西安交大考研

2012版 数学考研

考点精讲 方法精练

数学三

主编 龚冬保

西安交通大学出版社
XI'AN JIAOTONG UNIVERSITY PRESS
西安交通大学出版社考研图书网站 http://kaoyan.xjtupress.com

(2012 版)

数学考研
考点精讲方法精练

(数学三)

主编　龚冬保

编著　(高等数学) 龚冬保　王寿生　褚维盘
　　　(线性代数) 崔荣泉
　　　(概率统计) 周家良

西安交通大学出版社
·西安·

内容提要

本书是专门针对考研复习编写的教材，内容严格按教育部制订的“数学考试大纲”编写。为了适应考生“复习”的特点，本书建立了与普通教材不同的体系；针对考研的特点，突出基本功和综合运用、应试能力的训练，对于数学知识，着重于分析问题和解决问题的能力，全面而有重点地覆盖了所有考点和解题方法。本书既可作“考研辅导班”的教材，也可用于考生自学，同时也可供就读本科的各专业的大学生参考。

作者在网上为本书读者免费答疑，时间：2011 年 7 月下旬至 2012 年 1 月考试前；答疑信箱：glsdy2012@126.com

图书在版编目(CIP)数据

2012 版.数学考研考点精讲方法精练：(数学三)/龚冬保主编.
—西安：西安交通大学出版社，2011.5
ISBN 978-7-5605-3933-1

Ⅰ.①2… Ⅱ.①龚… Ⅲ.①高等数学-研究生-入学考试-自学参考资料 Ⅳ.①O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2011)第 083050 号

书　　名　2012 版数学考研考点精讲方法精练(数学三)
主　　编　龚冬保
责任编辑　叶涛

出版发行　西安交通大学出版社
　　　　　(西安市兴庆南路 10 号　邮政编码 710049)
网　　址　http://www.xjtupress.com
电　　话　(029)82668357　82667874(发行部)
　　　　　(029)82668315　82669096(总编办)
传　　真　(029)82668280
印　　刷　陕西宝石兰印务有限责任公司

开　　本　787mm×1 092mm　1/16　**印张** 23　**字数** 704 千字
版次印次　2011 年 5 月第 6 版　2011 年 5 月第 1 次印刷
书　　号　ISBN 978-7-5605-3933-1/O·366
定　　价　37.50 元

读者购书、书店添货、如发现印装质量问题，请与本社发行中心联系、调换。
订购热线：(029)82665248　(029)82665249
投稿热线：(029)82664954
读者信箱：jdlgy@yahoo.cn

2012版前言

——兼释2011年部分试题

将2011年考研数学试题与我们编写的《数学考研考点精讲方法精练》《数学考研典型题》及《数学考研模拟考试试卷》相对照，考点和题型的覆盖率都很高. 这是自然的，因为我们是按《考试大纲》的要求来编写的，不用“猜题”，试题总会在意料之中.

近年来考研试题与我们书中几乎相同的题也时有所见. 2011年的“难题”（数学一（18）题，数学二（19）题），则与我们《典型题》（数学一／二）中第1章的例1.8题一模一样. 就让我们从这道题谈起吧.

一、从2011年数学一、二共用的难题谈起

例1 （Ⅰ）证明：对任意正整数 n，都有 $\frac{1}{n+1}<\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)<\frac{1}{n}$ 成立.

（Ⅱ）设 $a_n=1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}-\ln n\ (n=1,2,\cdots)$，证明数列 $\{a_n\}$ 收敛.

证 （Ⅰ）这个不等式最简单证法如下

由 $\left\{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right\}$ 单调增，$\left\{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}\right\}$ 单调减，它们都以 e 为极限于是 $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n<\mathrm{e}<\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}$

取以 e 为底的对数即可证明 $\frac{1}{n+1}<\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)<\frac{1}{n}$ 成立.

用微分法证明此不等式，可参考《精讲精练》中2.2.1.1中做辅助函数的方法，恕不赘述.

（Ⅱ）**证1** 由 $a_{n+1}-a_n=\frac{1}{n+1}-\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)<0$ 知，a_n 单调减；

为了证明 a_n 有下界，我们引入数列：

$$b_n=1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n-1}-\ln n\quad(n=2,3,\cdots)$$

则 $b_{n+1}-b_n=\frac{1}{n}-\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)>0$. 即 b_n 单调增，而明显地有

$a_n-b_n=\frac{1}{n}$，故 $a_n>b_n>\cdots>b_2=1-\ln 2$ 故 a_n 有下界，$\{a_n\}$ 收敛.

证2 由 $a_n-a_{n-1}=\frac{1}{n}-\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)=\frac{1}{n}-\left[\frac{1}{n-1}-\frac{1}{2(n-1)^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right]$

$=-\frac{1}{n(n-1)}+\frac{1}{2(n-1)^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)$. 知其与 $\frac{1}{n^2}$ 为同阶无穷小（$n\to\infty$）

从而知级数 $\sum\limits_{n=2}^{\infty}(a_n-a_{n-1})$ 绝对收敛.

而 $a_n=a_1+(a_2-a_1)+\cdots+(a_n-a_{n-1})$，故知数列 $\{a_n\}$ 收敛.

证3 我们可以把 a_n 化为一个级数的部分和：

由 $\ln n=\ln\left(\frac{n}{n-1}\cdot\frac{n-1}{n-2}\cdot\cdots\cdot\frac{3}{2}\cdot 2\right)=\ln 2+\ln\frac{3}{2}+\cdots+\ln\frac{n}{n-1}$.

故 $a_n=(1-\ln 2)+\left(\frac{1}{2}-\ln\frac{3}{2}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{n-1}-\ln\ln\left(1+\frac{1}{n-1}\right)\right)+\frac{1}{n}$.

而$\frac{1}{n}>0$，$\therefore a_n$ 与级数$\sum\limits_{n=2}^{\infty}\left(\frac{1}{n-1}-\ln\left(1+\frac{1}{n-1}\right)\right)$同敛散.

与证 2 相同，由泰勒公式.$\frac{1}{n-1}-\ln\left(1-\frac{1}{n-1}\right)=\frac{1}{2(n-1)^2}+o(n^{-2})$，与$\frac{1}{n^2}$同阶故此级数收敛，因而数列$\{a_n\}$收敛.

证 4 由$a_n=(1-\ln 2)+\left(\frac{1}{2}-\ln\frac{3}{2}\right)+\cdots+\frac{1}{n-1}-\ln\left(1+\frac{1}{n-1}\right)+\frac{1}{n}>0$ 知 $a_n>0$ 有下界，知$\{a_n\}$收敛(a_n 单调降在证 1 中已证过).

以上四种证法均用到不等式：$\frac{1}{n+1}<\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)<\frac{1}{n}$.这是考研题的特点之一：难题的(Ⅰ)往往是对(Ⅱ)的提示.

注：设$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=c$，称 c 为欧拉常数，由此得 $1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}=\ln n+c+\varepsilon_n$. 知调和级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$发散. 且$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\Big/\ln n\right)=1$. 此式在求一些数列极限中还有些用途，可参考《典型题》例 1.9.

二、部分客观题的分析与巧解

1. 选择题

例 2 $y=(x-1)(x-2)^2(x-3)^3(x-4)^4$ 拐点是

(A) $(1,0)$ (B) $(2,0)$ (C) $(3,0)$ (D) $(4,0)$

解 此题一见就知是$(3,0)$选(C). 主要根据是 $y''\Big|_{x=3}=0$，$y'''\Big|_{x=3}\neq 0$. 若不放心要证一下可令 $x-3=t$. 则

$y(t)=t^3(t+2)(t^2-1)^2(t-1)^2=t^4p(t)+2t^3$. 易得 $y''(0)=0$，$y'''(0)=12\neq 0$(其中 $p(t)$ 是 t 的多项式不必乘出来).

例 3 设 $I=\int_0^{\pi/4}\ln\sin x\mathrm{d}x$，$J=\int_0^{\pi/4}\ln\cot x\mathrm{d}x$，$K=\int_0^{\pi/4}\ln\cos x\mathrm{d}x$.

则 (A) $I<J<K$ (B) $I<K<J$ (C) $J<I<K$ (D) $K<J<I$

解 不用算便知选(B). 因为在$[0,\pi/4]$中 $\cot x>1$，而 $\cos x,\sin x<1$ 故 J 最大，选项中仅有(B)成立！当然知道在$[0,\pi/4]$中有 $\sin x<\cos x<\cot x$，也可选到(B).

例 4 设 $f(x)$ 在 $x=0$ 处可导，且 $f(0)=0$，则$\lim\limits_{x\to 0}\frac{x^2f(x)-2f(x^3)}{x^3}=$

(A) $-2f'(0)$ (B) $-f'(0)$ (C) $f'(0)$ (D) 0

解 原式$=\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}-2\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x^3)}{x^3}=f'(0)-2f'(0)=-f'(0)$，选(B).

本题作选择题，可以不顾条件而用洛必达法则

$$原式=\lim_{x\to 0}\frac{2xf(x)+x^2f'(x)-6f'(x^3)x^2}{2x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{2f(x)+xf'(x)-6xf'(x^3)}{3x}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{2f'(x)+f'(x)+xf''(x)-6f'(x^3)-18x^3f''(x^3)}{3}=-f'(0)$$

这种“不正确”的方法，同样能选到“正确”的选项！

例 5 函数 $f(x)=\ln|(x-1)(x-2)(x-3)|$ 的驻点个数为

(A) 0 (B) 1 (C) 2 (D) 3

解 像例 2 一样令 $x-2=t$，

则 $f'_t(x(t))=\frac{1}{t+1}+\frac{1}{t}+\frac{1}{t-1}=\frac{3t^2-1}{t(t^2-1)}=0$ 得 $t=\pm\frac{\sqrt{3}}{3}$ 两个驻点，选(C).

例 6 设 $\boldsymbol{A}$ 为三阶矩阵，将 $\boldsymbol{A}$ 的第 2 列加到第 1 列得矩阵 $\boldsymbol{B}$，再交换 $\boldsymbol{B}$ 的第 2 行与第 3 行得单位矩阵，设

$P_1=\begin{pmatrix}1&0&0\\1&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$，$P_2=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{pmatrix}$，则 $A=$

(A) P_1P_2　　(B) $P_1^{-1}P^2$　　(C) P_2P_1　　(D) $P_2P_1^{-1}$

解　已知 $P_2AP_1=E$，故 $A=P_2^{-1}P_1^{-1}=P_2P_1^{-1}$，选(D). 这里关键是要知道初等矩阵左乘 A 表示 A 作行变换，右乘则是作列变换.

例 7　$A=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)$ 是 4 阶矩阵，A^* 是 A 的伴随矩阵，若 $(1,0,1,0)^T$ 是 $Ax=0$ 的一个基础解系. 则 A^* 的基础解系可为

(A) α_1,α_3　　(B) α_1,α_2　　(C) $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$　　(D) $\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$

解　由 $A(1,0,1,0)^T=0$ 知 $\alpha_1+\alpha_3=0$ 即 α_1 与 α_3 线性相关. 且 $r(A^*)=1$，再由 $A^*A=O$ 知 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 都是 $A^*x=0$ 的解. α_1 与 α_3 线性相关 $r(A)=3$. 故 $\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 线性无关，选(D).

例 8　设 $F_1(x)$ 与 $F_2(x)$ 为两个分布函数，其相应概率密度 $f_1(x)$ 与 $f_2(x)$ 是连续函数，则必为概率密度的是

(A) $f_1(x)f_2(x)$　　(B) $2f_2(x)F_1(x)$

(C) $f_1(x)F_2(x)$　　(D) $f_1(x)F_2(x)+F_1(x)f_2(x)$

解　四个选项的函数都满足概率密度的一些条件，只留下在 $(-\infty,+\infty)$ 上的积分是否为 1 的条件，便可判断是否为概率密度，这时微分基本功起作用：

$f_1(x)F_2(x)+f_2(x)F_1(x)=F_1'(x)F_2(x)+F_2'(x)F_1(x)=(F_1(x)F_2(x))'$

故 $\int_{\infty}^{+\infty}(f_1F_2+f_2F_1)\mathrm{d}x=F_1(x)F_2(x)\Big|_{-\infty}^{+\infty}=1$ 成立，故选(D).

2. 填空题

例 9　微分方程 $y'+y=\mathrm{e}^{-x}\cos x$ 满足条件 $y(0)=0$ 的解为________.

解　原方程即 $\mathrm{e}^xy'+\mathrm{e}^xy=\cos x$，即 $(\mathrm{e}^xy)'=\cos x$.
由 $y(0)=0$ 知 $\mathrm{e}^xy=\sin x$，$y=\mathrm{e}^{-x}\sin x$.（微分公式要熟悉）

例 10　$F(x,y)=\int_0^{xy}\dfrac{\sin t}{1+t^2}\mathrm{d}t$ 则 $\dfrac{\partial^2F}{\partial x^2}\Big|_{(0,2)}=$ ________.

解　$\dfrac{\partial F}{\partial x}=y\dfrac{\sin xy}{1+x^2y^2}$　$\therefore \dfrac{\partial^2F}{\partial x^2}\Big|_{(0,2)}=\left(\dfrac{2\sin 2x}{1+4x^2}\right)'_{x=0}=4.$

这里，$x=0$ 的导数只要用 $\left(\dfrac{2\sin 2x}{1+4x^2}\right)'_{x=0}=\left[\dfrac{4\cos 2x}{1+4x^2}+2\sin 2x\left(\dfrac{1}{1+4x^2}\right)'\right]_{x=0}=4$.（后一项的导数不必求便知结果为 0）

例 11　$z=\left(1+\dfrac{x}{y}\right)^{\frac{x}{y}}$，则 $\mathrm{d}z\Big|_{(1,1)}=$ ________.

解　由 $\ln z=\dfrac{x}{y}[\ln(x+y)-\ln y]$ 及 $z\Big|_{(1,1)}=2$

$\dfrac{\partial}{\partial x}\left[\dfrac{x}{y}(\ln(x+y)-\ln y\right]_{(1,1)}=(x\ln(1+x))'=\ln 2+\dfrac{1}{2}$

$\dfrac{\partial}{\partial y}\left[\dfrac{x}{y}(\ln(x+y)-\ln y)\right]\Big|_{(1,1)}=\dfrac{\partial}{\partial y}\left[\dfrac{\ln(1+y)-\ln y}{y}\right]=-\ln 2-\dfrac{1}{2}$

$\therefore\ \mathrm{d}z=(2\ln 2+1)(\mathrm{d}x-\mathrm{d}y)$.

填空题只求答案正确，所以作填空题一定要用最简便方法，算出准确的答案.

三、几道解答题

例 12　求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\left[\dfrac{\ln(1+x)}{x}\right]^{\frac{1}{\mathrm{e}^x-1}}$

解　用等价无穷小替换及泰勒公式可轻松解出：

原式 $= e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{x}\ln\left[1+\left(\frac{\ln(1+x)}{x}-1\right)\right]} = e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)-x}{x^2}} = e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{-\frac{x^2}{2}+o(t)}{x^2}} = e^{-\frac{1}{2}}$

2011 年三份试卷上的求极限题只要用上述办法来求出，比用洛必达法则解简便得多.

例 13　求方程 $k\arctan x - x = 0$ 的不同实根的个数.

解 1　记 $f(x) = \arctan x - x$，即求 $f(x)$ 的零点个数.

则令 $f'(x) = \dfrac{k}{1+x^2} - 1 = \dfrac{k-1-x^2}{1+x^2}$，则当 $k \leqslant 1$ 时，$f'(x) < 0$，$f(x)$ 单调减，而 $f(0) = 0$ 是唯一的零点即方程有唯一实根 $x = 0$.

当 $k > 1$，令 $f'(x) = 0$ 得 $x = \pm\sqrt{k-1}$ 是极值点，由 $f(x)$ 是奇函数，只要讨论 $x > 0$ 的情况：当 $0 < x < \sqrt{k-1}$，$f'(x) > 0$，$f(x)$ 单调增，即 $f(\sqrt{k-1}) > 0$，当 $fx > \sqrt{k-1}$ 有 $f'(x) < 0$，而 $x \to +\infty$ 时，$f(x) \to -\infty$，故在 $(\sqrt{k-1}, +\infty)$ 中 $f(x)$ 有非一零点；从而在 $(-\infty, -\sqrt{k-1})$ 也有唯一零点，即此时方程有三个不同实根.

解 2　用几何法，当 $k = 0$，$x = 0$ 是唯一实根，设 $k \neq 0$，则只要看曲线 $y = \arctan x$ 与直线 $y = \dfrac{1}{k}x$ 的交点个数，当 $k = 1$ 时曲线与直线相切，如图 1. 故当 $\dfrac{1}{k} > 1$ 即 $k < 1$ 时直线与曲线仅在 $x = 0$ 相交；当 $\dfrac{1}{k} < 1$ 即 $k > 1$ 时，直线与曲线有三个交点：x 是一负、零和一正，三个实根. 结论与解 1 同.

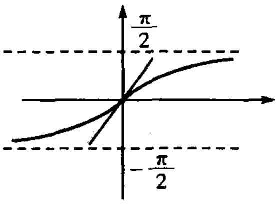

图 1

例 14　一容器内侧如图 2，由 $x^2 + y^2 = 2y\left(y \geqslant \dfrac{1}{2}\right)$ 和 $x^2 + y^2 = 1\left(y \leqslant \dfrac{1}{2}\right)$ 连续的曲线绕 y 轴旋一周而成.

（Ⅰ）求容积；（Ⅱ）若盛满水从容器顶部全部抽出至少要做多少功？长度单位是 m，重力 g m/s^2，水密度 10^3 kg/m^3.

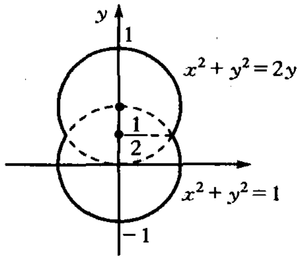

图 2

解　（Ⅰ）由对称形知

$$V = 2\pi\int_{1}^{\frac{1}{2}}(1-y^2)\mathrm{d}y = \frac{9}{4}\pi\ (\mathrm{m}^3)$$

（Ⅱ）我们介绍一个极巧妙的方法：由对称性知水的重心的垂直坐标是 $\dfrac{1}{2}$，水的质量是 $\dfrac{9}{4}\pi \cdot 10^3$，将水视为在重心处的一个质量是 $\dfrac{9}{4}\pi \cdot 10^3$ 一个“质点”，那么将此“质点”提出容器的顶点做功，相当于将水全部抽出所做的功.

即 $W = \dfrac{3}{2} \cdot \dfrac{9}{4}\pi g \cdot 10^3 = \dfrac{27}{8}\pi g \cdot 10^3$（焦耳）

例 15　设 $\boldsymbol{A}$ 是三阶实对称矩阵，$r(\boldsymbol{A}) = 2$，且 $\boldsymbol{A}\begin{bmatrix}1 & 1\\0 & 0\\-1 & 1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-1 & 1\\0 & 0\\1 & 1\end{bmatrix}$

（Ⅰ）求 $\boldsymbol{A}$ 的特征值与特征向量.

（Ⅱ）求矩阵 $\boldsymbol{A}$.

解　由 $\boldsymbol{A}(1,0,-1)^{\mathrm{T}} = -(1,0,-1)^{\mathrm{T}}$ 及 $\boldsymbol{A}(1,0,1)^{\mathrm{T}} = (1,0,1)^{\mathrm{T}}$ 及 $r(\boldsymbol{A}) = 0$ 知三个特征值分别为 -1，1，0，三个特征向量为 $(1,0,-1)^{\mathrm{T}}$，$(1,0,1)^{\mathrm{T}}$，$(0,1,0)^{\mathrm{T}}$.

（Ⅱ）由此作正交变换 $\boldsymbol{X} = \begin{bmatrix}1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 0\\0 & 0 & 1\\-1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 0\end{bmatrix}\boldsymbol{Y}$. 可将二次型化为标准形 $-y_1^2 + y_2^2$，因此作逆变换 $\boldsymbol{Y}$

$$\begin{bmatrix}1/\sqrt{2} & 0 & -1/\sqrt{2}\\ 1/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{2}\\ 0 & 1 & 0\end{bmatrix}\boldsymbol{X}=\begin{bmatrix}1/\sqrt{2}x_1-1/\sqrt{2}x_3\\ 1/\sqrt{2}x_1+1/\sqrt{2}x_3\\ x_2\end{bmatrix}$$可将$-y_1^2+y_2^2=-\left(\frac{1}{\sqrt{2}}x_1-\frac{1}{\sqrt{2}}x_3\right)^2+\left(\frac{1}{\sqrt{2}}x_1+\frac{1}{\sqrt{2}}x_3\right)^2=$

$2x_1x_3$ 便是以 $\boldsymbol{A}$ 为矩阵的原来的二次型，故 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0\\ 1 & 0 & 0\end{pmatrix}$.

请同学们注意，我们在解 2010 年的几道类似试题时，均采用了这个方法求 $\boldsymbol{A}$，它避免了较麻烦的矩阵乘法.

分析每年的试题，都会对准备今后考试有利. 以上我们“抛砖引玉”对 15 道 2011 年的试题给出了一些快捷的解法，希望每位考生对未来考试要做到“凡是考试的基本题都会做，凡是会做的题都不出错”，这样，不怕考不出理想的成绩. 这也是我们编写这几本书的宗旨，希望能帮助考生们在数学课程的考研中取得理想成绩！

我们将从 2011 年 7 月下旬至 2012 年元月考试前，在网上回答使用《数学考研典型题》和《数学考研考点精讲方法精练》二书读者提出的问题，答疑信箱 glsdy2012@126.com.

编　者

2011 春于西安交大

第 1 版前言

目前考研的数学辅导书很多，却没有一本专门指导考研复习使用的教材，广大考生很希望有这样的教材。为此，我们尝试编写了本教材，以帮助考生能按教育部制订的研究生入学考试的《数学考试大纲》，全面系统地、有重点地、高效率地复习数学知识，取得好成绩。

复习是重复学习，不是重新学习。 考研教材应与普通教材不同。首先，普通教材必须严格地按内容的逻辑顺序来编写，而考研教材不必受此拘束，可以从读者最熟悉的内容入手。比如高等数学部分，本书采取从微分法开始，以微分带积分，以积分促微分，使微积分紧密结合，深入浅出地讲完一元微积分的全部内容。其次，普通教材着重一个一个地讲解知识单元，而考研教材则侧重于内容间的联系。如本书线性代数部分将矩阵与行列式、向量代数与线性方程组、特征值特征向量与二次型紧密结合。第三，创立了一种新的体系，在逻辑顺序上更加符合考生的认识层次，更加适合于高效的复习。如概率论部分，先讲离散型随机变量的有关概率问题，再讲连续型随机变量的问题，再讲它们间的联系。第四，本书针对考研主要是考核解题能力的特点，安排了大量的例题，采用一题多解，一题多变的方式，侧重讲解题的思路、方法和技巧，培养读者灵活的分析能力和解决数学问题的能力。第五，根据编者多年辅导考研数学的经验，本书严格按《数学考试大纲》，从内容上既照顾了全面覆盖所有的考点，又突出了重点，从方法上既介绍了数学处理问题的基本方法，又突出了主要方法，特别考虑到考研试题中 70%左右的是基本题，本教材在基本内容、基本方法上讲述的篇幅最大，对一些难题讲述，则侧重讲一道难题的思路，以及它与基本内容的联系，如何作到熟能生巧等等。第六，作为一本复习教材，本书还考虑要便于考生自学，因此，在许多题后附了不少注释，还介绍了不少自编练习题的方法。希望读者在阅读本书时，要一边看书一边自己动手推导，在读完一节后，最好将这一节书中的例题当作习题，自己独立做一遍，然后再作本章练习题，这样效果会更好。

本书既然是一本考研的复习教材，因此，书中对一些估计考生很熟悉的内容，一些定理的证明、公式的推导等略去不讲，如果想要知道相关的内容，可以在任何一本普通的教材中找到。

感谢西安交通大学出版社为本书的编辑和出版所作的努力。希望本书能受到读者的欢迎，更希望广大读者多提意见和建议，以使本书能改得更好，成为准备参加考研读者的良师益友。

编者

2006.3 修改于西安

目　录

第 1 章　一元函数微积分(一)

1.1　微积分的基本方法

本书为何从微、积分法开始，而不从函数、极限开始?这正是本书的特点.我们认为，“复习”应当从你最熟悉、最容易提起回忆的内容入手，而不是从头再学一遍，这样效率会更高、效果会更好.

1.1.1　微积分的基本公式

定义 1.1　在某个区间 I 上，若 $F'(x)=f(x)$，便称函数 $f(x)$ 是 $F(x)$ 的导数，而称函数 $F(x)$ 是 $f(x)$ 的一个原函数，$F(x)+C$ 是 $f(x)$ 的不定积分(C 是任意常数).

不定积分记为 $\int f(x)\mathrm{d}x$.

从运算的角度讲，不定积分是微分的逆运算.因此，微积分运算的基础在于微分法.利用熟悉的微分，来做不太熟悉的积分，是复习微积分运算基本功的好方法.

例 1.1　求 $\int \sin 3x\mathrm{d}x$.

解　这样想：$\cos 3x$ 求导能得到 $\sin 3x$，于是求导：$(\cos 3x)'=-3\sin 3x$，从而得 $\int \sin 3x\mathrm{d}x=-\frac{1}{3}\cos 3x+C$.

这就是我们说的用微分做积分题的方法，非但快，还不会出错，因为我们已经用求导验证了所得到的结果.下一个例题更能看出将微积分联系起来的好处.

例 1.2　验证表 1.1 中的基本公式(13)′，即

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2+a^2}}=\ln(x+\sqrt{x^2+a^2})+C$$

解　做此题有一个巧妙方法

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2+a^2}} \overset{①}{=} \int \frac{1}{x+\sqrt{x^2+a^2}}\cdot\frac{\sqrt{x^2+a^2}+x}{\sqrt{x^2+a^2}}\mathrm{d}x \overset{②}{=} \int \frac{1}{x+\sqrt{x^2+a^2}}\left(1+\frac{x}{\sqrt{x^2+a^2}}\right)\mathrm{d}x$$

$$\overset{③}{=} \int \frac{\mathrm{d}(x+\sqrt{x^2+a^2})}{x+\sqrt{x^2+a^2}} \overset{④}{=} \ln(x+\sqrt{x^2+a^2})+C$$

这个方法是怎样得到的呢?原来它来自于求导的逆运算

$$[\ln(x+\sqrt{x^2+a^2})]' \overset{④'}{=} \frac{1}{x+\sqrt{x^2+a^2}}(x+\sqrt{x^2+a^2})' \overset{③'}{=} \frac{1}{x+\sqrt{x^2+a^2}}\left(1+\frac{x}{\sqrt{x^2+a^2}}\right)$$

$$\overset{②'}{=} \frac{1}{x+\sqrt{x^2+a^2}}\cdot\frac{\sqrt{x^2+a^2}+x}{\sqrt{x^2+a^2}} \overset{①'}{=} \frac{1}{\sqrt{x^2+a^2}}$$

上面求导的倒数第 1 步即等式 ①′ 与积分的第 1 步即等式 ① 倒过来看是一样的；同样 ②′ 与 ②、③′ 与 ③、④′ 与 ④ 是对应的.即，将求导的流程倒过来做，便得出这个积分的方法.

通过微分方法做积分题，可以让我们取得复习微积分的主动权，可以自己编题，先做微分，再反过来从微分的结果做积分.

例 1.3　我们目的是练习分部积分法，因此，编出一个题：$x^2\mathrm{e}^{-x}$，求导得 $(x^2\mathrm{e}^{-x})'=(2x-x^2)\mathrm{e}^{-x}$；再求积分：

$$\int(2x-x^2)e^{-x}dx=-(2x-x^2)e^{-x}+2\int(1-x)e^{-x}dx=x^2e^{-x}-2xe^{-x}-2(1-x)e^{-x}-2\int e^{-x}dx$$
$$=x^2e^{-x}+C.$$

因为是自己编的题，先求导，再积分，既练了微分，又练了积分，不用课本也不用老师、自编、自导、自演练，何乐而不为呢！我们提倡这样的复习方法：抓住内容间的联系，把书读薄，这样能够提高复习效率，增强复习效果.

为了练习微积分基本功，先要熟悉基本公式和运算法则，而且还是将微分和积分相对照更好.（见表 1.1 和表 1.2）.

表 1.1　微积分基本公式对照表

基本导数公式	对应的不定积分公式
① $(x^\alpha)'=\alpha x^{\alpha-1}$	①′ $\int x^\alpha dx=\frac{1}{\alpha+1}x^{\alpha+1}+C\quad(\alpha\neq-1)$
② $(\ln\lvert x\rvert)'=\frac{1}{x}$	②′ $\int\frac{dx}{x}=\ln\lvert x\rvert+C$
③ $(a^x)'=a^x\ln a\quad(a>0,a\neq1)$	③′ $\int a^x dx=\frac{a^x}{\ln a}+C\quad(a>0,a\neq1)$
④ $(\sin x)'=\cos x$	④′ $\int\cos x dx=\sin x+C$
⑤ $(\cos x)'=-\sin x$	⑤′ $\int\sin x dx=-\cos x+C$
⑥ $(\tan x)'=\sec^2 x$	⑥′ $\int\sec^2 x dx=\tan x+C$
⑦ $(\cot x)'=-\csc^2 x$	⑦′ $\int\csc^2 x dx=-\cot x+C$
⑧ $(\arcsin\frac{x}{a})'=\frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}\quad(a>0)$	⑧′ $\int\frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}}=\arcsin\frac{x}{a}+C\quad(a>0)$
⑨ $(\arctan\frac{x}{a})'=\frac{a}{a^2+x^2}\quad(a>0)$	⑨′ $\int\frac{dx}{a^2+x^2}=\frac{1}{a}\arctan\frac{x}{a}+C\quad(a>0)$
⑩ $(\mathrm{sh}x)'=\mathrm{ch}x$	⑩′ $\int\mathrm{ch}x dx=\mathrm{sh}x+C$
⑪ $(\mathrm{ch}x)'=\mathrm{sh}x$	⑪′ $\int\mathrm{sh}x dx=\mathrm{ch}x+C$
⑫ $(\mathrm{th}x)'=\frac{1}{\mathrm{ch}^2x}$	⑫′ $\int\frac{dx}{\mathrm{ch}^2x}=\mathrm{th}x+C$
⑬ $(\ln\lvert x+\sqrt{x^2\pm a^2}\rvert)'=\frac{1}{\sqrt{x^2\pm a^2}}\quad(a>0)$	⑬′ $\int\frac{dx}{\sqrt{x^2\pm a^2}}=\ln\lvert x+\sqrt{x^2\pm a^2}\rvert+C\quad(a>0)$
⑭ $(\ln\lvert\frac{a+x}{a-x}\rvert)'=\frac{2a}{a^2-x^2}\quad(a>0)$	⑭′ $\int\frac{dx}{a^2-x^2}=\frac{1}{2a}\ln\lvert\frac{a+x}{a-x}\rvert+C\quad(a>0)$

对此表中 14 对公式，务必记牢；以导数公式为基础，做到倒背如流.

由于紧扣微积分的联系，考虑到读者对微分熟悉，对积分较生疏，因此，我们以下主要先讲四种基本积分方法，读者应养成用微分检验积分结果的习惯.

表 1.2 微积分基本运算法则对照表

微分法（设 $F'(x)=f(x),G'(x)=g(x)$）	积分法
① 和的微分 $\mathrm{d}[F(x)+G(x)]=f(x)\mathrm{d}x+g(x)\mathrm{d}x$	①′ 分项积分法 $\int[f(x)+g(x)]\mathrm{d}x=\int f(x)\mathrm{d}x+\int g(x)\mathrm{d}x$
② 复合微分法 $\mathrm{d}F(u(x))=f(u)\mathrm{d}u=f(u(x))u'(x)\mathrm{d}x$	②′ 第一类换元积分法 $\int f(u(x))u'(x)\mathrm{d}x=\int f(u)\mathrm{d}u$
③ 复合微分法 $\mathrm{d}F(x(t))=f(x)\mathrm{d}x=f(x)\dot{x}(t)\mathrm{d}t$	③′ 第二类换元积分法 $\int f(x)\mathrm{d}x=\int f(x(t))\dot{x}(t)\mathrm{d}t$
④ 乘积微分法 $\mathrm{d}(uv)=u\mathrm{d}v+v\mathrm{d}u$	④′ 分部积分法 $\int u\mathrm{d}v=uv-\int v\mathrm{d}u$

1.1.2 分项积分法

例 1.4 $\int\frac{(x-1)^2}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x=\int(x^{\frac{3}{2}}-2x^{\frac{1}{2}}+x^{-\frac{1}{2}})\mathrm{d}x=\frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}}-\frac{4}{3}x^{\frac{3}{2}}+2x^{\frac{1}{2}}+C.$

例 1.5 $\int\frac{x^2}{1+x^2}\mathrm{d}x=\int(1-\frac{1}{1+x^2})\mathrm{d}x=x-\arctan x+C.$

例 1.6 $\int\tan^2 x\mathrm{d}x=\int(\sec^2 x-1)\mathrm{d}x=\tan x-x+C.$

分项积分法是最基本却又是容易被忽视的积分法，在复习中值得留意.

1.1.3 第一类换元积分法（凑微分的积分法）

例 1.7 计算$\int\sin 2x\mathrm{d}x$.

解 1 原式$=\frac{1}{2}\int\sin 2x\mathrm{d}(2x)=\frac{-1}{2}\cos 2x+C.$

注 这里，实际上是令 $2x=u$，但当对这样简单的复合求导逆运算熟悉时，不必写出新的积分元 u，大多数的第一类换元积分法都可以不写出 u，而是将被积表达式凑成微分形式，即如 $\sin 2x\mathrm{d}x=\mathrm{d}(-\frac{1}{2}\cos 2x)$，故也称凑微分法.

解 2 原式$=2\int\sin x\cos x\mathrm{d}x=2\int\sin x\mathrm{d}(\sin x)=\int\mathrm{d}\sin^2 x=\sin^2 x+C.$

解 3 原式$=2\int\cos x\sin x\mathrm{d}x=-2\int\cos x\mathrm{d}(\cos x)=-\cos^2 x+C.$

复合求导是最重要的微分法则，因此，**凑微分法是积分的最重要的方法.**

例 1.8 求$\int\frac{\mathrm{d}x}{\cos x}$.

解 1 $\int\frac{\mathrm{d}x}{\cos x}=\int\frac{\sec x(\tan x+\sec x)}{\tan x+\sec x}\mathrm{d}x=\int\frac{\mathrm{d}(\tan x+\sec x)}{\tan x+\sec x}=\boxed{\ln|\tan x+\sec x|+C}$

解 2 $\int\frac{\mathrm{d}x}{\cos x}=\int\frac{\cos x}{\cos^2 x}\mathrm{d}x=\int\frac{\mathrm{d}\sin x}{1-\sin^2 x}=\boxed{\ln\sqrt{\frac{1+\sin x}{1-\sin x}}+C}$

解 3 $\int\frac{\mathrm{d}x}{\cos x}=\int\frac{\mathrm{d}x}{\cos^2\frac{x}{2}-\sin^2\frac{x}{2}}=2\int\frac{\mathrm{d}\tan\frac{x}{2}}{1-\tan^2\frac{x}{2}}=\boxed{\ln\left|\frac{1+\tan\frac{x}{2}}{1-\tan\frac{x}{2}}\right|+C}$

解 4 $\int \frac{dx}{\cos x} = \int \frac{dx}{\sin(\frac{\pi}{2}+x)} = \int \frac{d(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4})}{\sin(\frac{\pi}{4}+\frac{x}{2})\cos(\frac{\pi}{4}+\frac{x}{2})} = \int \frac{\sec^2(\frac{\pi}{4}+\frac{x}{2})}{\tan(\frac{\pi}{4}+\frac{x}{2})} d(\frac{\pi}{4}+\frac{x}{2})$

$$= \boxed{\ln\left|\tan(\frac{\pi}{4}+\frac{x}{2})\right| + C}$$

以上 4 个方框的结果都是计算$\int \frac{dx}{\cos x}$的公式，读者可用微分还原.

例 1.9 求$\int \frac{dx}{1+e^x}$.

解 1 $\int \frac{dx}{1+e^x} = \int \frac{(1+e^x-e^x)dx}{1+e^x} = x - \ln(1+e^x) + C$

解 2 $\int \frac{dx}{1+e^x} = \int \frac{e^x dx}{e^x(1+e^x)} = \int (\frac{1}{e^x} - \frac{1}{1+e^x}) e^x dx = x - \ln(1+e^x) + C$

解 3 $\int \frac{dx}{1+e^x} = \int \frac{e^{-x}dx}{1+e^{-x}} = -\ln(1+e^{-x}) + C$

1.1.4 第二类换元积分法

这一类是地道的换元法，第一类换元是凑微分，可以不作“换元”，第二类是假设被积函数 $f(x)$ 的原函数不易看出，而令 $x = x(t)$. 这样

$\int f(x)dx = \int f(x(t))\dot{x}(t)dt$，使 $F(t) = f(x(t))\dot{x}(t)$ 比较简单. 通常，**这类换元一个最重要思路是有理化被积表达式.**

例 1.10 求$\int x\sqrt{1-2x}dx$.

解 令 $1-2x = t^2$. 则 $x = \frac{1}{2}(1-t^2)$，$dx = -tdt$.

$$原式 = \frac{1}{2}\int (t^2-1)t^2 dt = \frac{1}{10}t^5 - \frac{1}{6}t^3 + C$$

$$= \frac{1}{30}[3(1-2x)^{5/2} - 5(1-2x)^{3/2}] + C$$

例 1.11 求$\int \sqrt{a^2-x^2}dx$.

解 1 令 $x = a\sin t$，则 $dx = a\cos t dt$.

$$原式 = a^2\int \cos^2 t dt = a^2\int \frac{1+\cos 2t}{2}dt = \frac{a^2}{2}(t + \frac{1}{2}\sin 2t) + C$$

$$= \frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a} + \frac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2} + C(可以当成基本公式).$$

解 2 (分部积分法).

$$I = \int \sqrt{a^2-x^2}dx = x\sqrt{a^2-x^2} + \int \frac{x^2}{\sqrt{a^2-x^2}}dx$$

$$= x\sqrt{a^2-x^2} - I + a^2\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} \quad (移项，解出\ I)$$

$$I = \frac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2} + \frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a} + C.$$

解 3 (主要也是分部积分法).

$$I = \int \frac{a^2-x^2}{\sqrt{a^2-x^2}}dx = a^2\arcsin\frac{x}{a} + x\sqrt{a^2-x^2} - I \quad (移项)$$

故 $$I=\frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a}+\frac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2}+C.$$

例 1.12 求$\int\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x-x^2}}$.

解 1 （第一类换元）.

$$原式=2\int\frac{\mathrm{d}\sqrt{x}}{\sqrt{1-(\sqrt{x})^2}}=2\arcsin\sqrt{x}+C.$$

解 2 $原式=-2\int\frac{\mathrm{d}\sqrt{1-x}}{\sqrt{1-(\sqrt{1-x})^2}}=-2\arcsin\sqrt{1-x}+C=2\arccos\sqrt{1-x}+C.$

注 遇到函数，首先要想到定义域. 本题被积函数的定义域是(0,1)，故我们只是在(0,1)内求它的原函数.

解 3 （直接用公式）.

$$原式=\int\frac{\mathrm{d}(x-\frac{1}{2})}{\sqrt{\frac{1}{4}-(x-\frac{1}{2})^2}}=\arcsin(2x-1)+C.$$

解 4(换元积分法) 令 $x-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}\sin t$

$$原式=\int\mathrm{d}t=t+C=\arcsin(2x-1)+C.$$

解 5 由 $0<x<1$ 知，可令 $x=\sin^2t,1-x=\cos^2t,\mathrm{d}x=2\sin t\cos t\mathrm{d}t$.

$$原式=2\int\mathrm{d}t=2t+C=2\arcsin\sqrt{x}+C.$$

解 6(有理化变换) 考虑被积函数.

由 $$\frac{1}{\sqrt{x(1-x)}}=\frac{1}{x}\sqrt{\frac{x}{1-x}},$$

令$\frac{x}{1-x}=t^2$， 则 $x=\frac{t^2}{1+t^2},\mathrm{d}x=\frac{2t}{(1+t^2)^2}\mathrm{d}t$

$$原式=2\int\frac{\mathrm{d}t}{1+t^2}=2\arctan t+C=2\arctan\sqrt{\frac{x}{1-x}}+C.$$

1.1.5 分部积分法

$$\int u\mathrm{d}v=uv-\int v\mathrm{d}u$$

将被积函数是 $u(x)v'(x)$ 的积分，化为 $v(x)u'(x)$ 的积分. 要求表达式 $v(x)u'(x)$ 不比 $u(x)v'(x)$ 更复杂.

例 1.13 求$\int\ln x\mathrm{d}x$.

解 $原式=x\ln x-\int\mathrm{d}x=x\ln x-x+C.$

例 1.14 求$\int x^2\arcsin x\mathrm{d}x$.

解
$$\begin{aligned}原式&=\frac{x^3}{3}\arcsin x-\frac{1}{3}\int\frac{x^3}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x=\frac{x^3}{3}\arcsin x-\frac{1}{6}\int\frac{x^2\mathrm{d}x^2}{\sqrt{1-x^2}}\\&=\frac{x^3}{3}\arcsin x+\frac{1}{6}\int(1-x^2)^{\frac{1}{2}}\mathrm{d}(1-x^2)-\frac{1}{6}\int(1-x^2)^{-\frac{1}{2}}\mathrm{d}(1-x^2)\\&=\frac{x^3}{3}\arcsin x-\frac{1}{9}(1-x^2)^{3/2}+\frac{1}{3}(1-x^2)^{\frac{1}{2}}+C.\end{aligned}$$