

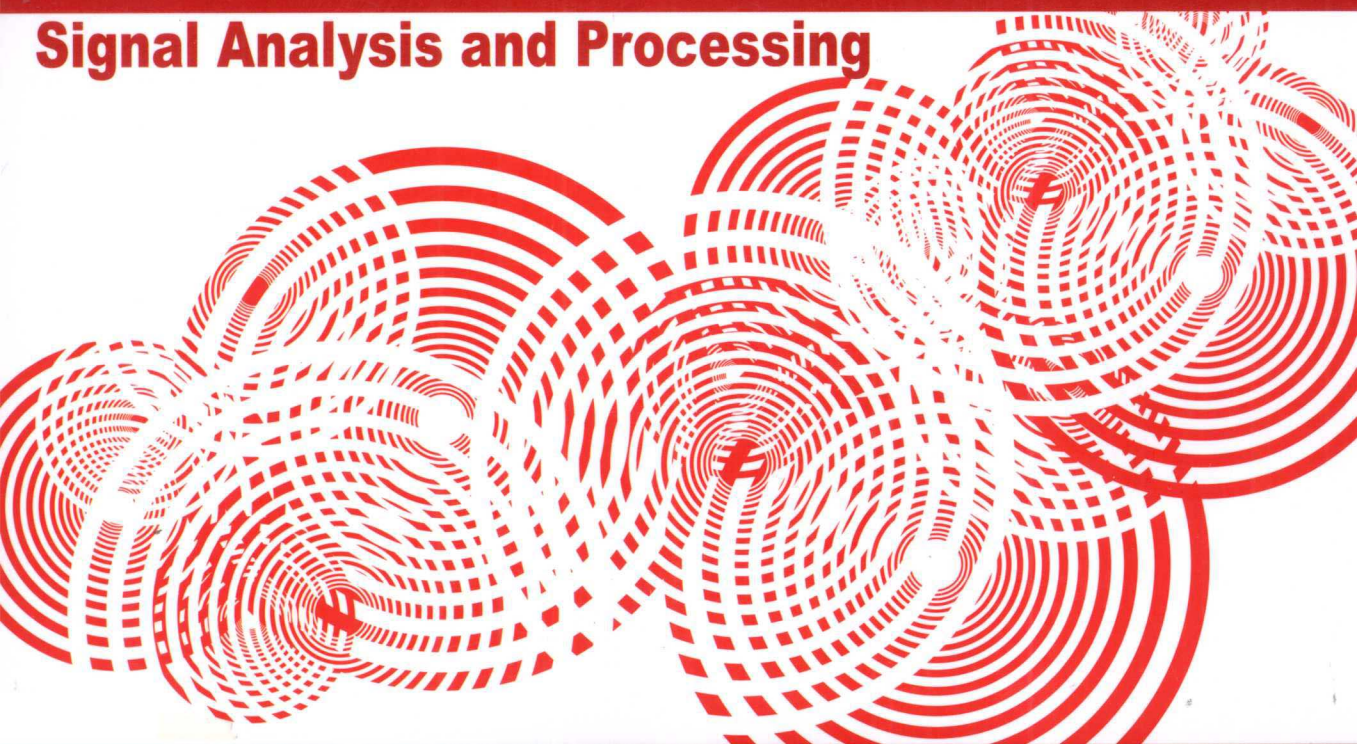


普通高等教育“十一五”国家级规划教材

张贤达 著

信号分析与处理

Signal Analysis and Processing



清华大学出版社





普通高等教育“十一五”国家级规划教材

张贤达 著

信号分析与处理

Signal Analysis and Processing

清华大学出版社
北京

内 容 简 介

本书将信号分析分为一阶统计分析、二阶统计分析和高阶统计分析三部分,系统介绍这三部分信号分析以及相对应的信号处理的理论、方法与应用。全书共9章,包括信号、系统和变换的基础与背景知识,信号的Fourier分析与频谱估计,数字滤波器,信号检测,相关分析与时延估计,功率谱分析与经典谱估计,现代谱估计,自适应滤波器以及信号的高阶统计分析与处理等内容。

全书针对信号处理的主要应用和新进展,深入浅出地阐述具有代表性的信号分析与处理的理论和有关方法,并介绍了大量的例题。为了方便读者学习和加深领会书中的主要内容,每章都配有复习思考题、计算与证明题、MATLAB训练与计算机仿真题。

本书可作为信息科学与技术学科本科高年级学生和非信息类理工科研究生的教材及参考书,也可供从事信号分析和处理工作的科研技术人员自学与参考。

本书封面贴有清华大学出版社防伪标签,无标签者不得销售。

版权所有,侵权必究。侵权举报电话:010-62782989 13701121933

图书在版编目(CIP)数据

信号分析与处理/张贤达著. —北京: 清华大学出版社, 2011.12

ISBN 978-7-302-25593-2

I. ①信… II. ①张… III. ①信号分析 ②信号处理 IV. ①TN911

中国版本图书馆CIP数据核字(2011)第096674号

责任编辑: 王一玲

责任校对: 焦丽丽

责任印制: 何 芊

出版发行: 清华大学出版社

地 址: 北京清华大学学研大厦A座

<http://www.tup.com.cn>

邮 编: 100084

社 总 机: 010-62770175

邮 购: 010-62786544

投稿与读者服务: 010-62795954, jsjic@tup.tsinghua.edu.cn

质 量 反 馈: 010-62772015, zhiliang@tup.tsinghua.edu.cn

印 刷 者: 三河市君旺印装厂

装 订 者: 三河市新茂装订有限公司

经 销: 全国新华书店

开 本: 185×260

印 张: 22

字 数: 524千字

版 次: 2011年12月第1版

印 次: 2011年12月第1次印刷

印 数: 1~3000

定 价: 35.00元

前 言

信号分析与处理具有丰富的理论,应用极其广泛。无论是天文学、海洋学、结晶学、航天、航空、航海、雷达、声呐,还是与人们生活息息相关的无线通信、生物工程、医学、计算机、电视、国际互联网甚至体育和娱乐等,都离不开信号的分析与处理。

信号分析本质上就是随机信号的统计特性分析,而信号处理是获得信号统计特性的数字处理手段与方法。本书正是从这一视角出发,采用了与国内外现有信号分析或信号处理教材不同的体系和框架:将信号分析分为一阶统计分析、二阶统计分析和高阶统计分析三部分以及相对应的信号处理的理论、方法及应用。

全书共包含 9 章,其主要内容可概括如下:

第 1 章为全书的引论与基础:介绍信号分析与处理所需要的信号、系统和变换的基础与背景知识。

第 2 章至第 4 章是信号一阶统计分析与处理:主要介绍信号的 Fourier 分析与频谱估计(第 2 章),数字滤波器(第 3 章)以及信号检测(第 4 章)。

第 5 章至第 8 章为信号二阶统计分析与处理:分为相关分析与时延估计(第 5 章)、功率谱分析与经典谱估计(第 6 章)、现代谱估计(第 7 章)和自适应滤波器(第 8 章)。

最后一章是信号高阶统计分析与处理:主要介绍高阶谱分析与估计的基本理论与方法。

第 3 章的数字滤波器是在频率域进行分析和设计的,滤波器设计所用的主要数学工具为传递函数。此外,第 4 章中信号检测的主要统计量为观测数据的样本均值。因此,数字滤波器和信号检测都划归为信号一阶统计处理的范畴。

与第 3 章的频域滤波器设计不同,第 8 章的自适应滤波器的主要数学工具是信号的相关函数,所以将自适应滤波器纳入到信号的二阶统计处理中。

信号的二阶统计分析相当于信号的主成分分析,因为功率谱反映信号的主要能量分布;而信号的高阶统计分析则视为信号的次成分(细节)分析。

本书各章是自包容的和密切相关联的。特别地,高阶统计量是二阶统计量的推广,二阶统计量则是高阶统计量的特例。

为了方便教学和帮助读者巩固、检验学习效果,本书将习题分为复习思考题、计算与证明题、MATLAB 训练与计算机仿真题三部分。其中,有些 MATLAB 训练与计算机仿真题具有一定的难度,可能要花费比较多的时间。

书中有些部分用小号字排版,这些内容不影响读者对主要内容的基本理解,可以略去,仅供读者进一步理解有关内容之用。

本书可供科研和工程技术部门从事信号分析和信号处理工作的有关科技人员参考,适合用作信息科学与技术学科的本科生教材以及非信息科学与技术学科的研究生教材。

借此机会，作者向在本书编写过程中作出了贡献的同事和学生表示感谢：邹红星教授提出了宝贵的修改意见；韩芳明、李剑、高秋彬三位博士为本书选编了部分习题；苏泳涛、丁子哲两位博士和张道明、陈忠、王锟三位博士研究生和郑亮硕士研究生帮助绘制了部分插图；陈忠还提供了部分 MATLAB 训练与计算机仿真题。

衷心感谢国家自然科学基金和教育部博士学科点基金对我们的科研工作持续不断的支持。这些支持推动和加深了我们对现代信号处理的研究与理解。

虽然本书的内容经过认真的选择、斟酌与编排，但不足乃至错误之处可能仍然存在，在此诚恳欢迎信号处理学界和其他领域的专家和同仁对本书提出宝贵意见与建议！

作 者

2011 年 3 月于清华大学

目 录

第1章 信号、系统与变换	1
1.1 模拟信号与系统	1
1.1.1 模拟信号	1
1.1.2 Fourier 变换	3
1.1.3 模拟系统	7
1.2 系统函数与本征信号	9
1.2.1 系统函数	9
1.2.2 本征信号	12
1.3 离散信号与系统	14
1.3.1 离散信号	14
1.3.2 离散系统	16
1.3.3 冲激响应	17
1.3.4 模拟系统的数字仿真	19
1.3.5 采样与内插	21
1.4 z 变换与离散系统分类	22
1.4.1 z 变换	22
1.4.2 离散系统分类	25
1.5 本课程的主要框架	29
1.5.1 信号的分类	29
1.5.2 信号分析的分类	30
1.5.3 信号处理的分类	31
1.5.4 本课程内容的主要框架	32
本章小结	32
习题	33
第2章 Fourier 分析与频谱估计	37
2.1 离散时间 Fourier 变换 (DTFT)	37
2.1.1 周期信号的表示	37
2.1.2 非周期信号的表示	38
2.1.3 离散时间 Fourier 变换的性质	40
2.2 Fourier 分析	40
2.2.1 信号的 Fourier 分析	41
2.2.2 幅值谱与相位谱	41
2.3 离散 Fourier 变换 (DFT)	43
2.4 快速 Fourier 变换 (FFT)	46

2.5	卷积的快速计算	50
2.5.1	循环卷积	50
2.5.2	卷积的快速计算方法	53
2.6	频谱分析仪	54
2.7	基于 FFT 的频谱估计	56
2.7.1	频谱分析的基本参数选择	57
2.7.2	频谱的估计与平滑	58
	本章小结	60
	习题	60
	附录 2A Fourier 级数	62
	附录 2B 快速 Fourier 变换程序	64
第 3 章	数字滤波器	67
3.1	模拟低通滤波器	67
3.1.1	模拟低通滤波器的响应	67
3.1.2	归一化 Butterworth 低通滤波器逼近	70
3.1.3	归一化 Chebyshev 低通滤波器逼近	74
3.1.4	椭圆低通滤波器逼近	79
3.2	数字滤波器分类	83
3.2.1	有限冲激响应 (FIR) 滤波器	84
3.2.2	经典数字滤波器	86
3.3	数字滤波器的理想冲激响应	87
3.3.1	低通滤波器的理想冲激响应	88
3.3.2	高通滤波器的理想冲激响应	89
3.3.3	带通滤波器的理想冲激响应	91
3.3.4	带阻滤波器的理想冲激响应	92
3.3.5	陷波器的理想冲激响应	94
3.4	数字滤波器的规格、设计步骤与分类	96
3.4.1	数字滤波器的规格	96
3.4.2	数字滤波器的设计步骤	97
3.4.3	数字滤波器的设计分类	98
3.5	IIR 数字滤波器设计	99
3.5.1	基本步骤	99
3.5.2	数字低通和高通滤波器的设计公式	100
3.5.3	数字带通和带阻滤波器的设计公式	105
3.6	FIR 数字滤波器设计	107
3.6.1	Kaiser 窗函数	108
3.6.2	FIR 数字滤波器设计步骤与举例	108

3.7 传递函数的品质因子	111
3.7.1 零极点配对	111
3.7.2 Q 因子	112
3.7.3 3dB 频率与归一化幅频响应	114
3.8 典型二阶传递函数	114
3.8.1 二阶低通传递函数	114
3.8.2 二阶高通传递函数	117
3.8.3 二阶带通传递函数	121
3.8.4 二阶全通传递函数	123
3.8.5 二阶带阻传递函数	124
3.8.6 二阶陷波传递函数	126
本章小结	128
习题	129
第 4 章 信号检测	133
4.1 统计假设检验	133
4.1.1 基本概念	134
4.1.2 决策理论空间	136
4.1.3 参数估计的基本理论	139
4.2 概率密度函数与误差函数	141
4.2.1 概率密度函数	141
4.2.2 误差函数和补余误差函数	144
4.3 检测概率与错误概率	146
4.3.1 检测概率与错误概率的定义	146
4.3.2 功效函数	148
4.4 Neyman-Pearson 准则	150
4.4.1 雷达信号检测的虚警概率与漏警概率	150
4.4.2 Neyman-Pearson 引理与 Neyman-Pearson 准则	154
4.5 一致最大功效准则	157
4.5.1 通信信号检测问题	157
4.5.2 一致最大功效检验	159
4.5.3 一致最大功效准则的物理意义	162
4.6 Bayes 准则	163
4.6.1 代价函数与风险函数	163
4.6.2 最小均方估计	164
4.6.3 最大后验估计与最大似然估计	166
4.6.4 Bayes 准则及应用	167
本章小结	170

习题	170
附录 4A 随机变量	177
附录 4B 误差函数表	181
第 5 章 相关分析与时延估计	183
5.1 相关函数与协方差函数	183
5.1.1 相关函数与协方差函数: 定义及物理含义	183
5.1.2 自相关函数的性质	186
5.1.3 互相关函数的性质	187
5.2 相关系数	189
5.2.1 相关系数的定义	189
5.2.2 相关系数的物理解释	192
5.3 相关分析	193
5.3.1 统计独立、统计不相关与正交	193
5.3.2 相干信号	196
5.4 相关函数的快速计算	197
5.5 多信道相关	200
5.5.1 多信道信号完全相似	200
5.5.2 多信道信号弱相关的检测	203
5.6 时延估计及其应用	204
5.6.1 广义互相关函数	204
5.6.2 时延估计与窗函数选择	205
5.6.3 方位与距离估计	208
本章小结	209
习题	209
第 6 章 功率谱分析与经典谱估计	211
6.1 能量谱与功率谱	211
6.1.1 连续信号的能量谱与功率谱	211
6.1.2 离散信号的功率谱	215
6.2 功率谱分析	215
6.2.1 线性系统的能量谱	216
6.2.2 系统输出的功率谱	216
6.2.3 功率谱分析的应用	219
6.3 样本功率谱	219
6.3.1 两种自相关函数估计子	219
6.3.2 两种样本功率谱	220
6.4 时窗函数	223

6.4.1 数据截尾与 Gibbs 现象	223
6.4.2 窗函数的性能指标	227
6.4.3 典型的窗函数	228
6.4.4 最佳时窗函数	230
6.4.5 数字时窗函数	231
6.5 周期图方法	236
6.5.1 周期图方法与修正周期图方法	236
6.5.2 平均周期图方法与修正平均周期图方法	238
6.6 Blackman-Tukey 方法	240
本章小结	242
习题	242
第7章 现代谱估计	245
7.1 AR 模型和 MA 模型	245
7.1.1 AR 模型	245
7.1.2 MA 模型	248
7.2 ARMA 模型	251
7.2.1 ARMA 模型与 ARMA 过程	251
7.2.2 修正 Yule-Walker 方程	253
7.3 ARMA 功率谱	254
7.3.1 ARMA 功率谱及其特例	254
7.3.2 两个特殊的 ARMA 功率谱	255
7.3.3 功率谱的等价性	259
7.4 ARMA 功率谱估计器	261
7.4.1 Cadzow 谱估计器	261
7.4.2 Kaveh 谱估计器	262
7.5 ARMA 谱估计方法	263
7.5.1 AR 阶数估计	264
7.6 空间谱估计	266
7.6.1 波束形成器	267
7.6.2 最优波束形成器的设计	269
7.6.3 MUSIC 空间谱与 MUSIC 方法	271
本章小结	272
习题	272
第8章 自适应滤波	275
8.1 Wiener 滤波器	275
8.1.1 滤波器的基本功能	275

8.1.2	Wiener 滤波与 Wiener 滤波器	276
8.2	LMS 自适应滤波器	278
8.2.1	LMS 自适应滤波器的工作原理	278
8.2.2	LMS 滤波算法	280
8.3	LMS 滤波算法的性能评估与实现	282
8.3.1	LMS 滤波算法的性能评估	282
8.3.2	步长 μ 的选择	284
8.3.3	解相关 LMS 自适应算法	285
8.3.4	LMS 自适应算法的频域实现	286
8.4	RLS 自适应滤波器	287
8.4.1	RLS 自适应滤波算法	287
8.4.2	RLS 算法的参数选择	290
8.4.3	与 LMS 算法的比较	291
8.5	Kalman 滤波器	291
8.5.1	状态空间方程	292
8.5.2	新息过程	293
8.5.3	Kalman 滤波算法	295
8.5.4	空间状态方程的两个实际例子	297
8.6	自适应滤波器的应用	301
8.6.1	噪声对消	301
8.6.2	系统辨识	302
8.6.3	反卷积	303
8.6.4	线性预测	303
8.6.5	信道均衡	304
	本章小结	305
	习题	305
第9章	高阶谱分析与估计	309
9.1	高阶矩	309
9.1.1	特征函数	310
9.1.2	k 阶矩	310
9.2	高阶累积量	312
9.2.1	累积量定义及与矩的转换关系	312
9.2.2	高阶矩与高阶累积量的估计	313
9.3	矩与累积量的性质	314
9.4	高阶谱	317
9.4.1	高阶谱定义	317
9.4.2	高阶谱的性质	319

9.5 高阶谱估计	320
9.5.1 非参数化高阶谱估计方法	320
9.5.2 窗函数选择	322
9.6 高阶统计分析的应用	324
本章小结	325
习题	326
参考文献	329
索引	332

第1章 信号、系统与变换

在进入信号分析与处理的系统性学习之前,本章先从信号、系统与变换的角度出发,介绍连续和离散信号、连续和离散系统、Fourier 变换和 z 变换的基本概念。然后,围绕信号有用信息的获取,讨论信号分析与处理的基本分类。最后,介绍本课程以后各章内容的主要框架。

本章是以后各章的基础,可视为本课程的引论,所需要的理论背景为普通微积分、复变函数、电路、信号与系统的某些基本知识。

1.1 模拟信号与系统

人类使用信号 (signal), 并认识到其重要性, 已有悠久的历史。早在公元前, 古希腊人就用烽火“信号”传递情报。在我国, 烽火台 (又称烽台、烽燧、烟墩、烟火台) 是古代传递信息 (战情、敌情) 最快最有效的军事建筑。西周的周幽王“烽火戏诸侯, 一笑失天下”, 更是从反面说明了使用信号给己方发送虚假信息的严重危害。广而言之, 古代使用的“信号”可理解或定义为“为了警告、命令或报信而专门发出的, 为人们的视觉或听觉能够感知的符号、暗号或告示”。这便是信号的原始定义。然而, 在现代科学与技术中, 信号往往与系统联系在一起, 定义为传递物理系统的相关状态和特性信息的某种函数或载体。

1.1.1 模拟信号

系统定义为 (输入) 集合 F 到 (输出) 集合 G 的映射。若集合 F 和 G 的元素是连续变量的函数, 则称系统是连续的 (continue) 或模拟的 (analog)。本书采用符号 $f(t)$ 表示连续时间变量 t 的 (实或者复) 函数。

一个时间和幅值均为连续变量的序列 $x(t)$ 称为连续或模拟信号, 连续变量 t 称为连续时间。因此, 当某个系统的输入和输出均为连续信号时, 该系统便是一个连续系统或模拟系统。

连续信号有确定性信号和随机信号之分。确定性信号是一种在不同时间取值具有确定性规律的信号, 如通常使用的交流电等。

随机信号也叫随机过程, 它是定义在某个概率空间的实或复序列 $x(t)$ 。随机信号在

不同时间 $t_1, \dots, t_n$ 的取值 $x(t_1), \dots, x(t_n)$ 为随机变量, 如人的体温和心电图信号等。

下面是在信号分析与处理中经常使用的四种模拟信号:

(1) 阶跃信号 (step signal)

$$U(t) = \begin{cases} 1, & t > 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases} \quad (1.1.1)$$

(2) 符号信号 (sign signal)

$$\text{sgn}(t) = \begin{cases} 1, & t > 0 \\ -1, & t < 0 \end{cases} \quad (1.1.2)$$

(3) 方波信号 (rectangular pulse signal)

$$P_a(t) = \begin{cases} 1, & -a \leq t \leq a \\ 0, & \text{其他} \end{cases} \quad (1.1.3)$$

图 1.1.1 分别画出了阶跃信号、符号信号和方波信号的波形。

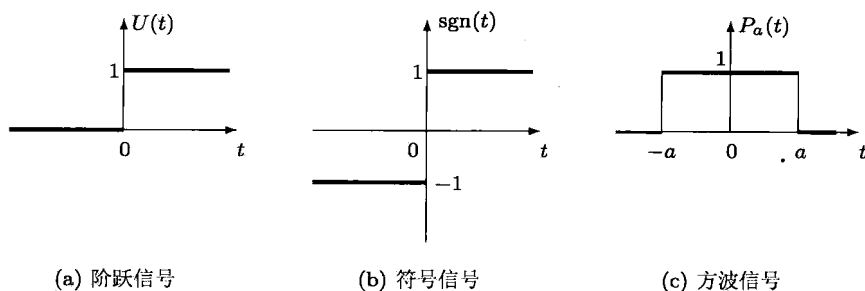


图 1.1.1 阶跃信号、符号信号与方波信号

(4) δ 信号: 对于满足

$$\int_{-\infty}^{\infty} \phi_c(t) dt = 1 \quad (1.1.4)$$

的函数族 $\phi_c(t)$ 和在原点连续的任意函数 $f(t)$, 若

$$\lim_{c \rightarrow 0} \int_{-\infty}^{\infty} \phi_c(t) f(t) dt = f(0) \quad (1.1.5)$$

则称 $c \rightarrow 0$ 时 $\phi_c(t)$ 的极限为 δ 函数。按照这一解释, δ 信号可以定义为满足

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) f(t) dt = f(0) \quad (1.1.6)$$

的连续函数 $\delta(t)$, 其中 $f(t)$ 是在原点连续的任意函数。

下面是 δ 信号的三个特例:

$$\delta(t) = \lim_{c \rightarrow 0} \frac{1}{c\sqrt{\pi}} e^{-t^2/c^2} \quad (1.1.7)$$

$$\delta(t) = \lim_{c \rightarrow 0} \frac{\sin(t/c)}{\pi t} \quad (1.1.8)$$

$$\delta(t) = \lim_{c \rightarrow 0} \frac{1}{c\sqrt{j\pi}} e^{jt^2/c^2} \quad (1.1.9)$$

其中 $j = \sqrt{-1}$ 为虚数。

δ 信号也叫冲激信号, 它具有以下重要性质。

性质 1 δ 信号是一个偶函数, 即有

$$\delta(-t) = \delta(t) \quad (1.1.10)$$

性质 2 δ 信号等于阶跃信号的微分:

$$\frac{dU(t)}{dt} = \delta(t) \quad (1.1.11)$$

性质 3 时间尺度放大 a 倍时, δ 信号的幅值缩小 $|a|$ 倍:

$$\delta(at) = \frac{1}{|a|} \delta(t) \quad (1.1.12)$$

性质 4 任意信号 $f(t)$ 与 $\delta(t)$ 信号的卷积等于原信号, 即

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t-\tau)\delta(\tau)d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)\delta(t-\tau)d\tau = f(t)$$

或写作

$$f(t) * \delta(t) = f(t) \quad (1.1.13)$$

式中

$$f(t) * g(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)g(t-\tau)d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} f(t-\tau)g(\tau)d\tau \quad (1.1.14)$$

表示函数 $f(t)$ 和 $g(t)$ 的卷积。

1.1.2 Fourier 变换

上面介绍了模拟信号在时间域的描述, 现在讨论模拟信号的频率域表示。

符号 $f(t) \leftrightarrow F(\omega)$ 表示 $f(t)$ 和 $F(\omega)$ 组成一个 Fourier 变换对: $F(\omega)$ 是 $f(t)$ 的 Fourier 变换, 而 $f(t)$ 是 $F(\omega)$ 的 Fourier 逆变换:

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-j\omega t}dt \quad (1.1.15)$$

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)e^{j\omega t}d\omega \quad (1.1.16)$$

并称 $F(\omega)$ 是模拟信号 $f(t)$ 的频谱。

例 1.1.1 若 $f(t) = e^{-\alpha t}U(t)$, 其中 $\alpha > 0$, 则其 Fourier 变换为

$$F(\omega) = \int_0^{\infty} e^{-\alpha t} e^{-j\omega t} dt = \frac{1}{\alpha + j\omega}$$

图 1.1.2 画出了信号 $f(t) = e^{-\alpha t}U(t)$ 及其 Fourier 变换的图形。

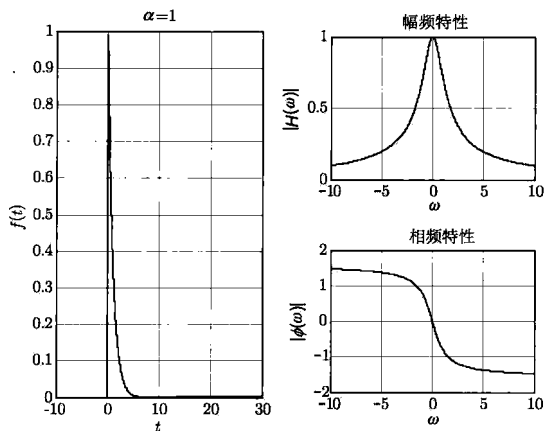


图 1.1.2 信号 $f(t) = e^{-\alpha t}U(t)$ 及其 Fourier 变换的图形

Fourier 变换具有以下基本性质。

1. 实信号的 Fourier 变换

若 $f(t)$ 是一个实信号, 则

$$F^*(\omega) = F(-\omega) \quad (1.1.17)$$

证明 令复函数

$$f(t) = f_1(t) + jf_2(t), \quad F(\omega) = R(\omega) + jX(\omega)$$

由于 $e^{j\omega t} = \cos(\omega t) + j\sin(\omega t)$, 故由式 (1.1.15) 计算 $F(\omega)$, 并且令等式左右两边的实部和虚部分别相等, 有

$$R(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} [f_1(t) \cos(\omega t) + f_2(t) \sin(\omega t)] dt = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cos(\omega t) dt$$

$$X(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} [f_1(t) \sin(\omega t) + f_2(t) \cos(\omega t)] dt = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \sin(\omega t) dt$$

若 $f(t)$ 为实信号, 则由以上两式易知 $R(-\omega) = R(\omega)$ 和 $X(-\omega) = -X(\omega)$, 从而有 $F^*(\omega) = R(\omega) - jX(\omega) = R(-\omega) + jX(-\omega) = F(-\omega)$. ■

2. 对称性

$$F(t) \leftrightarrow 2\pi f(-\omega) \quad (1.1.18)$$

证明 由式 (1.1.16) 直接得

$$f(-\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(x) e^{-j\omega x} dx$$

这表明, $F(t)$ 的 Fourier 变换等于 $2\pi f(-\omega)$. ■

3. 共轭信号的 Fourier 变换

$f(t)$ 的复数共轭信号 $f^*(t)$ 的 Fourier 变换是 $F(-\omega)$ 的复数共轭, 即有

$$f^*(t) \leftrightarrow F^*(-\omega) \quad (1.1.19)$$

证明 直接求 $f^*(t)$ 的 Fourier 变换, 得

$$\int_{-\infty}^{\infty} f^*(t) e^{-j\omega t} dt = \left[\int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-j(-\omega)t} dt \right]^* = F^*(-\omega)$$

4. 比例性

对任何实的比例因子 a , 有

$$f(at) \leftrightarrow \frac{1}{|a|} F\left(\frac{\omega}{a}\right) \quad (1.1.20)$$

证明 作变量代换 $at = x$, 则有

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(at) e^{-j\omega t} dt = \frac{1}{|a|} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-j\omega x/a} dx = \frac{1}{|a|} F\left(\frac{\omega}{a}\right)$$

5. 移位性

对任何实的因子 a , 有

$$f(t-a) \leftrightarrow e^{-ja\omega} F(\omega) \quad \text{和} \quad e^{jat} f(t) \leftrightarrow F(\omega-a) \quad (1.1.21)$$

即时间移位对应为频率调制, 而时 (间) 域的信号调制对应为频率的移位。

证明 直接计算 Fourier 变换, 得

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t-a) e^{-j\omega t} dt = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-j\omega(x+a)} dx = e^{-ja\omega} F(\omega)$$

6. 余弦调制性

$$f(t) \cos(\omega_0 t) \leftrightarrow \frac{1}{2} [F(\omega - \omega_0) + F(\omega + \omega_0)] \quad (1.1.22)$$

证明 利用移位性有 $e^{j\omega_0 t} f(t) \leftrightarrow F(\omega - \omega_0)$ 和 $e^{-j\omega_0 t} f(t) \leftrightarrow F(\omega + \omega_0)$ 。注意到 $\cos(\omega_0 t) = \frac{1}{2}(e^{j\omega_0 t} + e^{-j\omega_0 t})$, 故

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cos(\omega_0 t) e^{-j\omega t} dt &= \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) [e^{-j(\omega - \omega_0)t} + e^{-j(\omega + \omega_0)t}] dt \\ &= \frac{1}{2} [F(\omega - \omega_0) + F(\omega + \omega_0)] \end{aligned}$$

7. 导数性

$$(-jt)^n f(t) \leftrightarrow F^{(n)}(\omega), \quad f^{(n)}(t) \leftrightarrow (j\omega)^n F(\omega) \quad (1.1.23)$$

式中 $f^{(n)}(t)$ 和 $F^{(n)}(\omega)$ 分别是 $f(t)$ 和 $F(\omega)$ 的 n 阶导数。

证明 对式 (1.1.15) 和式 (1.1.16) 分别求 n 阶导数, 得

$$\begin{aligned} F^{(n)}(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} (-jt)^n f(t) e^{-j\omega t} dt \\ f^{(n)}(t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} (j\omega)^n F(\omega) e^{j\omega t} d\omega \end{aligned}$$