就得到了定义在 W 上、值域为 D 的函数，称为函数 $y=f(x)$ 的反函

数，记为 $x=f^{-1}(y)$，习惯上记为 $y=f^{-1}(x)$.

【初等函数】

常值函数、幂函数、指数函数、对数函数、三角函数、反三角函数统称为基本初等函数. 由基本初等函数经过有限次的四则运算和有限次的复合步骤构成的函数，称为初等函数.

分段函数一般不是初等函数，但也存在分段函数是初等函数的情形. 如函数

$$y=\begin{cases}-x, & x\leqslant 0\\ x, & x>0\end{cases}$$

是初等函数，因为它可以用一个式子 $y=|x|=\sqrt{x^2}$表示.

【函数的性质】

(1) 奇偶性：设函数 $f(x)$定义域 D 关于原点对称，若对任意的 $x\in D$，都有 $f(-x)=f(x)$，则称 $f(x)$为偶函数；若对任意的 $x\in D$，都有 $f(-x)=-f(x)$，则称 $f(x)$为奇函数.

(2) 周期性：设函数 $f(x)$的定义域为 D，若存在 $l\neq 0$，使得对任意的 $x\in D$，都有 $x+l\in D$，且 $f(l+x)=f(x)$，则称 $f(x)$为周期函数. 其中 l 称为周期. 通常把周期函数 $f(x)$的最小正周期函数称为 $f(x)$周期.

(3) 有界性：设函数 $f(x)$的定义域为 D，若存在 $M>0$，使得对任意的 $x\in D$，都有 $|f(x)|\leqslant M$，则称 $f(x)$为 D 上的有界函数；否则称为无界函数.

(4) 单调性：设函数 $f(x)$的定义域为 D，若对任意的 $x_1,x_2\in D$，当 $x_1<x_2$ 时，有 $f(x_1)\leqslant f(x_2)$，则称 $f(x)$在 D 上是单调增加的函数，特别地有 $f(x_1)<f(x_2)$，则称 $f(x)$在 D 上是严格单调增加函数；若对任意的 $x_1,x_2\in D$，当 $x_1<x_2$ 时，有 $f(x_1)\geqslant f(x_2)$，则称 $f(x)$在 D 上是单调减少的函数，特别地有 $f(x_1)>f(x_2)$，则称 $f(x)$在 D 上是严格单调减少函数.

二、例题选讲

1. 求函数定义域例题选讲

例 1　求函数 $f(x)=\dfrac{1}{\lg(3-x)}+\sqrt{49-x^2}$的定义域及 $f[f(-7)]$.

解　要使 $f(x)$有意义，则应有

$$\begin{cases}3-x>0\\ 3-x\neq 1\\ 49-x^2\geqslant 0\end{cases},$$

解之得$-7\leqslant x<2,2<x<3$，即 $f(x)$的定义域为$[-7,2)\cup(2,3)$.

又因为 $f(-7)=1$，所以 $f[f(-7)]=f(1)=\dfrac{1}{\lg 2}+4\sqrt{3}$.

例 2　设 $f(x)=\ln\dfrac{2+x}{2-x}$，求 $f(x)+f\left(\dfrac{2}{x}\right)$的定义域.

解 要使 $f(x)$有意义,则应有

$$\begin{cases}\dfrac{2+x}{2-x}>0\\ 2-x\neq 0\end{cases},$$

解之得$-2<x<2$,即 $f(x)$的定义域为$(-2,2)$,再由$-2<\dfrac{2}{x}<2$,得$|x|>1$. 于是 $f(x)+f\left(\dfrac{2}{x}\right)$的定义域为$(-2,-1)\cup(1,2)$.

注 求函数的定义域,通常是指函数有定义的自变量变化范围.

2. 复合函数例题选讲

例 3 已知 $f(x)=\begin{cases}1, & |x|\leqslant 1\\ 0, & |x|>1\end{cases}$, $g(x)=\begin{cases}2-x^2, & |x|\leqslant 1\\ 2, & |x|>1\end{cases}$,求 $f[g(x)]$和 $g[f(x)]$.

解 $f[g(x)]=\begin{cases}1, & |g(x)|\leqslant 1\\ 0, & |g(x)|>1\end{cases}$, 由 $g(x)=\begin{cases}2-x^2, & |x|\leqslant 1\\ 2, & |x|>1\end{cases}$ 可知:当$|x|>1$时,$g(x)=2$;当$|x|\leqslant 1$时,根据 $g(x)=2-x^2$,得 $1\leqslant g(x)\leqslant 2$,所以

$$f[g(x)]=\begin{cases}1, & |g(x)|\leqslant 1\\ 0, & |g(x)|>1\end{cases}=\begin{cases}1, & |x|=1\\ 0, & |x|\neq 1\end{cases}.$$

又因为 $g[f(x)]=\begin{cases}2-f^2(x), & |f(x)|\leqslant 1\\ 2, & |f(x)|>1\end{cases}$,由 $f(x)=\begin{cases}1, & |x|\leqslant 1\\ 0, & |x|>1\end{cases}$ 可知 $|f(x)|\leqslant 1$,所以

$$g[f(x)]=\begin{cases}1, & |x|\leqslant 1\\ 2, & |x|>1\end{cases}.$$

3. 函数奇偶性例题选讲

例 4 设函数 $f(x)$满足方程 $2f(x)+f\left(\dfrac{1}{x}\right)=\dfrac{a}{x}$($a$ 为常数),证明:$f(x)$是奇函数.

证明 用$\dfrac{1}{x}$代换原方程中的x,得

$$2f\left(\frac{1}{x}\right)+f(x)=ax,$$

与原方程联立方程组,解得

$$f(x)=\frac{a}{3}\left(\frac{2}{x}-x\right).$$

由于
$$f(-x)=\frac{a}{3}\left(\frac{2}{-x}+x\right)=-\frac{a}{3}\left(\frac{2}{x}-x\right)=-f(x),$$

所以 $f(x)$是奇函数.

例 5 (1) 判断函数 $f(x)=\frac{a^x-1}{a^x+1}[\ln(1-x)-\ln(1+x)]$的奇偶性($a>0$ 且 $a\neq1$);

(2) 若 $f(x)=\begin{cases}\varphi(x), & x<0\\ 0, & x=0\\ x-\frac{1}{x}, & x>0\end{cases}$ 在$(-\infty,+\infty)$内是偶函数,求 $\varphi(x)$.

解 (1) 因为

$$\begin{aligned}f(-x)&=\frac{a^{-x}-1}{a^{-x}+1}[\ln(1+x)-\ln(1-x)]\\&=\frac{1-a^x}{1+a^x}[\ln(1+x)-\ln(1-x)]\\&=\frac{a^x-1}{a^x+1}[\ln(1-x)-\ln(1+x)]=f(x),\end{aligned}$$

所以 $f(x)$是偶函数.

(2) $f(x)$在$(-\infty,+\infty)$内是偶函数,当 $x<0$ 时,$-x>0$,那么

$$\varphi(x)=f(x)=f(-x)=-x-\frac{1}{-x}=\frac{1}{x}-x.$$

例 6 证明:定义在关于原点对称区间上的函数 $f(x)$可以表示为奇函数与偶函数之和.

证明 令$g(x)=\frac{1}{2}[f(x)+f(-x)]$,$h(x)=\frac{1}{2}[f(x)-f(-x)]$. 因为

$$g(-x)=\frac{1}{2}[f(-x)+f(x)]=g(x),$$

$$h(-x)=\frac{1}{2}[f(-x)-f(x)]=-\frac{1}{2}[f(x)-f(-x)]=-h(x),$$

所以 $g(x)$是偶函数,$h(x)$是奇函数. 又

$$g(x)+h(x)=\frac{1}{2}[f(x)+f(-x)]+\frac{1}{2}[f(x)-f(-x)]=f(x),$$

所以 $f(x)$可以表示为奇函数与偶函数之和.

4. 求反函数例题选讲

例 7 求函数 $f(x)=\begin{cases}x^2-1, & 0<x<1\\ x^4, & -1\leqslant x\leqslant 0\end{cases}$ 的反函数.

解 当 $0<x<1$ 时,由 $y=x^2-1$ 可得 $x=\sqrt{y+1}$,$-1<y<0$;当$-1<x<0$ 时,由 $y=x^4$ 可得 $x=\sqrt[4]{y}$,$0\leqslant y\leqslant 1$. 所以,$f(x)$的反函数 $f^{-1}(x)=\begin{cases}\sqrt{x+1}, & -1<x<0\\ \sqrt[4]{x}, & 0\leqslant x\leqslant 1\end{cases}$.

5. 周期函数例题选讲

例 8 若存在 $c\neq0$,使得对任意的 $x\in(-\infty,+\infty)$,都有 $f(x+c)=-f(x)$. 证明:$f(x)$是周期函数.

证明　因为

$$f(x+2c)=-f(x+c)=f(x),$$

所以 $f(x)$ 是周期函数.

例 9　若函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内满足 $f(x+\pi)=f(x)+\sin x$. 则 $f(x)$ 是以 2π 为周期的函数.

证明　因为

$$\begin{aligned} f(x+2\pi) &= f(x+\pi)+\sin(x+\pi) \\ &= f(x)+\sin x+\sin(x+\pi)=f(x), \end{aligned}$$

所以 $f(x)$ 是以 2π 为周期的函数.

练习一

1. 求下列函数的定义域.

(1) $f(x)=\sqrt{3-x^2}+\ln(x+1)$；　　(2) $f(x)=\sqrt{\arctan x-\frac{\pi}{4}}$.

2. 设函数 $f(x)=\begin{cases}1, & |x|\leqslant 1\\ 0, & |x|>1\end{cases}$, 求 $f[f(x)]$.

3. 设 $f(x)=\begin{cases}e^x, & x>1\\ 2x, & x\leqslant 1\end{cases}$, $\varphi(x)=\begin{cases}\sin x, & x>0\\ x^2, & x\leqslant 0\end{cases}$, 求 $f[\varphi(x)]$.

4. 对每一 $x\in(-\infty,+\infty)$, 都有 $f\left(x+\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}+\sqrt{f(x)-f^2(x)}$, 证明 $f(x)$ 是以 1 为周期的周期函数.

5. 求 $f(x)=\begin{cases}\sqrt{x^2+1}, & x\geqslant 0\\ x+1, & x<0\end{cases}$ 的反函数.

6. 判别函数 $f(x)=\ln(x+\sqrt{1+x^2})$ 的奇偶性.

7. 已知 $f(x), g(x), h(x)$ 均为单调增加函数, 且 $g(x)\leqslant f(x)\leqslant h(x)$, 证明:

$$g[g(x)]\leqslant f[f(x)]\leqslant h[h(x)].$$

8. 证明函数 $f(x)=\frac{1}{x}\arctan\frac{1}{x}$ 是无界函数.

第二节　极限及其计算

一、内容选讲概述

【数列极限】

设数列 $\{x_n\}$, 若存在常数 a, 使得对 $\forall\varepsilon>0$, 总存在自然数 N, 当 $n>N$ 时, 都有 $|x_n-a|<\varepsilon$ 成立, 则称 a 为数列 $\{x_n\}$ 的极限, 记为 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$.

若 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$, 则对 $\{x_n\}$ 的任意子列 $\{x_{n_k}\}$, 都有 $\lim\limits_{k\to\infty}x_{n_k}=a$.

反过来, 若存在 $\{x_n\}$ 的某子列, 其极限不存在, 或存在 $\{x_n\}$ 的某两个子列, 其极限存

在但不相等，那么数列$\{x_n\}$的极限不存在.

另外，数列$\{x_n\}$的某几个子列的极限存在且相等，也不能断定数列$\{x_n\}$的极限存在. 但有下列结论：

若 $x_{2k-1}\to a(k\to\infty)$，$x_{2k}\to a(k\to\infty)$，那么$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$.

【函数极限】

设函数 $f(x)$在点 x_0 的某去心邻域内有定义，若存在常数 a，使得对 $\forall\varepsilon>0$，总存在 $\delta>0$，当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时，x 对应的函数值 $f(x)$满足不等式

$$|f(x)-a|<\varepsilon,$$

则称 a 为函数 $f(x)$在 $x\to x_0$ 时的极限，记为$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=a$.

另外，还有函数 $f(x)$在 $x\to\infty$，$x\to+\infty$，$x\to-\infty$的极限定义

$$\lim_{x\to\infty}f(x)=a,\quad \lim_{x\to+\infty}f(x)=a,\quad \lim_{x\to-\infty}f(x)=a,$$

以及函数 $f(x)$在 $x\to x_0^-$，$x\to x_0^+$ 时的左、右极限定义

$$f(x_0^-)=\lim_{x\to x_0^-}f(x),\quad f(x_0^+)=\lim_{x\to x_0^+}f(x),$$

在此就不详细叙述了.

关于函数左右极限与极限的关系，有下列结论：

$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=a$ 的充要条件是 $f(x_0^-)=f(x_0^+)=a$.

$\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=a$ 的充要条件是 $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=a$.

【极限性质】

以$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=a$ 为例，具有如下性质.

(1) 唯一性：极限 a 是唯一的；

(2) 局部有界性：函数 $f(x)$在点 x_0 的某去心邻域内是有界的，即存在 $\delta>0$ 和 $M>0$，当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时，都有 $|f(x)|\leqslant M$；

(3) 局部保号性：若 $a>0$(或 $a<0$)，则存在 $\delta>0$，当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时，有

$$f(x)>0[\text{或 } f(x)<0].$$

另外，若存在 $\delta>0$，使得当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时，有 $f(x)>0$[或 $f(x)<0$]，那么函数 $f(x)$在 $x\to x_0$ 时的极限 $a\geqslant0$(或 $a\leqslant0$).

其他类型的极限具有相同的性质，在此略述.

【极限四则运算】

设 $\lim f(x)=a$，$\lim g(x)=b$，则

(1) $\lim[f(x)\pm g(x)]=\lim f(x)\pm\lim g(x)=a\pm b$；

(2) $\lim[f(x)\cdot g(x)]=\lim f(x)\cdot\lim g(x)=a\cdot b$；

(3) 当 $\lim g(x)=b\neq0$ 时，$\lim\dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{\lim f(x)}{\lim g(x)}=\dfrac{a}{b}$.

上述极限四则运算法则中 lim 是指 $x\to x_0$，$x\to x_0^-$，$x\to x_0^+$ 以及 $x\to\infty$，$x\to-\infty$，$x\to+\infty$ 时的极限. 对于数列也有相同的极限四则运算性质.

设 $P_n(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_{n-1}x+a_n$，$Q_m(x)=b_0x^m+b_1x^{m-1}+\cdots+b_{m-1}x+b_m$ 为多项式，则

$$\lim_{x\to\infty}\frac{P_n}{Q_m}=\begin{cases}\dfrac{a_0}{b_0}, & n=m\\ 0, & n<m,\\ \infty, & n>m\end{cases}\qquad a_0\neq 0, b_0\neq 0.$$

【复合函数极限】

设函数 $y=f(u)$，$u=\varphi(x)$，若 $\lim\limits_{x\to x_0}\varphi(x)=u_0$ 且 $\lim\limits_{u\to u_0}f(u)=f(u_0)$，则

$$\lim_{x\to x_0}f[\varphi(x)]=f(u_0)=f[\lim_{x\to x_0}\varphi(x)].$$

【极限存在准则】

(1) 单调有界准则：单调有界数列一定有极限.

(2) 夹逼准则：若在 x_0 点的某去心邻域内有

$$g(x)\leqslant f(x)\leqslant h(x),\quad 且\lim_{x\to x_0}g(x)=\lim_{x\to x_0}h(x)=a,$$

则 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=a$.

同样地，还有 $x\to\infty$，$x\to\pm\infty$，以及 $x\to x_0^{\pm}$ 时的夹逼准则，在此就不一一给出了. 对于数列的情形，有下列的夹逼准则：

若存在某自然数 N，使得当 $n>N$ 时，有

$$y_n\leqslant x_n\leqslant z_n,\quad 且\lim_{n\to\infty}y_n=\lim_{n\to\infty}z_n=a,$$

则 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$.

【归结原理】

极限 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=a$ 的充要条件是对任意趋于 x_0 的数列 $\{x_n\}(x_n\neq x_0)$，都有 $\lim\limits_{n\to\infty}f(x_n)=a$.

同样地，还有 $x\to\infty$，$x\to\pm\infty$，以及 $x\to x_0^{\pm}$ 时的归结原理，在此也不一一给出了. 归结原理主要用于讨论函数极限不存在的情况.

【两个重要极限】

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$.

$\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=\mathrm{e}$，或者 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x=\mathrm{e}$.

二、例题选讲

1. 证明极限例题选讲

例 1　证明：$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=1$.

证明　对任意的 $\varepsilon>0$，令 $\sqrt[n]{n}=1+a$，当 $n>2$ 时，

$$n=(1+a)^n=1+na+\frac{n(n-1)}{2}a^2+\cdots+a^n$$

$$>\frac{n(n-1)}{2}a^2>\frac{n}{2}\cdot\frac{n}{2}a^2=\frac{n^2}{4}a^2,$$

即 $n>\frac{n^2}{4}a^2$,从而 $a<\frac{2}{\sqrt{n}}$. 所以由

$$\left|\sqrt[n]{n}-1\right|=a<\frac{2}{\sqrt{n}}<\varepsilon$$

可得 $n>\frac{4}{\varepsilon^2}$,取 $N=\max\left\{2,\frac{4}{\varepsilon^2}\right\}$,则当 $n>N$ 时,有 $\left|\sqrt[n]{n}-1\right|<\varepsilon$. 所以 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=1$.

注 在计算某些极限的过程中,例 1 可以作为结果来使用.

2. 求极限例题选讲

例 2 求 $\lim\limits_{x\to2}\left(\frac{1}{x-2}-\frac{12}{x^3-8}\right)$.

解
$$\lim_{x\to2}\left(\frac{1}{x-2}-\frac{12}{x^3-8}\right)=\lim_{x\to2}\frac{x^2+2x+4-12}{(x-2)(x^2+2x+4)}$$

$$=\lim_{x\to2}\frac{(x+4)(x-2)}{(x-2)(x^2+2x+4)}=\lim_{x\to2}\frac{x+4}{x^2+2x+4}=\frac{1}{2}.$$

例 3 求 $\lim\limits_{n\to\infty}\left[\frac{1}{1\cdot2}+\frac{1}{2\cdot3}+\cdots+\frac{1}{n\cdot(n+1)}\right]$.

解
$$\lim_{n\to\infty}\left[\frac{1}{1\cdot2}+\frac{1}{2\cdot3}+\cdots+\frac{1}{n\cdot(n+1)}\right]$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left[\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)\right]$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)=1.$$

例 4 求 $\lim\limits_{x\to1}\frac{x^2-1}{\sqrt{1+x}-\sqrt{2}}$.

解
$$\lim_{x\to1}\frac{x^2-1}{\sqrt{1+x}-\sqrt{2}}=\lim_{x\to1}\frac{(x-1)(x+1)(\sqrt{1+x}+\sqrt{2})}{(1+x)-2}$$

$$=\lim_{x\to1}\frac{(x+1)(\sqrt{1+x}+\sqrt{2})}{1}=4\sqrt{2}.$$

例 5 求 $\lim\limits_{x\to+\infty}x(\sqrt{x^2+1}-x)$.

解
$$\lim_{x\to+\infty}x(\sqrt{x^2+1}-x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{x(x^2+1-x^2)}{\sqrt{x^2+1}+x}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{\sqrt{x^2+1}+x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}+1}=\frac{1}{1+1}=\frac{1}{2}.$$

例 6　若 $\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt{x^2+x+1}-kx-m)=0$，试求 k,m 的值.

解　由 $\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt{x^2+x+1}-kx-m)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^2+x+1-(kx+m)^2}{\sqrt{x^2+x+1}+kx+m}$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{(1-k^2)x^2+(1-2km)x+1-m^2}{\sqrt{x^2+x+1}+kx+m}=0,$$

由于上式中分母为一次因式，所以要使上式成立，其分子必须是零次因式，即满足

$$\begin{cases}k>0\\1-k^2=0\\1-2km=0\end{cases},$$

解得 $k=1,m=\dfrac{1}{2}$.

例 7　求 $\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{2+e^{\frac{1}{x}}}{1+e^{\frac{4}{x}}}+\dfrac{\sin x}{|x|}\right)$.

解　由于式中含有 $\dfrac{1}{x}$ 与 $|x|$，分别考虑左、右极限

$$\lim_{x\to0^+}\left(\frac{2+e^{\frac{1}{x}}}{1+e^{\frac{4}{x}}}+\frac{\sin x}{x}\right)=0+1=1,$$

$$\lim_{x\to0^-}\left(\frac{2+e^{\frac{1}{x}}}{1+e^{\frac{4}{x}}}-\frac{\sin x}{x}\right)=2-1=1,$$

所以

$$\lim_{x\to0}\left(\frac{2+e^{\frac{1}{x}}}{1+e^{\frac{4}{x}}}+\frac{\sin x}{|x|}\right)=1.$$

3. 极限存在准则例题选讲

例 8　设 $x_0>0,x_{n+1}=\dfrac{1}{2}\left(x_n+\dfrac{3}{x_n}\right),n=0,1,2,\cdots$，证明数列 $\{x_n\}$ 的极限存在，并求极限.

证明　因为

$$x_{n+1}=\frac{1}{2}\left(x_n+\frac{3}{x_n}\right)\geqslant\sqrt{x_n\cdot\frac{3}{x_n}}=\sqrt{3},$$

所以数列 $\{x_n\}$ 有下界；又因为

$$\frac{x_{n+1}}{x_n}=\frac{1}{2}\left(1+\frac{3}{x_n^2}\right)\leqslant\frac{1}{2}\left[1+\frac{3}{(\sqrt{3})^2}\right]=1,$$

所以 $x_{n+1}\leqslant x_n$. 数列 $\{x_n\}$ 单调减少，故数列 $\{x_n\}$ 的极限存在.

令 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$，则由

$$\lim_{n\to\infty}x_{n+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2}\left(x_n+\frac{3}{x_n}\right),$$

可得 $a=\dfrac{1}{2}\left(a+\dfrac{3}{a}\right)$，解得 $a=\pm\sqrt{3}$. 由于 $x_n>0$，所以 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\sqrt{3}$.

4. 两个重要极限例题选讲

例 9 已知$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n+c}{n-c}\right)^n=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 4x}{x}$，求 c 的值.

解 因为

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+c}{n-c}\right)^n=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(1+\frac{c}{n}\right)^n}{\left(1-\frac{c}{n}\right)^n}=e^{2c},$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 4x}{x}=4,$$

所以，由 $e^{2c}=4$ 可得 $c=\ln 2$.

例 10 求$\lim\limits_{x\to\infty}\left[\dfrac{x^2}{(x-a)(x+b)}\right]^x$.

解一
$$\lim_{x\to\infty}\left[\frac{x^2}{(x-a)(x+b)}\right]^x$$
$$=\lim_{x\to\infty}\left[1+\frac{x^2-(x-a)(x+b)}{(x-a)(x+b)}\right]^x$$
$$=\lim_{x\to\infty}\left[1+\frac{(a-b)x+ab}{(x-a)(x+b)}\right]^{\frac{(x-a)(x+b)}{(a-b)x+ab}\cdot\frac{(a-b)x+ab}{(x-a)(x+b)}x}=e^{a-b}.$$

解二
$$\lim_{x\to\infty}\left[\frac{x^2}{(x-a)(x+b)}\right]^x=\lim_{x\to\infty}\left[\frac{1}{\left(1-\frac{a}{x}\right)\left(1+\frac{b}{x}\right)}\right]^x$$
$$=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{\left(1-\frac{a}{x}\right)^x\left(1+\frac{b}{x}\right)^x}=\frac{1}{e^{-a}e^{b}}=e^{a-b}.$$

5. 极限不存在例题选讲

例 11 讨论极限$\lim\limits_{x\to 0}\left(\cos x\cdot\sin\dfrac{1}{x}\right)$的存在性.

解 令 $f(x)=\cos x\cdot\sin\dfrac{1}{x}$，取 $x_n=\dfrac{1}{2\pi n}$，$n=1,2,\cdots$，则$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=0$，且 $f(x_n)=0$，于是$\lim\limits_{n\to\infty}f(x_n)=0$.

取 $y_n=\dfrac{1}{2\pi n+\frac{\pi}{2}}$，$n=1,2,\cdots$，则$\lim\limits_{n\to\infty}y_n=0$，且 $f(y_n)=\cos\dfrac{1}{2\pi n+\frac{\pi}{n}}$，于是$\lim\limits_{n\to\infty}f(y_n)=1$.

所以，由归结原理，极限$\lim\limits_{x\to 0}\left(\cos x\cdot\sin\dfrac{1}{x}\right)$不存在.

练习二

1. 求下列各极限.

(1) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(2x-3)^3(3x+2)^4}{(4x+1)^7}$；　(2) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x-\cos x}{3x+\sin x}$；