交换环上有限生成投射模

陈焕良 著

科学出版社

交换环上有限生成投射模

陈焕良　著

科　学　出　版　社

北　京

前　言

同调代数是以环模以及环模上的复形为主要研究对象, 而代数 K 理论则是以 K_0 等 Abel 群为主要研究内容, 这两门学科都是现代代数学的重要分支. 但它们的共同特点是过度抽象, 都需建立在范畴论的基石上. 多年来, 作者一直希望能以一个简明的方式来叙说同调代数和代数 K 理论中的有趣内容. 本书以交换环上有限生成投射模为主要研究对象, 以代数 K 理论中的 K_0 群为主要工具, 系统地阐述了有限生成投射模的结构. 全书主要利用模论方法和环元素分析, 在涉及较少范畴论和同调代数中所用的术语和技巧下, 努力包含更多的群论、环模理论、同调代数和代数 K 理论的经典结果, 同时也把作者在该方向的许多研究成果有机地融进书中, 从而使读者能在较短的时间内对相关理论有一个完整系统的把握. 为便于读者学习, 本书对所有的代数概念和代数方法都努力做到自包含; 对于经典结果的论证, 努力求新求简, 以一个新的体系统一起来. 由此希望呈现给读者的是 K_0 群是研究交换环外部结构的一个强有力工具. 本书所阐述的交换环上的 K_0 群理论, 对交换环上的有限生成投射模给出了很好的刻画. 该书论述中不仅保持了模论外部刻画的全局性特点, 更体现了环论中内部刻画的细致技巧, 使得读者只需具备高等代数和抽象代数的基础知识, 即可在较短的时间内熟悉该方向的工作.

全书共分 6 章, 循着基本概念、无挠 K_0 群、挠 K_0 群的讨论, 综合无挠群和挠群讨论环的投射自由性, 最后讨论两类相关的 Abel 群. 第 1 章阐述了模、K_0 群和稳定自由模等基本理论, 这不仅是模论和代数 K 理论的基本内容, 也是本书进一步学习的基础. 第 2 章讨论了 K_0 群无挠性, 进而讨论多项式环 K_0 群, 研究了具有无挠 K_0 群群环. 第 3 章研究 K_0 群的约化群何时为挠群的问题, 讨论了 Dedekind 环的约化群, 并确定了一些常见群环上有限生成投射模的结构. 综合前 3 章, 讨论 $K_0(R) \cong \mathbf{Z}$ 的问题, 为此, 第 4 章研究了环的投射自由性, 讨论了 ID 环、多项式环和群环的投射自由性, 并给出了连通性与投射自由性之间的关系. 第 5 章讨论了稳定环与模的消去问题, 并介绍了交换环的 Picard 群理论. 第 6 章定义了两类新的 Abel 群, 从而利用 $K_\#$ 群对 K_0 群无挠性进行了细致刻画. 进一步把 $K_0(R) \cong \mathbf{Z}$ 的问题分解成两类更弱的形式, 构造了比 K_0 群更为简单的 $K_\wedge$ 群, 进而讨论了常见环的 2-PSF 性与投射自由性的一致性.

本书内容取材于作者的相关论文和讲稿, 并参阅了代数 K 理论、同调代数、群论、范畴论和环模理论的专著以及国内外研究者的一些最新成果, 对于经典内容, 作者尽可能给出更简洁的处理, 使证明过程更自然. 对于直接引用和未特别标注的

一些经典结果的作者, 作者表示诚挚的谢意. 作者力图使本书通俗易懂, 使读者能够沿着一条简捷的途径, 较快地掌握交换环上有限生成投射模理论. 在结论的推导上, 力图论证严格, 方法自然, 适合读者自学, 并体现方法上的创新. 作者的意图是希望能给研究生提供一本易入门, 但内容又较深入的 K_0 群专著, 使得他们能较快地学会环模理论和方法. 本书部分章节曾在指导的研究生中讲授过, 他们提出了很多宝贵意见. 本书的出版得到了杭州师范大学出版专项经费资助项目基金、浙江省自然科学基金和杭州师范大学科研启动基金的资助. 借此机会作者还要感谢家人的陪伴, 感谢杭州的美丽与安谧, 正是这些使我完成了本书写作.

陈焕良

2011 年 9 月于杭州

符　号　表

$\mathbf{N}$	自然数集合
$\mathbf{R}$	实数域
$\mathbf{Z}$	整数环
$\mathbf{Z}_m$	模 m 整数环
$\varnothing$	空集
$\overline{\alpha}$	复数 α 的共扼
$\|a\|$	整数 a 的绝对值
A^{T}	矩阵 A 转置
A^{-1}	矩阵 A 逆
$A \cong B$	A 同构 B
$A \subseteq B$	A 是 B 子模
$A \subseteq^{\oplus} B$	A 是 B 直和项
$A \bigoplus B$	A 与 B 直和
$A \bigotimes_R B$	A 与 B 张量积
$\mathrm{ann}_R(M)$	模 M 的零化子
$\mathrm{ann}_R(x)$	元素 x 的零化子
$\mathrm{Aut}(M)$	模 M 的自同构群
$Cl(R)$	环 R 的理想类群
$C(X)$	拓扑空间 X 上实值连续函数环
$\det(A)$	矩阵 A 行列式
$\dim_D(V)$	D- 空间维数
$[G:H]$	G 的子群 H 的指数
$\mathrm{Hom}_R(B,A)$	所有 B 到 A 的 R- 模同态全体
$\mathrm{Im}(f)$	f 的像
$I \lhd R$	I 是环 R 的理想
I_n	$n \times n$ 单位矩阵
$J(R)$	环 R 的 Jacobson 根
$\mathrm{Ker}(f)$	f 的核
$K_0(R)$	环 R 的 K_0 群

$\mathrm{Max}(R)$	环 R 的极大理想集合
$M_n(R)$	环 R 上 $n \times n$ 矩阵环
M^n	n 个 M 的直和
O_F	二次域 F 的代数整数环
$R[x]$	环 R 上多项式环
$R[[x]]$	环 R 上幂级数环
$\mathrm{Spec}(R)$	环 R 的素理想集合
$\mathrm{Tor}G$	群 G 的挠子群
$U(R)$	环 R 中可逆元集合
$\bigwedge^m(M)$	模 M 的外幂
$\begin{pmatrix} n \\ r \end{pmatrix}$	组合数 $\dfrac{n!}{r!(n-r)!}$

目　　录

第 1 章　模与 K_0 群

模是域上向量空间和 Abel 群在环上的推广, 它是代数学的主要研究对象之一. K_0 群是由环导出的一类 Abel 群, 它从外部对环进行了很好刻画. 没有特别声明时, 本书中所有的环都是带单位元 1 的交换环, 本章讨论交换环上模与 K_0 群的基本性质.

1.1　模的性质

本节首先讨论模的概念和基本性质, 关于更多的经典结果, 读者可参考文献 [2], [60] 和 [130].

定义 1.1.1　设 R 为带单位元 1 的交换环, M 为 Abel 群. 如果 M 和 R 间有一个运算 : $M \times R \to M$ 满足条件

(1) 对任意的 $m \in M, r_1, r_2 \in R$, 有 $m \cdot (r_1 + r_2) = m \cdot r_1 + m \cdot r_2$;

(2) 对任意的 $m_1, m_2 \in M, r \in R$, 有 $(m_1 + m_2) \cdot r = m_1 \cdot r + m_2 \cdot r$;

(3) 对任意的 $m \in M, r_1, r_2 \in R$, 有 $m \cdot (r_1 r_2) = (m \cdot r_1) \cdot r_2$;

(4) 对任意的 $m \in M, m \cdot 1_R = m$.

则称 M 为 R-模.

例 1.1.2　Abel 群 G 为 **Z**-模, 其中模运算 "·" 利用环中的加法运算来定义, 即 $g \cdot m = \underbrace{g + g + \cdots + g}_{m}(m > 0), g \cdot 0 = 0$ 和 $g \cdot m = \underbrace{(-g) + (-g) + \cdots + (-g)}_{-m}(m < 0)$, 这里 **Z** 为整数环; 交换环 R 为 R-模, 其中模运算 "·" 利用环中的乘法运算来定义.

对于非交换环 R 和 Abel 群 M, 可以类似地定义右 R-模和左 R-模.

例 1.1.3　设 R 为交换环, 记

$$R^{1\times n} = \{(x_1, x_2, \cdots, x_n) | x_1, \cdots, x_n \in R\}$$

为右 $M_n(R)$-模, 这里运算按下述方式定义:

$$(x_1, x_2, \cdots, x_n) + (y_1, y_2, \cdots, y_n) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \cdots, x_n + y_n);$$

$$(x_1, x_2, \cdots, x_n) \cdot (a_{ij})_{n\times n} = \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^{n} x_i a_{i1} \\ \sum_{i=1}^{n} x_i a_{i2} \\ \vdots \\ \sum_{i=1}^{n} x_i a_{in} \end{pmatrix}.$$

类似地, $R^{n\times 1} = \{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} | x_1, \cdots, x_n \in R\}$, 规定运算如下:

对任何 $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \in R^{n\times 1}$, 定义

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ x_2 + y_2 \\ \vdots \\ x_n + y_n \end{pmatrix};$$

对任何 $(a_{ij})_{n\times n} \in M_n(R)$, 定义

$$(a_{ij})_{n\times n} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^{n} a_{1i} x_i \\ \sum_{i=1}^{n} a_{2i} x_i \\ \vdots \\ \sum_{i=1}^{n} a_{ni} x_i \end{pmatrix}.$$

则 $R^{n\times 1}$ 为左 $M_n(R)$-模.

进一步可知, $R^{n\times 1}$ 也为右 R-模, $R^{1\times n}$ 也为左 R-模. 称 R-模 M 的子群 N 为**子模**, 如果 N 关于 M 的模运算也构成 R-模, 即对任何 $x \in N, r \in R$, $x \cdot r \in N$. 记为 $N \subseteq M$.

定义 1.1.4 设 M_1, M_2 都是 M 的子模, 如果 $M = M_1+M_2 := \{m_1+m_2 \mid m_1 \in M_1, m_2 \in M_2\}$ 且 $M_1 \cap M_2 = 0$, 则称 M 为 M_1 与 M_2 **的直和**, 记为 $M = M_1 \oplus M_2$.

设 M, N 为 R-模, 群同态 $\varphi : M \to N$ 称为 **R-模同态**, 如果对任何 $x \in M, r \in R$, $\varphi(x \cdot r) = \varphi(x) \cdot r$. 易证 R-模同态 φ 的核 $\mathrm{Ker}\varphi := \{x \in M \mid \varphi(x) = 0\}$ 是 M 的子模, R-模同态 φ 的像 $\mathrm{Im}\varphi := \{\varphi(x) \mid x \in M\}$ 是 N 的子模. 称 $1_M : M \to M, 1_M(m) = m$ 为恒等同态. 利用群同态的复合也可以定义模同态的复合.

例 1.1.5 设 $f : M \to N, g : N \to M$ 为 R-模同态. 若 $gf = 1_M$, 则 $N = \mathrm{Ker}g \oplus \mathrm{Im}f$.

证 若 $x \in \mathrm{Ker}g \cap \mathrm{Im}f$, 则 $x = f(y), y \in M$ 且 $g(x) = 0$. 从而 $y = gf(y) = g(x) = 0$, 所以 $x = 0$, 即 $\mathrm{Ker}g \cap \mathrm{Im}f = 0$. 另一方面, 对任意的 $x \in N$, 有 $x = (x - f(x)) + f(x)$, 其中 $x - f(x) \in \mathrm{Ker}g, f(x) \in \mathrm{Im}f$, 所以 $N = \mathrm{Ker}g + \mathrm{Im}f$, 即有 $N = \mathrm{Ker}g \oplus \mathrm{Im}f$.

例 1.1.6 设 $f : M \to M$ 为 R-模同态, 若 $f = f^2$, 则 $M = \mathrm{Ker}f \oplus \mathrm{Im}f$.

证 对任何 $x \in M$, 有 $x = (x - f(x)) + f(x)$, 其中 $x - f(x) \in \mathrm{Ker}f, f(x) \in \mathrm{Im}f$, 从而 $M = \mathrm{Ker}f \oplus \mathrm{Im}f$.

例 1.1.6 中的逆命题并不成立, 如 $M = \{(x, y) \mid x, y \in \mathbf{Z}\}$, $f : M \to M$ 按下述方式定义: $f(x, y) = (x, y)\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, 则 $M = \mathrm{Ker}f \oplus \mathrm{Im}f$, 但 $f \neq f^2$.

例 1.1.7 设 $g, h : M \to M$ 为 R-模同态, 若存在 R-模同态 $s, t : M \to M$ 使得 $sg + th = 1_M, gh = hg = 0, sh = hs, tg = gt$, 则 $M = \mathrm{Ker}g \oplus \mathrm{Ker}h$.

证 若 $x \in \mathrm{Ker}g \cap \mathrm{Ker}h$, 则 $x = 1_M(x) = sg(x) + th(x) = 0$, 从而 $\mathrm{Ker}g \cap \mathrm{Ker}h = 0$, 故 $\mathrm{Ker}g \oplus \mathrm{Ker}h \subseteq M$. 另一方面, 对任意的 $x \in M$, 有 $x = sg(x) + th(x)$. 显见 $h(sg(x)) = s(hg(x)) = 0$, 所以 $sg(x) \subseteq \mathrm{Ker}h$; 类似地, $th(x) \subseteq \mathrm{Ker}g$, 由此可见 $M \subseteq \mathrm{Ker}g \oplus \mathrm{Ker}h$, 从而得证.

称 R-模同态 f 为**单同态**, 如果它是单的群同态; 称 R-模同态 f 为**满同态**, 如果它是满的群同态. 设 M, N 为 R-模, $f : M \to N$, $A \subseteq M, B \subseteq N$, 则有满同态 $\pi_1 : M \to M/A, m \mapsto \overline{m}; \pi_2 : N \to N/B, n \mapsto \overline{n}$. 如果 $f(A) \subseteq B$, 容易验证**模同态定理**, 即存在唯一的模同态 f^* 使得下图可交换:

$$\begin{array}{ccc} M & \xrightarrow{f} & N \\ \pi_1 \downarrow & & \downarrow \pi_2 \\ M/A & \xrightarrow{f^*} & N/B, \end{array}$$

换言之, $\pi_2 f = f^* \pi_1$. 称 R-模同态 $f : M \to N$ 为**模同构**, 如果 f 是群同构. 容易证明 R-模同态 $f : M \to N$ 为模同构当且仅当有 R-模同态 $g : N \to M$, 使得 $gf = 1_M$ 和 $fg = 1_N$, 此时记为 $f : M \cong N$. 设 M_1, M_2 为 R-模, 记 $M_1 \times M_2 :=$

$\{(m_1,m_2)\mid m_1\in M_1,m_2\in M_2\}$, 按自然方式定义 $M_1\times M_2$ 的模运算, 即 $(m_1,m_2)+(n_1,n_2)=(m_1+n_1,m_2+n_2),(m_1,m_2)\cdot r=(m_1r,m_2r)$, 则 $M_1\times M_2$ 为 R-模. 令 $(M_1,0)=\{(m_1,m_2)\mid m_1\in M_1,m_2=0\}$, $(0,M_2)=\{(m_1,m_2)\mid m_1=0,m_2\in M_2\}$, 则 $(M_1,0)$ 和 $(0,M_2)$ 都是 $M_1\times M_2$ 的子模, 且 $M_1\times M_2=(M_1,0)\oplus(0,M_2)$. 进一步, $(M_1,0)\cong M_1,(M_2,0)\cong M_2$. 为方便, 也记 R-模 $M_1\times M_2$ 为 $M_1\oplus M_2$. 设 $m\in\mathbf{N}$, 记 $\mathbf{Z}_m:=\mathbf{Z}/m\mathbf{Z}$.

例 1.1.8　设 $(p,q)=1,p,q\in\mathbf{N}$, 则 $\mathbf{Z}_{pq}\cong\mathbf{Z}_p\oplus\mathbf{Z}_q$.

证　作映射 $\varphi:\mathbf{Z}\longrightarrow\mathbf{Z}_p\oplus\mathbf{Z}_q$, 使得 $\varphi(m)=(m+p\mathbf{Z},m+q\mathbf{Z}),m\in\mathbf{Z}$. 显然 φ 是 $\mathbf{Z}$-模同态, 且 $\mathrm{Ker}\varphi=\{n\in\mathbf{Z}\mid n\in p\mathbf{Z}\cap q\mathbf{Z}\}=pq\mathbf{Z}$. 对任意 $(m+p\mathbf{Z},n+q\mathbf{Z})\in\mathbf{Z}_p\oplus\mathbf{Z}_q$, 由于 $(p,q)=1$, 所以存在 $x,y\in\mathbf{Z}$, 使得 $xp+yq=1$, 从而有 $m+p\mathbf{Z}=m(xp+yq)+p\mathbf{Z}=myq+p\mathbf{Z},n+q\mathbf{Z}=n(xp+yq)+q\mathbf{Z}=nxp+q\mathbf{Z}$. 由此可知 $\varphi(myq+nxp)=(m+p\mathbf{Z},n+q\mathbf{Z})$, 即 φ 为满同态, 所以有 $\mathbf{Z}_p\oplus\mathbf{Z}_q\cong\mathbf{Z}/\mathrm{Ker}\varphi\cong\mathbf{Z}_{pq}$.

设 $M_1,\cdots,M_n$ 为 R-模, 类似地可以归纳定义:

$$M_1\oplus\cdots\oplus M_n=\big(M_1\oplus\cdots\oplus M_{n-1}\big)\oplus M_n,$$

简记为 $\bigoplus\limits_{i=1}^{n}M_i$. 如果 $M_1=\cdots=M_n$, 简记为 M^n. 设 $n=p_1^{r_1}p_2^{r_2}\cdots p_m^{r_m}$, 这里 $p_1,p_2,\cdots,p_m$ 是互素的素数, $r_1,r_2,\cdots,r_m\in\mathbf{N}$, 类似地有 $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}\cong\mathbf{Z}/p_1^{r_1}\mathbf{Z}\oplus\cdots\oplus\mathbf{Z}/p_m^{r_m}\mathbf{Z}$. R-模 M 称为是有限生成的, 如果存在 $\{x_1,\cdots,x_n\}\subseteq M$, 使得对任何 $x\in M$, 存在 $r_1,\cdots,r_n\in R$, 使得 $x=x_1r_1+\cdots+x_nr_n$. 称 R-模 F 为**有限生成自由模**, 如果存在 $n\geqslant 0$, 使得 $F\cong R^n$. 称 R-模 P 为**有限生成投射**R**-模**, 如果存在 R-模 Q, 使得 $P\oplus Q$ 是有限生成自由模. 显然, 有限生成自由 R-模都是有限生成投射的, 但反之不然. 进一步还可以定义一般的自由模和投射模.

例 1.1.9　$\mathbf{Z}_2$ 是有限生成投射 $\mathbf{Z}_6$-模, 但不是有限生成自由的.

证　由例 1.1.8 知, $\mathbf{Z}_6\cong\mathbf{Z}_2\oplus\mathbf{Z}_3$, 所以 $\mathbf{Z}_2$ 是有限生成投射 $\mathbf{Z}_6$-模. 假定 $\mathbf{Z}_2$ 是有限生成自由 $\mathbf{Z}_6$-模, 则有 $n\in\mathbf{N}$ 使得 $\mathbf{Z}_2\cong\mathbf{Z}_6^n$, 故有 $2=6n$, 矛盾, 从而 $\mathbf{Z}_2$ 不是有限生成自由的.

称

$$0\to A\xrightarrow{g}B\xrightarrow{f}C\to 0$$

为 R-**模正合列**, 如果 g 为单同态, $\mathrm{Ker}f=\mathrm{Im}g$ 且 f 为满同态.

命题 1.1.10　设 P 为 R-模, 则 P 为有限生成投射 R-模当且仅当

(1) 存在有限集 $\{p_i\mid i\in I\}\subseteq P$, 使得对任何 $p\in P$, 有 $\{r_i\mid i\in I\}\subseteq R$ 满足 $p=\sum\limits_{i\in I}p_ir_i$, 这里 I 为指标集;

(2) 对任何 R-模正合列 $0\to A\xrightarrow{g}B\xrightarrow{f}P\to 0$, 有 $h:P\to B$, 使得 $fh=1_P$.

证 设 P 为有限生成投射 R-模, 从而有 $\varphi: R^n \cong P\oplus Q$. 令 $x_1=(1,0,\cdots,0)$, $\cdots$, $x_n=(0,0,\cdots,1), p_i=\psi\varphi(x_i)$, 这里 $\psi: P\oplus Q\to P$, $(p,q)=p$. 对任何 $p\in P$, 由于 $\psi\varphi$ 为满同态, 容易验证有 $\{r_1,\cdots,r_n\}\subseteq R$, 使得 $p=\sum\limits_{i=1}^{n}p_ir_i$. 设有 R-模正合列 $0\to A\xrightarrow{g} B\xrightarrow{f} P\to 0$, 有 $\{b_1,\cdots,b_n\}\subseteq B$ 使得 $f(b_i)=p_i$. 定义 $\theta: R^n\to B, \theta(x_i)=b_i$. 令 $\phi: P\to P\oplus Q, \phi(p)=(p,0)$, $h=\theta\varphi^{-1}\phi: P\to B$. 对 p_j, 记 $\varphi^{-1}(p_j)=\sum\limits_{i=1}^{n}x_ir_i$, 直接验证知 $fh(p_j)=f\left(\sum\limits_{i=1}^{n}b_ir_i\right)=\sum\limits_{i=1}^{n}p_ir_i$. 注意到 $\varphi\left(\sum\limits_{i=1}^{n}x_ir_i\right)=p_j$, 从而 $\psi\varphi\left(\sum\limits_{i=1}^{n}x_ir_i\right)=\psi(p_j)=p_j$, 所以 $\sum\limits_{i=1}^{n}p_ir_i=p_j$, 故有 $fh=1_P$.

假定 (1) 和 (2) 成立, 定义 $f: R^n\to P, f(x_i)=p_i$, 从而有 R-模正合列 $0\to \mathrm{Ker}f\xrightarrow{g} R^n\xrightarrow{f} P\to 0$, 其中 $g: \mathrm{Ker}f\to R^n, g(x)=x$ 为嵌入同态, 所以有 $h: P\to R^n$ 使得 $fh=1_P$. 定义 $\varphi: P\oplus \mathrm{Ker}f\to R^n, \varphi(p,q)=h(p)+q$, 直接验证知 φ 既是单同态又是满同态, 从而 φ 为模同构, 故 P 为有限生成投射 R-模.

定理 1.1.11 (对偶基定理) 设 P 为 R-模, 则下列等价:

(1) P 为有限生成投射 R-模;

(2) 存在有限集 $\{p_i \mid i\in I\}\subseteq P$, $\{f_i: P\to R \mid i\in I\}$, 对任何 $p\in P$, 有 $p=\sum\limits_{i\in I}p_if_i(p)$, 这里 I 为指标集.

证 (1) $\Rightarrow$ (2) 设 $\varphi: R^n\cong P\oplus Q$. 令 $x_1=(1,0,\cdots,0),\cdots,x_n=(0,0,\cdots,1)$. 根据命题 1.1.10, 存在有限集 $\{p_1,\cdots,p_n\}\subseteq P$, 使得对任何 $p\in P$, 有 $\{r_1,\cdots,r_n\}\subseteq R$ 满足 $p=\sum\limits_{i=1}^{n}p_ir_i$. 令 $\phi: P\to P\oplus Q, \phi(p)=(p,0)$, $g_j: R^n\to R, g_j(x_i)=1(i=j), g_j(x_i)=0(i\neq j)$. 令 $f_j=g_j\varphi^{-1}\phi: P\to R$. 直接验证知 $r_j=f_j(p)$, 故有 $p=\sum\limits_{i=1}^{n}p_if_i(p)$.

(2) $\Rightarrow$ (1) 给定 R-模正合列 $0\to A\xrightarrow{g} B\xrightarrow{f} P\to 0$, 对任何 $p_i\in P$, 有 $b_i\in B$ 使得 $f(b_i)=p_i$. 作同态 $h: P\to B, h(p)=\sum\limits_{i=1}^{n}b_if_i(p)$, 则有 $fh=1_P$, 根据命题 1.1.10, P 为有限生成投射 R-模.

设 A,B 为 R-模, 所有 B 到 A 的 R-模同态全体记为 $\mathrm{Hom}_R(B,A)$; 定义运算: $(f+g)(m)=f(m)+g(m)$, 取 $0: M\to M, m\mapsto 0$ 为零元, 则 $\mathrm{Hom}_R(B,A)$ 是 Abel 群. 进一步, $\mathrm{Hom}_R(B,A)$ 是 R-模. 设 P 为有限生成投射 R-模, 对任何

R-模正合列 $0 \to A \xrightarrow{g} B \xrightarrow{f} C \to 0$, 容易验证有 R-模正合列 $0 \to \mathrm{Hom}_R(P,A) \xrightarrow{g_*} \mathrm{Hom}_R(P,B) \xrightarrow{f_*} \mathrm{Hom}_R(P,C) \to 0$, 这里 $g_*(h) = gh, f_*(k) = fk$. 假定 $aA + bB = A$, $a \in \mathrm{Hom}_R(A,A)$ 及 $b \in \mathrm{Hom}_R(B,A)$, 记 A 的子模$\{r \in A \mid a(r) \in bB\}$ 为 $A_{(a,b)}$.

引理 1.1.12　设 A, B 为 R-模, 若对任何 $a \in \mathrm{Hom}_R(A,A), b \in \mathrm{Hom}_R(B,A)$, $aA + bB = A \Rightarrow$ 存在 R-模同态 $\tau : A_{(a,b)} \to B$ 使得 $a\,|_{A_{(a,b)}} + b\tau : A_{(a,b)} \to bB$ 为同构, 则对任何 R-模 C,

$$A \oplus B \cong A \oplus C \Longrightarrow B \cong C.$$

证　假若 $A \oplus B \cong A \oplus C$, 则有正合列

$$0 \to C \xhookrightarrow{i} A \oplus B \xrightarrow{\varphi} A \to 0,$$

其中 $\varphi = (a,b), a \in \mathrm{Hom}_R(A,A)$ 且 $b \in \mathrm{Hom}_R(B,A)$, 进一步可构造模同态 $\theta = \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} : A \to A \oplus B$ 使得 $\varphi\theta = 1_A$, 其中 $c \in \mathrm{Hom}_R(A,A), d \in \mathrm{Hom}_R(A,B)$. 因而 $ac + bd = 1_A$, 故 $aA + bB = A$. 由假定, 有模同态 $\tau : A_{(a,b)} \to B$, 使得 $u := a\,|_{A_{(a,b)}} + b\tau : A_{(a,b)} \to bB$ 是同构. 令 $M = A_{(a,b)} \oplus B$, 构造 R-同态 $\psi = \begin{pmatrix} u^{-1} \\ \tau u^{-1} \end{pmatrix} : bB \to M$. 显然, $a\,|_{A_{(a,b)}} u^{-1} + b\tau u^{-1} = 1_{bB}$, 因而 $(\varphi\,|_M)\psi = 1_{bB}$, 故 $M = \mathrm{Ker}(\varphi\,|_M) \oplus \mathrm{Im}(\psi)$. 显然, $\mathrm{Ker}(\varphi\,|_M) \subseteq \mathrm{Ker}(\varphi)$. 如果 $(r_1, r_2) \in \mathrm{Ker}(\varphi)$, 从而 $a(r_1) + b(r_2) = 0, r_1 \in A, r_2 \in B$, 所以 $a(r_1) \in bB$, 故有 $r_1 \in A_{(a,b)}$, 进而 $(r_1, r_2) \in M$, 得 $(r_1, r_2) \in \mathrm{Ker}(\varphi\,|_M)$, 这导致 $\mathrm{Ker}(\varphi) = \mathrm{Ker}(\varphi\,|_M)$, 所以 $M = \mathrm{Ker}(\varphi) \oplus \mathrm{Im}(\psi)$. 另一方面, $\sigma\psi = 1_{bB}$, 这里 $\sigma = (u, 0) : M = A_{(a,b)} \oplus B \to bB$. 结果有 $M = \mathrm{Ker}(\sigma) \oplus \mathrm{Im}(\psi) = B \oplus \mathrm{Im}(\psi)$, 从而 $B \cong \mathrm{Ker}(\varphi) \cong C$, 所以结论成立.

交换环 R 称为**半遗传环**, 如果 R 的有限生成理想为投射 R-模. 如 $\mathbf{Z}[\sqrt{10}]$ 和 $\mathbf{Z}[\sqrt{-5}]$ 为半遗传环. 下面讨论半遗传环上有限生成 R-模的一类消去问题.

定理 1.1.13　设 R 为半遗传环, B, C 为有限生成 R-模, 则有

$$R \oplus B \cong R \oplus C \Longrightarrow B \cong C.$$

证　给定 $aR + bB = R, a \in R, b \in \mathrm{Hom}_R(B,R)$. 由假定知 $R_{(a,b)} = bB$ 是有限生成投射 R-模, 根据定理 1.1.11, 有 $\{x_i\} \subseteq R_{(a,b)}, f_i \in \mathrm{Hom}_R(R_{(a,b)}, R)$ 使得对任何 $x \in R_{(a,b)}$, $x = \sum\limits_i x_i f_i(x)$, 这里仅有有限多 $f_i(x)$ 非零. 令 $a^* : B \to B$ 由 $a^*(r) = ra, r \in B$ 定义, 由于 R 是交换的, a^* 是 R-模同态. 由 $aR + bB = R$ 知, $1 = ac + bd$, 其中 $c \in R, d \in B$, 因而 $x_i = ax_ic + bdx_i \in bB$, 所以存在 $p_i \in B$, 使得 $x_i = b(p_i)$, 故有 $x = \sum\limits_i b(p_i) f_i(x) = b\left(\sum\limits_i p_i f_i(x)\right)$. 定义 $h : R_{(a,b)} \to B, h(p) = \sum\limits_i p_i f_i(p)$.

易知, $1_{R_{(a,b)}} = bh$, 而且 $a\,|_{R_{(a,b)}} + b(1_B - a^*)h : R_{(a,b)} \to bB$ 是 R-模同态. 假如 $(a\,|_{R_{(a,b)}} + b(1_B - a^*)h)(p) = 0, p \in R_{(a,b)}$, 那么 $a(p) + b(1_B - a^*)h(p) = 0$, 更有 $p = 0$, 所以 $a\,|_{R_{(a,b)}} + b(1_B - a^*)h : R_{(a,b)} \to bB$ 是单同态. 任给 $bp \in bB$, 有 $bp \in R_{(a,b)}$. 进一步, $(a\,|_{R_{(a,b)}} + b(1_B - a^*)h)(bp) = bp$, i.e., $a\,|_{R_{(a,b)}} + b(1_B - a^*)h : R_{(a,b)} \to bB$ 是满同态, 由此可得 $a\,|_{R_{(a,b)}} + b(1_B - a^*)h : R_{(a,b)} \to bB$ 是 R-模同构. 再根据引理 1.1.12 即得.

交换环 R 称为**遗传环**, 如果 R 的理想都为投射 R-模. 显然半遗传环是遗传环. 设 R 为遗传环, B, C 为任意 R-模, 类似地, 有 $R \oplus B \cong R \oplus C \Longrightarrow B \cong C$.

模的张量积是模论和同调代数中的重要概念, 下面讨论张量积的概念和基本性质, 关于更多的经典结果, 读者可参考文献 [60], [170] 和 [182].

定义 1.1.14 设 M, N 为 R-模, $M \times N = \{(m,n) \mid m \in M, n \in N\}$, 以 $\{(m,n) \mid m \in M, n \in N\}$ 为基生成自由 Abel 群 $\Im$, 每个 (m,n) 对应 $\Im$ 的基中的元素记为 $<m,n>$; 令 $\Re$ 为 $\{<m_1+m_2,n> - <m_1,n> - <m_2,n>, <m,n_1+n_2> - <m,n_1> - <m,n_2>, <mr,n> - <m,rn> \mid m_1,m_2,m \in M, n_1,n_2,n \in N, r \in R\}$ 生成的子群, 称 $\Im/\Re$ 为 M 和 N 的张量积, 记为 $G = M \underset{R}{\otimes} N$.

记 $m \otimes n = \overline{<m,n>}$, 易知有

(1) $(m_1 + m_2) \otimes n = m_1 \otimes n + m_2 \otimes n$;

(2) $m \otimes (n_1 + n_1) = m \otimes n_1 + m \otimes n_2$;

(3) $(mr) \otimes n = m \otimes (rn)$.

进一步, 还有 $0 \otimes n = n \otimes 0 = 0$.

定义 1.1.15 设 M, N 为 R-模, G 为 Abel 群, 映射 $f : M \times N \to G$ 称为双线性平衡映射, 如果满足条件

(1) $f(m_1 + m_2, n) = f(m_1, n) + f(m_2, n)$;

(2) $f(m, n_1 + n_1) = f(m, n_1) + f(m, n_2)$;

(3) $f(mr, n) = f(m, rn)$,

其中 $m, m_1, m_2 \in M, n, n_1, n_2 \in N, r \in R$.

命题 1.1.16 (泛性定理) 设 M, N 为 R-模, $f : M \times N \to M \underset{R}{\otimes} N$, $f(m,n) = m \otimes n$. 则对任意 Abel 群 H, 任意双线性平衡映射 $g : M \times N \to H$, 存在唯一的群同态 $h : M \underset{R}{\otimes} N \to H$, 使得图 1.1 可交换, 即 $hf = g$.

证 由自由 Abel 群 $\Im$ 的泛性质知, 存在唯一的群同态 $\theta : \Im \to H$, 使得图 1.2 可交换.

这里 $f_1(m,n) = <m,n>$. 又由群同态定理知, 存在唯一的群同态 $h : M \times N \to H$, 使得图 1.3 可交换.

这里 $f_2(<m,n>) = m \otimes n$. 从而使得图 1.1 可交换. 进一步可证其唯一性.

$$\begin{tikzcd} M\times N \arrow[r, "f"] \arrow[d, "g"'] & M\underset{R}{\otimes}N \arrow[dl, dotted, "h"] \\ H & \end{tikzcd}$$

图 1.1

$$\begin{tikzcd} M\times N \arrow[r, "f_1"] \arrow[d, "g"'] & \Im \arrow[dl, dotted, "\theta"] \\ H & \end{tikzcd}$$

图 1.2

$$\begin{tikzcd} \Im \arrow[r, "f_2"] \arrow[d, "\theta"'] & M\underset{R}{\otimes}N \arrow[dl, dotted, "h"] \\ H & \end{tikzcd}$$

图 1.3

$$\begin{tikzcd} M\times N \arrow[r, "\theta"] \arrow[d, "f"'] & G \arrow[dl, dotted, "h"] \\ H & \end{tikzcd}$$

图 1.4

命题 1.1.17　设 M, N 为 R-模, G 为 Abel 群, $\theta: M\times N \to G$ 为双线性平衡映射. 如果对任意 Abel 群 H, 任意双线性平衡映射 $f: M\times N\to H$, 存在唯一的群同态 $h: G\to H$, 使得图 1.4 可交换, 即 $h\theta = f$. 则 $G\cong M\underset{R}{\otimes}N$.

证　取 $H = M\underset{R}{\otimes}N$, $f: M\times N\to M\underset{R}{\otimes}N, f(m,n) = m\otimes n$, 由假定知存在唯一的群同态 $h: G\to H$, 使得 $h\theta = f$, 又根据命题 1.1.16 知, 存在唯一的群同态 $k: H\to G$, 使得 $kf = \theta$. 从而 $(kh)\theta = \theta$ 和 $(hk)f = f$, 由唯一性即得 $kh = 1_G$ 和 $hk = 1_H$, 故 $G\cong M\underset{R}{\otimes}N$.

例 1.1.18　设 $\mathbf{Z}$ 为整数环, $\mathbf{Q}$ 为有理数域, 则 $\mathbf{Q}\underset{\mathbf{Z}}{\otimes}\mathbf{Z}/7\mathbf{Z} = 0$.

证　对于 $\dfrac{m}{n}\in\mathbf{Q}$, $r\in\mathbf{Z}/7\mathbf{Z}$, 有 $\dfrac{m}{n}\otimes r = \dfrac{m}{7n}\cdot 7\otimes r = \dfrac{m}{3n}\otimes 7r = 0$. 所以 $\mathbf{Q}\underset{\mathbf{Z}}{\otimes}\mathbf{Z}/7\mathbf{Z} = 0$.

例 1.1.19　设 M, N 为 R-模, 则 $M\underset{R}{\otimes}R\cong M$, $R\underset{R}{\otimes}N\cong N$.

证　令 $f: M\times R\to M\underset{R}{\otimes}R, f(m,r) = m\otimes r$. 作映射 $g: M\times R\to M, f(m,r) = mr$, 易知 f 为双线性平衡映射. 根据命题 1.1.16, 有唯一的群同态 $\varphi: M\underset{R}{\otimes}R\to M$, 使得 $\varphi f = g$. 显然 φ 是满的. 如果 $\varphi\left(\sum\limits_{i=1}^{n} m_i\otimes r_i\right) = 0$, 那么 $\sum\limits_{i=1}^{n} m_i r_i = 0$, 从而 $\sum\limits_{i=1}^{n} m_i\otimes r_i = \left(\sum\limits_{i=1}^{n} m_i r_i\right)\otimes 1_R = 0$, 即 φ 为单的群同态, 故 $\varphi: M\underset{R}{\otimes}R\cong M$. 类似有 $R\underset{R}{\otimes}N\cong N$.

需要指出的是, 上述张量积性质在非交换环上也成立.

命题 1.1.20　$R^{1\times n}\underset{M_n(R)}{\otimes}R^{n\times 1}\cong R$.

证　作映射

$$\varphi: R^{1\times n}\times R^{n\times 1}\to R,$$
$$\left((x_1,\cdots,x_n), \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}\right)\to \sum_{i=1}^{n} x_i y_i.$$

直接验证知 φ 为双线性平衡映射, 由张量积的泛性质可知, 存在唯一的群同态 h,

使得图 1.5 可交换.

$$\begin{tikzcd} R^{1\times n}\times R^{n\times 1} \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\varphi"'] & R^{1\times n}\underset{M_n(R)}{\otimes}R^{n\times 1} \arrow[dl, dotted, "h"] \\ R & \end{tikzcd}$$

图 1.5

显然对任何 $r\in R$, 有 $h((r,\ \ 0,\ \ \cdots,\ \ 0)\otimes\begin{pmatrix}1\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix})=r$, 所以 h 为满同态.

假设 $h(\sum\limits_{i=1}^{m}(x_{1i},\ \ \cdots,\ \ x_{ni})\otimes\begin{pmatrix}y_{1i}\\\vdots\\y_{ni}\end{pmatrix})=0$, 则有 $\sum\limits_{i=1}^{m}\sum\limits_{j=1}^{n}x_{ji}y_{ji}=0$, 从而

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{m}(x_{1i},\cdots,x_{ni})\otimes\begin{pmatrix}y_{1i}\\\vdots\\y_{ni}\end{pmatrix}&=\sum_{i=1}^{m}(1,0,\cdots,0)\begin{pmatrix}x_{1i}&\cdots&x_{ni}\\0&\cdots&0\\\vdots&&\vdots\\0&\cdots&0\end{pmatrix}\otimes\begin{pmatrix}y_{1i}\\\vdots\\y_{ni}\end{pmatrix}\\&=\sum_{i=1}^{m}(1,0,\cdots,0)\otimes\begin{pmatrix}\sum\limits_{j=1}^{n}x_{ji}y_{ji}\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix}\\&=(1,0,\cdots,0)\otimes\begin{pmatrix}\sum\limits_{i=1}^{m}\sum\limits_{j=1}^{n}x_{ji}y_{ji}\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix}\\&=0,\end{aligned}$$

即 φ 为单同态, 从而有 $R^{1\times n}\underset{M_n(R)}{\otimes}R^{n\times 1}\cong R$.

容易知道, 模的张量积也可以按自然方式定义成一个模. 假定 M 为 R-模和 S-模, 而且对任何 $r\in R,m\in M,s\in S$, $(rm)s=r(ms)$, 则称 M 为 R-S-双模. 有下

述经典结果.

定理 1.1.21　设 A 为 R-模, B 为 R-S-双模, C 为 S-模, 则有群同构

$$A \underset{R}{\otimes} (B \underset{S}{\otimes} C) \cong (A \underset{R}{\otimes} B) \underset{S}{\otimes} C.$$

证　对任何 $a \in A$, 构造双线性平衡映射

$$\begin{aligned} \varphi_a : B \times C &\to (A \underset{R}{\otimes} B) \underset{S}{\otimes} C, \\ (b, c) &\mapsto (a \otimes b) \otimes c. \end{aligned}$$

从而由张量积的泛性质知, 有

$$\begin{aligned} \phi_a : B \otimes C &\to (A \otimes B) \otimes C, \\ b \otimes c &\mapsto (a \otimes b) \otimes c. \end{aligned}$$

再构造双线性平衡映射

$$\begin{aligned} \theta : A \times (B \otimes C) &\mapsto (A \otimes B) \otimes C, \\ (a, b \otimes c) &\mapsto \phi_a(b \otimes c). \end{aligned}$$

从而由张量积的泛性质知, 存在群同态 π 使图 1.6 可交换, 即有 $\pi(a \otimes (b \otimes c)) = (a \otimes b) \otimes c$. 完全类似地, 有 $\sigma : (A \otimes B) \otimes C \to A \otimes (B \otimes C)$ 使得 $\sigma((a \otimes b) \otimes c) = a \otimes (b \otimes c)$. 直接验证知 $\pi\sigma = 1, \sigma\pi = 1$, 故有群同构 $A \underset{R}{\otimes} (B \underset{S}{\otimes} C) \overset{\pi}{\cong} (A \underset{R}{\otimes} B) \underset{S}{\otimes} C$.

$$\begin{tikzcd} A \times (B \otimes C) \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\theta"'] & A \otimes (B \otimes C) \arrow[dl, "\pi"'] \\ (A \otimes B) \otimes C & \end{tikzcd}$$

图 1.6

引理 1.1.22　设 M, M_1, M_2 为 R-模, 则 $M \cong M_1 \oplus M_2$ 当且仅当存在 $p_i : M \to M_i, q_i : M_i \to M (i = 1, 2)$, 使得

$$p_i q_i = 1, \quad p_i q_j = 0 \ (i \neq j),$$
$$q_1 p_1 + q_2 p_2 = 1.$$

证　$\Rightarrow$ 不失一般性, 假定 $M = M_1 \oplus M_2$, 令 $p_i : M \to M_i, x_1 + x_2 \mapsto x_i; q_i : M_i \to M, x \mapsto x$ 分别为投影映射和嵌入映射, 则它们都是 R-模同态, 易证有 $p_i q_i = 1, p_i q_j = 0 (i \neq j); q_1 p_1 + q_2 p_2 = 1$.