普通高等教育"十二五"重点规划教材　计算机系列

离散数学

杨圣洪　张英杰　陈义明　编著

科学出版社

普通高等教育“十二五”重点规划教材·计算机系列

离散数学

杨圣洪　张英杰　陈义明　编著

科学出版社

北京

内 容 简 介

本书结合作者多年的教学经验，并参考了国内外多种同类教材，采用接近学生思维习惯的平实语言编写而成。全书共分5章，内容包括命题逻辑、谓词逻辑、集合与关系、代数系统和图论。各章相对独立又互有联系，证明力求平实，定理、例题、习题、实验题互相呼应，深入浅出。为了方便教学，本书配有多媒体课件。

本书既可作为高等院校计算机科学与技术、软件工程、电子商务及相关专业的教材，也可作为相关专业人员自学与参考用书。

图书在版编目（CIP）数据

离散数学/杨圣洪，张英杰，陈义明编著. —北京：科学出版社，2011
普通高等教育“十二五”重点规划教材·计算机系列

ISBN 978-7-03-030400-1

Ⅰ. ①离… Ⅱ. ①杨… ②张… ③陈… Ⅲ. ①离散数学-高等学校-教材 Ⅳ. ①O158

中国版本图书馆CIP数据核字（2011）第031408号

责任编辑：赵丽欣 文 戈／责任校对：刘玉靖
责任印制：吕春珉／封面设计：子时文化

科学出版社 出版
北京东黄城根北街16号
邮政编码:100717
http://www.sciencep.com
双青印刷厂 印刷
科学出版社发行 各地新华书店经销
*
2011年3月第 一 版 开本：787×1092 1/16
2011年3月第一次印刷 印张：9 3/4
印数：1—3 000 字数：219 000

定价：21.00元

（如有印装质量问题，我社负责调换〈双青〉）
销售部电话 010-62142126 编辑部电话 010-62134021

前　言

离散数学是随着计算机科学技术发展和应用的日趋广泛而建立起来的一个数学分支，它为计算机科学和计算机工程应用提供了有力的理论工具。同时，它也是培养学生缜密的逻辑思维、抽象思维和创新能力的核心课程之一。然而，作者根据多年的教学经验，发现目前已有的《离散数学》教材存在以下问题：

1. 内容太全。有些教材过于关注内容的全面性，而没有考虑到不同层次学生的实际情况，从而导致在64个课时内不能讲完所有内容。

2. 内容重复。函数、集合论在高中数学、高等数学中已讲，组合数学、形式语言、最优化会有专门的课程讲。

3. 语言过于精干。离散数学中很多东西不直观，不好理解，写得过于精干，省略内容较多，学生根本没法自学，尤其离散数学是在一年级下学期或二年级上学期开讲，学生根本不适应这种模式，如自然推理系统，它本来与初中、高中推理是一脉相承的，在离散数学中却故意切断。

4. 有些内容用词不妥，证明不流畅。如一阶逻辑几乎没有哪一本书能将“全称指定UI、全称推广UG、存在指定EI、存在推广EG”讲明白、讲透彻，写得稀里糊涂、不知所云，学生学得云里雾里。

5. 互动环节不够。有教材有网站，但只是单向提供下载，没有实时交流。

本书力求完美，主要有如下特点：

1. 便于老师组织教学，便于学生自学。用耳熟能详的平实语言，采用其他课程、平常生活中能感受到的例子，承上启下，前后呼应（如图论中的图与关系图、传递闭包与图的连通性等），沿袭初中、高中的思维习惯，每章前面都有历史简介，让学生可以感受到知识的魅力。

2. 全书风格统一，行文流畅，一气呵成。认真规划章节知识点，力争讲透每个知识点，循循善诱，引人入胜。

3. 内容实用，取舍恰当。遵循教指委与实施方案的内容，根据学生特点、64课时的要求，对内容进行恰当取舍，将原来学过、将来会讲、根本用不上的内容剔除。

4. 习题设计少而精。主要作用是巩固课堂所学，为后续章节做好准备。

5. 设计编程实践环节，解决人工不愿完成的问题。用自然语言将设计思路、关键代码、运行界面、运行结果给出来，编程内容有真值表的生成、约束变元的确定、关系运算、关系闭包、等价类、结合律、分配律、单位元、逆元、同构、最小生成树、Huffman树。

6. 交流电子教案。作者将建立一个完整的资源网站，这个网站是开放的，可以抛砖引玉地提供多年来积累的电子教案，更希望选用本书作为教材的老师奉献出自己的教案，以为后来者提供一个很好的平台，将资源网站变成一个社区。

7. 智能答疑。现在学生与老师的交流并不多，平常提问的不多，互联网是一个打破心理障碍、不需要任何心理准备就可以获取知识的地方，因此要充分利用互联网。作者已建立一个具有一定智能的答疑系统，可以针对教材的知识体系将学生的提问与老师的解答进行归纳，汇集到相应的知识点中，这样后来的提问者提问时系统会根据其提问自动搜索相关答案；如果学生查不到，可以将其放入新问题，任何一个登录的老师都可以回答；最后管理老师会对每个新问题或新解答进行确认与处理。这样日积月累，将形成一个完整的系统。

本书是集体努力的结果，湖南大学李仁发教授（时任计算机与通信学院院长，现湖南大学教务处长）是本书的审稿人，从本书的策划、写作思路、大纲、风格、行文等方面都提出了中肯的指导意见；湖南大学信息科学与工程学院杨圣洪，设计了本书的整体风格，编写了第1～3章；湖南大学信息科学与工程学院的张英杰编写了第4章与全书所有的程序；湖南农业大学陈义明编写了第5章。写作本书的星星之火，是湖南大学信息科学与工程学院的廖波教授点燃的，他最先鼓励并督促作者编写教材，在此对他表示衷心感谢；同时还需感谢多年来一直帮助作者的刘晓华、卢新国、曹智等老师。

本书尽管酝酿良久，但真正付诸笔端只有较短的时间，书中难免有差错与不当之处，恳请广大读者批评指正。

目　　录

前言
第 1 章　命题逻辑 …… 1
1.1　命题及联结词 …… 1
1.1.1　命题 …… 1
1.1.2　联结词 …… 2
1.2　命题公式及其赋值 …… 4
1.3　等值式 …… 7
1.4　析取范式与合取范式 …… 10
1.5　实验 …… 20
1.6　推理理论 …… 28
1.7　消解法 …… 35
第 2 章　谓词逻辑 …… 37
2.1　基本概念 …… 37
2.2　谓词公式及其解释 …… 40
2.2.1　合法的谓词公式 …… 40
2.2.2　个体变元的身份 …… 41
2.2.3　谓词公式的真值 …… 43
2.2.4　谓词公式的类型 …… 46
2.3　谓词公式等值演算 …… 48
2.4　谓词公式的范式 …… 51
2.5　谓词推理 …… 54
第 3 章　集合与关系 …… 59
3.1　基本概念 …… 59
3.2　集合运算与性质 …… 60
3.3　有穷集的计数 …… 61
3.4　序偶 …… 63
3.5　直积或笛卡儿积 …… 64
3.6　关系 …… 64
3.7　关系的复合 …… 67
3.8　关系分类 …… 68
3.9　关系的闭包 …… 72
3.10　等价关系与集合的划分 …… 76
3.11　偏序关系 …… 79

3.12 实验 …… 82
第4章 代数系统 …… 90
4.1 什么是代数运算 …… 91
4.2 运算的定义 …… 92
4.3 运算的性质 …… 92
4.4 代数系统 …… 95
4.5 实验 …… 98
4.6 半群 …… 103
4.7 群 …… 105
4.8 子群 …… 110
4.9 群的陪集分解 …… 113
4.10 循环群 …… 118
4.11 置换群 …… 119
4.12 环、域 …… 120
第5章 图论 …… 122
5.1 图的概念与描述 …… 123
5.2 图的连通性 …… 126
5.3 欧拉图 …… 129
5.4 哈密尔顿图 …… 130
5.5 平面图与四色猜想 …… 132
5.6 树与生成树 …… 135
5.7 最短路径 …… 139
5.8 网络流图 …… 142
5.9 实验 …… 146
参考文献 …… 148

第1章　命题逻辑

逻辑(logic)一词源于希腊文 logoc,有“思维”和“表达思考的言辞”之意。数理逻辑是用数学方法来研究推理规律的科学,它采用符号的方法来描述和处理思维形式、思维过程和思维规律。进一步来说,数理逻辑就是研究推理中前提和结论之间的形式关系,这种形式关系是由作为前提和结论的命题的逻辑形式决定的,因此,数理逻辑又称为形式逻辑或符号逻辑。

最早提出用数学方法来描述和处理逻辑问题的是德国数学家莱布尼茨(G. W. Leibnitz),但直到1847年英国数学家乔治·布尔(George Boole)发表“逻辑的数学分析”后才有所发展。1879年德国数学家弗雷格(G. Frege)在《表意符号》一书中建立了第一个比较严格的逻辑演算系统,英国逻辑学家怀特海(A. N. Witehead)和罗素(B. Russell)合著的《数学原理》一书,对当时数理逻辑的成果进行了总结,使得数理逻辑形成了专门的学科。

1938年,克劳德·艾尔伍德·香农(Claude Elwood Shannon)发表了著名论文《继电器和开关电路的符号分析》,首次用布尔代数对开关电路进行了相关的分析,并证明了可以通过继电器电路来实现布尔代数的逻辑运算,同时明确地给出了实现加、减、乘、除等运算的电子电路的设计方法。这篇论文成为开关电路理论的开端。其后,数理逻辑开始应用于所有开关线路的理论中,并在计算机科学等方面获得应用,成为计算机科学的基础理论之一,它在程序设计、数字电路设计、计算机原理、人工智能等计算机课程中得到了广泛应用。

命题逻辑是数理逻辑的基础部分,但究竟什么是命题?如何表示命题?如何构造出复杂的命题?本章将详细讨论这些问题。

1.1　命题及联结词

1.1.1　命题

对错明确的陈述语句称为**命题**,例如:

(1) 湖南大学是一所学校。

(2) 命题逻辑是计算机科学的基础课程。

(3) 命题及联结词是命题逻辑最基础的内容。

(4) 4是素数。

(5) 湖南大学坐落于湘江以东。

(6) 2015年湖南长沙轻轨通车。

(7) x与y之和为100,其中x为整数,y为整数。

(8) 1加1等于10。

(9) 岳麓山的红叶真美呀!

(10) 动作快点!

(11) 你是离散数学老师吗?

(12) 我在说假话。

(13) 我既要学程序设计,又要学离散数学。

(14) 我们早餐在公寓食堂或外面早点摊上吃。

(15) 我不是数学院的学生。

其中(1)、(2)、(3)所陈述的内容与事实相符,是对的、正确的,称为**真命题**,或者称命题的值为"真",简记为T或数字1。

而(4)、(5)明显与事实不相符,是错的、不正确的,称为**假命题**,或称命题的值为"假",简记为F或数字0。

因为现在是2011年,陈述句(6)的正确性,要到2015年12月才能确定,如果届时轻轨开通了,则它是对的、正确的,为真命题,取值为真(T/1),届时没有通车则是错误的,为假命题。

陈述语句(7)的对错是不确定的。当x为50、y为50时是对的,当x为51、y为52时是错的。陈述句(8)的对错是不确定的,当是二进制的数字时是正确的,当为八进制、十进制时是错的,因此这两个陈述句不是命题。

(9)、(10)、(11)三个语句不是陈述语句,因此不是命题。

(12)是一个悖论,其真值不能确定,故不是命题。

(13)、(14)、(15)三个陈述句都与事实相符,是对的,是真命题,其值为真(T/1),这三条语句比前面介绍的语句要复杂一些,其中(13)与(14)可分解为另外两句话的组合,而(15)是对"我是数学院学生"的否定,这些语句称为"复合命题",不能再分解的语句称为"简单命题"或"原子命题",为了便于推理与书写,常用小写字母表示简单命题或原子命题。

1.1.2 联结词

简单命题组合成复杂命题时所使用的辅助词称为**联结词**。命题逻辑中的联结词归纳为以下五种。

【定义1.1.1】 **合取**:设p表示某个原子命题,q表示另一个原子命题,当p、q都对,即取值为真(T/1)时,"p合取q"的值为真,当p、q有一个不对,即有一个取值为假(F/0)时,"p合取q"的值为假,当p、q都不对,即两个取值都为假(F/0)时,"p合取q"的值为假。

这个定义不直观,常用真值表来表示,如表1.1.1所示。

合取可以用电路实现,如图1.1.1所示。

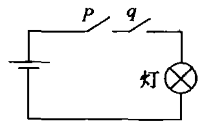
因此,"我既要学程序设计,又要学离散数学",可记为"我要学程序设计"∧"我要学

表 1.1.1

p	q	$p\wedge q$	p	q	$p\wedge q$
0	0	0	1	0	0
0	1	0	1	1	1

离散数学”。

逻辑运算符“合取”与汉语中的“并且”、“而且”、“同时”含义相当。



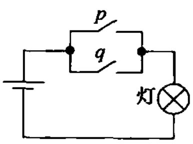
p	q	灯($P\wedge q$)
通	通	亮
通	断	灭
断	通	灭
断	断	灭

图 1.1.1

【定义 1.1.2】 **析取**：设 p 表示某个原子命题，q 表示另一个原子命题，当 p、q 都对，即取值为真(T/1)时，“p 析取 q”的值为真，当 p、q 有一个不对，即有一个取值为假(F/0)时，“p 析取 q”的值为真，当 p、q 都不对，即两个取值都为假(F/0)时，“p 析取 q”的值为假，其真值表如表 1.1.2所示。

表 1.1.2

p	q	$p\vee q$	p	q	$p\vee q$
0	0	0	1	0	1
0	1	1	1	1	1



p	q	灯($P\wedge q$)
通	通	亮
通	断	亮
断	通	亮
断	断	灭

图 1.1.2

析取可以用电路实现，如图 1.1.2 所示。

因此，“我们早餐在公寓食堂或外面早点摊上吃”，可记为“我们早餐在公寓食堂吃”∨“我们早餐在外面早点摊上吃”。

逻辑运算符“析取”与汉语中的“或”几乎一致，但也有细微的区别，举例说明如下：

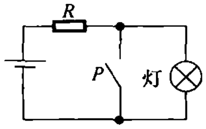
(1)“讲离散数学的老师是杨老师或刘老师”，可以表示为“讲离散数学的老师是杨老师”∨“讲离散数学的老师是刘老师”，这两个原子命题有可能都是对的，这种“或”称为“可同时为真的或”，或简称为“可兼或”。

(2)“离散数学的上课教室是 102 室或 302 室”，不可以表示为“离散数学的上课教室是 102 室”∨“离散数学的上课教室是 302 室”，因为这两个原子命题不可能都对，只能是这两种情况之一，这种“或”称为“不可同时为真的或”，或简称为“不可兼或”、“排斥或”，这种“或”表示不能简单表示为“析取”，需要联合使用下面将要介绍的“否定”与“析取”符号，才能准确表达。

【定义 1.1.3】 **否定**：当某个命题为真时，其否定为假，当某个命题为假时，其否定为真，其真值表如表 1.1.3 所示。

表 1.1.3

p	$\neg p$	p	$\neg p$
0	1	1	0



P	灯($\neg P$)
通	灭
断	亮

图 1.1.3

否定可以用电路实现，如图 1.1.3 所示。

“我不是数学院的学生”可以表示为“¬ 我是数学院的学生”。

【定义 1.1.4】 条件联结词：表示“如果……那么……”形式的语句，其真值表如表 1.1.4 所示。

例如，“如果我明年赚 10 万，我就买一部小车”，可以表示为“我明年赚 10 万→我买一部小车”，其中“我明年赚 10 万”是前件，“我买一部小车”是后件。

【定义 1.1.5】 双条件联结词：表示“当且仅当”形式的语句，其真值表如表 1.1.5 所示。

表 1.1.4

p	q	$p\to q$
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

表 1.1.5

p	q	$p\leftrightarrow q$
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	1

例如，“我明年赚 10 万当且仅当我买彩票中了大奖”，可以表示为“我明年赚 10 万↔我买彩票中了大奖”。

1.2 命题公式及其赋值

对错明确的陈述语句称为命题，其真值是确定的，又称为命题常元或命题常项，相当于初等数学中的“常数”。

初等数学中用变量 x 表示某些数，如 x^2+x+10 是代数式，则在命题逻辑也可用变量表示任意一个命题，但是采用的字母为小写 p、q、r，称为命题变元。

在初等数学中出现的运算符号为加（+）、减（−）、乘（×）、除（÷）、幂（↑），在命题逻辑可使用前面介绍的合取（∧）、析取（∨）、否定（¬）、条件（→）、双条件（↔）构成命题表达式，简称为“命题公式”，命题表达式的构成不是任意的，除了只能出现以上联结词外，还需要按照一定的规则去生成，满足这些规则的公式称为“合式公式”，也称为“命题公式”，简称“公式”。

【定义 1.2.1】 合式公式：

（1）单个命题变元、命题常元为合式公式，称为原子公式。

（2）若某个字符串 A 是合式公式，则 $\neg A$、(A) 也是合式公式。

（3）若 A、B 是合式公式，则 $A\wedge B$、$A\vee B$、$A\to B$、$A\leftrightarrow B$ 也是合式公式。

（4）有限次使用（2）、（3）形成的字符串均为合式公式。

如 $(p\vee 1)\to q$ 是合式公式。因为 p、1 是合式公式，则 $(p\vee 1)$ 是合式公式，又因为 r 是合式公式，故 $(p\vee 1)\to q$ 是合式公式。

$(p\vee 1)r\rightarrow$不是合式公式。因为p、1是合式公式，则$(p\vee 1)$是合式公式，尽管r是合式公式，但由于联结词→的位置不当，故$(p\vee 1)r\rightarrow$不是合式公式。

对于代数式x^2+y+10，当x与y的值不确定时，该代数式的值是不确定的，同样对于公式$(p\vee 1)\rightarrow q$，由于p与q值不确定时，公式$(p\vee 1)\rightarrow q$的值不确定，因而不是命题，只有当p与q的值确定后，公式$(p\vee 1)\rightarrow q$的值才能确定，我们可以像表1.1.1～表1.1.5一样，给出公式在各种情况下的取值，即得到这个公式的真值表，如表1.2.1所示。

表1.2.1

p	q	$(p\vee 1)\rightarrow q$	p	q	$(p\vee 1)\rightarrow q$
0	0	0	1	0	0
0	1	1	1	1	1

p与q每一种取值称为p、q的一种解释，如(0,0)，(1,1)就是p、q的一种解释或指派。

【例题1.2.1】 构造公式$(\neg p\vee q)$、$p\rightarrow q$的真值表。

解：该公式的真值表如表1.2.2所示。

表1.2.2

p	q	$\neg p$	$\neg p\vee q$	$p\rightarrow q$
0	0	1	1	1
0	1	1	1	1
1	0	0	0	0
1	1	0	1	1

由表1.2.2可知，无论(p,q)取何值，公式$\neg p\vee q$与$p\rightarrow q$的值总是相等。

参考本例，可以得到构造真值表的基本步骤：

(1) 命题变元的取值从全0开始，依次加1，直到全1，当有n个变元时，则共有2^n种不同的取值情况。

(2) 分步骤计算命题公式的值。

【例题1.2.2】 构造公式$(p\rightarrow q)\wedge(q\rightarrow p)$及$p\leftrightarrow q$的真值表。

解：该公式的真值表如表1.2.3所示。

表1.2.3

p	q	$p\rightarrow q$	$q\rightarrow p$	$(p\rightarrow q)\wedge(q\rightarrow p)$	$p\leftrightarrow q$
0	0	1	1	1	1
0	1	1	0	0	0
1	0	0	1	0	0
1	1	1	1	1	1

由表1.2.3可以发现，无论(p,q)取何值，公式$(p\rightarrow q)\wedge(q\rightarrow p)$与$p\leftrightarrow q$的值总是相等。

【例题 1.2.3】 构造公式$\neg(p\wedge q)$与$\neg p\vee\neg q$的真值表。

解:该公式的真值表如表 1.2.4 所示。

表 1.2.4

p	q	$p\wedge q$	$\neg(p\wedge q)$	$\neg p$	$\neg q$	$\neg p\vee\neg q$
0	0	0	1	1	1	1
0	1	0	1	1	0	1
1	0	0	1	0	1	1
1	1	1	0	0	0	0

由表 1.2.4 可以发现,无论(p,q)取何值,公式$\neg(p\wedge q)$与$\neg p\vee\neg q$的值总是相等。

【例题 1.2.4】 构造$p\rightarrow q$与$\neg q\rightarrow\neg p$的真值表。

解:该公式的真值表如表 1.2.5 所示。

表 1.2.5

p	q	$p\rightarrow q$	$\neg q$	$\neg p$	$\neg q\rightarrow\neg p$
0	0	1	1	1	1
0	1	1	0	1	1
1	0	0	1	0	0
1	1	1	0	0	1

由表 1.2.5 发现,无论(p,q)取何值,公式$p\rightarrow q$与$\neg q\rightarrow\neg p$的值总是相等,原命题与逆否命题等值。

【例题 1.2.5】 构造公式$p\wedge(q\vee r)$、$(p\wedge q)\vee(p\wedge r)$的真值表。

解:该公式的真值表如表 1.2.6 所示。

表 1.2.6

p	q	r	$p\wedge(q\vee r)$			$(p\wedge q)\vee(p\wedge r)$		
0	0	0	0	$\boxed{0}$	0	0	$\boxed{0}$	0
0	0	1	0	$\boxed{0}$	1	0	$\boxed{0}$	0
0	1	0	0	$\boxed{0}$	1	0	$\boxed{0}$	0
0	1	1	0	$\boxed{0}$	1	0	$\boxed{0}$	0
1	0	0	1	$\boxed{0}$	0	0	$\boxed{0}$	0
1	0	1	1	$\boxed{1}$	1	0	$\boxed{1}$	1
1	1	0	1	$\boxed{1}$	1	1	$\boxed{1}$	0
1	1	1	1	$\boxed{1}$	1	1	$\boxed{1}$	1

由表 1.2.6 发现,无论(p,q)取何值,公式$p\wedge(q\vee r)$与$(p\wedge q)\vee(p\wedge r)$的值总是相等。此例构造真值表的方法与前述稍有不同,不是依次给出每个部分的值,而是将整个公式写在真值表中,各个分部的值直接写在运算符号或分部的下方,这样更直观,更不容易出错。

习 题

1. 构造公式$(p\wedge q)\vee(\neg p\wedge\neg q)$、$p\leftrightarrow q$的真值表。
2. 构造公式$\neg(p\vee q)$与$\neg p\wedge\neg q$的真值表。
3. 构造公式p、$p\wedge p$、$p\vee p$的真值表。
4. 构造公式$p\vee(p\wedge r)$、$(p\vee q)\wedge(p\vee r)$的真值表。
5. 构造公式$p\vee(p\wedge r)$、p的真值表。
6. 构造公式$p\vee(p\wedge r)$、p的真值表。
7. 构造公式$p\leftrightarrow q$、$\neg q\leftrightarrow\neg p$的真值表。
8. 构造公式$(p\rightarrow q)\wedge(p\rightarrow\neg q)$、$\neg p$的真值表。
9. 构造公式p、$\neg\neg p$的真值表。
10. 构造公式$p\vee\neg p$、$p\wedge\neg p$的真值表。

1.3 等 值 式

由前一节中例题与习题可知，两个公式形式上不同，但是无论命题变元取何值，它们的值总是相等，称一个公式是另一个公式的**等值式**。

【定义1.3.1】 设A、B是两个合法的命题公式，无论其中的命题变元取何值，这两个公式的值总相等，称**两个公式等值**，记为$A\Leftrightarrow B$。

如由运算符号的定义、前一节各个例题、习题可知，有如下等值式：

(1) $p\rightarrow q\Leftrightarrow\neg p\vee q\Leftrightarrow\neg q\rightarrow\neg p$	条件式的等值式、原命题$\Leftrightarrow$逆否命题
(2) $p\leftrightarrow q\Leftrightarrow(p\rightarrow q)\wedge(q\rightarrow p)\Leftrightarrow(p\wedge q)\vee(\neg p\wedge\neg q)$	双条件的等值式
(3) $p\Leftrightarrow\neg\neg p$	双重否定律
(4) $p\Leftrightarrow p\wedge p\Leftrightarrow p\vee p$	幂等律
(5) $p\vee q\Leftrightarrow q\vee p$，$p\wedge q\Leftrightarrow q\wedge p$	交换律
(6) $p\vee(q\vee r)\Leftrightarrow(p\vee q)\vee r$ $p\wedge(q\wedge r)\Leftrightarrow(p\wedge q)\wedge r$	结合律
(7) $p\vee(q\wedge r)\Leftrightarrow(p\vee q)\wedge(p\vee r)$ $p\wedge(q\vee r)\Leftrightarrow(p\wedge q)\vee(p\wedge r)$	分配律
(8) $p\vee(p\wedge r)\Leftrightarrow p$ $p\wedge(p\vee r)\Leftrightarrow p$	吸收律(多吃少)
(9) $\neg(p\wedge q)\Leftrightarrow\neg p\vee\neg q$ $\neg(p\vee q)\Leftrightarrow\neg p\wedge\neg q$	德摩根律

注意 符号“$\Leftrightarrow$”不是一个联结词，它表明两个公式的值相等。符号“$\leftrightarrow$”是联结词，表示“当且仅当”、“充分必要”。

将以上公式中命题变元 p、q、r 换成公式 A、B、C,这些等值仍然成立,如 $A \to B \Leftrightarrow \neg A \vee B$,原因是无论公式 A、B 的形式如何,其值只有 0 或 1 两种情况,因此仍然可用真值表来证明,如表 1.3.1 所示。

表 1.3.1

A	B	$\neg A$	$\neg A \vee B$	$A \to B$
0	0	1	1	1
0	1	1	1	1
1	0	0	0	0
1	1	0	1	1

类似可证,上述所有等值式中的命题变元扩充为公式后,仍然等值。这与初中代数是一致的,大家知道 $(a+b)(a-b)=a^2-b^2$,当将 a 换成表达式 $(3x^2+2x)$,b 换成表达式 $(2y+3x)$ 后,等式 $((3x^2+2x)+(2y+3x))((3x^2+2x)-(2y+3x))=(3x^2+2x)^2-(2y+3x)^2$ 仍然成立。

只要是这种模式就成立,利用这些等式可对公式进行恒等变换。

【定理 1.3.1】　置换规则:当将公式 A 中的 B 换成 C 得到公式 D 后,若 $B \Leftrightarrow C$,那么 $A \Leftrightarrow D$。

因为 A、D 除了"A 中 B 所在之处、D 中 C 所在之处"外,其他地方均相同,而不同之处的 B 与 C 等值,所以公式 A、公式 D 的真值表应该完全相同,故 $A \Leftrightarrow D$。

当将一个公式的局部进行等值替换后,仍与原公式等值,这也是代数等数学分支中最常见的方法,不断对局部进行等值替换的操作,称为"等值演算"。

前述九类等值式,既可以将左边换成右边,也可以将右边换成左边。

【例题 1.3.1】　利用等值演算,证明 $(p \vee q) \to r \Leftrightarrow (p \to r) \wedge (q \to r)$。

解:因为否定、析取、合取运算,其实是计算机语言中的"否定"、"或"、"与",我们比较熟悉,而条件式、双条件式不太熟悉,所以一般在离散数学中,先将条件式与双条件式转换为仅由否定、析取与合取所构成的等值式。

$(p \vee q) \to r$	
$\Leftrightarrow \neg (p \vee q) \vee r$	将 $(p \vee q)$ 看成公式 A,则原式为 $A \to r$,然后使用条件的等值式便得到
$\Leftrightarrow (\neg p \wedge \neg q) \vee r$	利用德摩根律,将公式中子公式"$\neg (p \vee q)$"换成与之等值的公式
$\Leftrightarrow r \vee (\neg p \wedge \neg q)$	交换律
$\Leftrightarrow (r \vee \neg p) \wedge (r \vee \neg q)$	分配律
$\Leftrightarrow (\neg p \vee r) \wedge (\neg q \vee r)$	交换律
$\Leftrightarrow (p \to r) \wedge (q \to r)$	条件式等值式

由于交换律很容易看明白,故交换演算将省略不写。

【例题 1.3.2】　利用等值演算,证明 $(p \vee q) \to r \Leftrightarrow (p \to r) \wedge (q \to r)$。

解: $(p \vee q) \to r$

$\Leftrightarrow \neg (p \vee q) \vee r$ 条件式的等值式

$\Leftrightarrow (\neg p \wedge \neg q) \vee r$ 德摩根律

$\Leftrightarrow (\neg p \vee r) \wedge (\neg q \vee r)$ 分配律

$\Leftrightarrow (p \to r) \wedge (q \to r)$ 条件式的等值式

【例题 1.3.3】 利用等值演算判断公式类型:$((p \to q) \wedge p) \to q$。

解:它与公式等值的证明过程一样,先要将我们不太熟悉的条件式、双条件式等值转换成否定、析取、合取等组成的公式,然后使用其他等值式进行演算。

$((p \to q) \wedge p) \to q$

$\Leftrightarrow ((\neg p \vee q) \wedge p) \to q$ 条件式的等值式

$\Leftrightarrow \neg ((\neg p \vee q) \wedge p) \vee q$ 条件式的等值式

$\Leftrightarrow (\neg (\neg p \vee q) \vee \neg p) \vee q$ 德摩根律

$\Leftrightarrow ((p \wedge \neg q) \vee \neg p) \vee q$ 德摩根律

$\Leftrightarrow (p \wedge \neg q) \vee (\neg p \vee q)$ 结合律

$\Leftrightarrow (p \wedge \neg q) \vee \neg (p \wedge \neg q)$ 逆用德摩根律,将否定提取到括号外

$\Leftrightarrow A \vee \neg A$ $A = (p \wedge \neg q)$

$\Leftrightarrow 1$ 析取的性质即析取定义真值表

所以无论命题变元 p,q 取何值,公式 $((p \to q) \wedge p) \to q$ 的值总是为“真”,总是为“1”,这种公式称为“永真式”或“重言式”。

【例题 1.3.4】 利用等值演算判断公式类型:$\neg (p \to (p \vee q)) \wedge r$。

解: $\neg (p \to (p \vee q)) \wedge r$

$\Leftrightarrow \neg (\neg p \vee (p \vee q)) \wedge r$ 条件式的等值式

$\Leftrightarrow \neg ((\neg p \vee p) \vee q) \wedge r$ 结合律

$\Leftrightarrow \neg (1 \vee q) \wedge r$ 析取的性质即析取定义真值表

$\Leftrightarrow \neg 1 \wedge r$ 析取的性质即析取定义真值表

$\Leftrightarrow 0 \wedge r$ 否定的定义

$\Leftrightarrow 0$ 合取的性质即合取定义真值表

所以无论命题变元 p、q、r 取何值,公式 $\neg (p \to (p \vee q)) \wedge r$ 的值总是为“假”,总是为“0”,这种公式称为“永假式”或“矛盾式”。

从以上各例可知,条件联结词“$\to$”可转换为“$\neg$”、“$\vee$”联结词,“$\leftrightarrow$”可转换为“$\neg$”、“$\vee$”、“$\wedge$”联结词,因此由“$\neg$”、“$\vee$”、“$\wedge$”、“$\to$”、“$\leftrightarrow$”表示的公式,可改由“$\neg$”、“$\vee$”、“$\wedge$”表示,同时根据德摩根律,$(p \wedge q) \Leftrightarrow \neg \neg (p \wedge q) \Leftrightarrow \neg (\neg p \vee \neg q)$,即合取运算符也可由“$\neg$”、“$\vee$”表示,因此由“$\neg$”、“$\vee$”、“$\wedge$”、“$\to$”、“$\leftrightarrow$”表示的公式,可改由“$\neg$”、“$\vee$”表示,由于“$\neg$”与“$\vee$”无法互相表示,因此要表示一个公式,至少需要联结词“$\neg$”、“$\vee$”,或者“$\neg$”、“$\wedge$”,称为“最少联结词”。

采用“$\neg$”、“$\vee$”、“$\wedge$”、“$\to$”、“$\leftrightarrow$”五个联结词,甚至更多的联结词,只是为了使公式看起来更简练,便于演算或记忆。

1.4　析取范式与合取范式

采用等值演算证明两个公式等值时,每一步可能存在多种选择,一旦选择错了可能无法证明两个公式等值,能否找到一种通用的方法,只要不怕麻烦,最后总能证明出来或判断出来呢?就是将每个公式转换为唯一的标准形式,如果两个公式的标准形式相同,则两个公式肯定等值。

"标准形式"也称为"模范形式",简称为"范式",先学习一些基本概念。

【定义 1.4.1】　文字:命题变元及其否定称为文字,如 p、q、r、$\neg p$、$\neg q$、$\neg r$。

【定义 1.4.2】　简单析取式:仅由有限个文字构成的析取式,如 $p \vee q$、$\neg p \vee q$、$p \vee \neg q$、$\neg p \vee \neg q$、$p \vee q \vee r$。

【定义 1.4.3】　简单合取式:仅由有限个文字构成的合取式,如 $p \wedge q$、$\neg p \wedge q$、$p \wedge \neg q$、$\neg p \wedge \neg q$、$p \wedge q \wedge r$。

【定理 1.4.1】

(1) 简单析取式 A_i 是重言式 $\Leftrightarrow$ 同时含有某命题变元及其否定式,如 $A_i = p \vee \neg p \vee \ldots$。

(2) 简单合取式 A_i 是矛盾式 $\Leftrightarrow$ 同时含有某个命题变元及其否定式,如 $A_i = p \wedge \neg p \wedge \ldots$。

证明:(1) $\Leftarrow$:A_i 同时含有某命题变元 p 及其否定式 $\neg p$,如 $A_i = p \vee \neg p \vee q \vee r \ldots \Leftrightarrow 1 \vee q \vee r \ldots \Leftrightarrow 1$,故 A_i 为重言式。

$\Rightarrow$:当 A_i 为重言式时,假设不同时含有某命题变元及其否定式。

若 A_i 中有形如 q 的文字,由假设可知文字 $\neg q$ 不在 A_i 中出现,直接取 q 为 0。

若 A_i 中有形如 $\neg p$ 的文字,由假设可知文字 p 不在 A_i 中出现,p 取为 1,则 $\neg p = 0$。

因此,可将 A_i 中所有文字的值取为 0,故简单析取式 A_i 的值为 0,这与 A_i 永真矛盾,故假设错。

(2) $\Leftarrow$:A_i 同时含有某命题变元 p 及其否定式 $\neg p$,如 $A_i = p \wedge \neg p \wedge q \wedge r \ldots \Leftrightarrow 0 \wedge q \wedge r \ldots \Leftrightarrow 0$,故 A_i 为矛盾式。

$\Rightarrow$:当 A_i 为矛盾式时,假设不同时含有某命题变元及其否定式。

若 A_i 中有形如 q 的文字,由假设可知,文字 $\neg q$ 不在 A_i 中出现,直接取 q 为 1。

若 A_i 中有形如 $\neg p$ 的文字,由假设可知,文字 p 不在 A_i 中出现,p 取为 0,则 $\neg p = 1$。

即可将 A_i 中所有文字的值取为 1,故简单合取式 A_i 的值为 1,这与 A_i 永假矛盾,故假设错。

【定义 1.4.4】　析取范式:由有限个简单合取式的析取构成的命题公式。

如 $(p \wedge q) \vee (\neg p \wedge q)$、$(p \wedge \neg q) \vee (\neg p \wedge \neg q) \vee (p \wedge q \wedge r)$。

由析取的性质可知,仅当每个简单合取式为假时,析取范式为假。

范式中只出现"$\neg$"、"$\vee$"、"$\wedge$"三种符号,其中"$\vee$"、"$\wedge$"交替出现,因为最外层的运算符号是析取,从而将这种范式称为"析取范式"。如果最外层的符号是合取则称为