高等教育“十二五”规划教材

概率论与数理统计

陈爱江　张文良　主编

中国质检出版社

高等教育“十二五”规划教材

概率论与数理统计

主　编　陈爱江　张文良
副主编　刘晓俊　李春萍

中国质检出版社
北　京

图书在版编目（CIP）数据

概率论与数理统计/陈爱江，张文良主编.—北京：中国质检出版社，2011.4
高等教育“十二五”规划教材
ISBN 978-7-5026-3434-6

Ⅰ.①概… Ⅱ.①陈… ②张… Ⅲ.①概率论—高等学校—教材②数理统计—高等学校—教材 Ⅳ.①O21

中国版本图书馆CIP数据核字（2011）第058628号

内 容 提 要

本书主要介绍了概率论与数理统计的基本内容，全书共分十章，各章均配备了习题，书后附有答案。

本书可作为普通高等院校经济、金融、管理类专业以及其他相关专业的数学公共基础课教材。

中国质检出版社出版发行
北京市朝阳区和平里西街甲2号（100013）
北京市西城区复外三里河北街16号（100045）
网址：www.spc.net.cn
电话：（010）64275360 68523946
中国标准出版社秦皇岛印刷厂印刷
各地新华书店经销
*
开本 787×1092 1/16 印张 14 字数 346 千字
2011年6月第一版 2011年6月第一次印刷
*
定价：**27.00** 元

前　言

概率论与数理统计一般是学生接触的第一门以不确定性现象为研究对象的学科。由于概念、术语以及数量关系的陌生，学生在学习中常常感到不适应。对于非数学专业的学生，学习概率论与数理统计的目的在于应用，或者仅在于提高数学素养，即使如此也要对它的知识体系有较严谨、全面的了解。

本书是依据教育部高教司颁发的《经济数学基础大纲》，根据普通高等教育培养目标和经济、金融与管理类普通高等教育的特点，在广泛吸取同类教材优点的基础上，集编者多年教学实践经验编写而成。本书具有以下特点：

第一、在对教材体系和章节的安排上，严格遵循循序渐进、由浅入深的教学规律；在对内容深度的把握上，考虑教学对象的培养要求和接受基础，注重培养学生应用知识分析问题和解决问题的能力，合理淡化抽象的证明，重点强化直观、形象的叙述，同时兼顾了内容的系统性和完整性，力争做到繁简合理、难易适度。

第二、在每章开篇给出明确的学习目标与重点难点提示，涵盖了教学大纲的重点或主要内容。每章的最后给出了小结，对本章的内容进行系统总结，明确所需掌握的知识点。

第三、考虑到本门课程具有较强的社会实践性，在教材的编写上力争做到理论联系实际，注重案例的引入，尽可能突出经济、金融和管理类高等教育的特点，加强学生对知识点的理解和记忆，强化学生分析问题、解决问题的能力。

第四、书中精选了大量例题和习题并附有习题答案，引导学生及时消化和吸收所学知识，不断加深对教材内容的理解，全面复习和掌握所学知识，综合评判自己对知识的掌握程度，巩固最终学习成果。

在本书的编写过程中，我们得到了众多专家学者及兄弟院校同行的真诚理解与支持，在此向他们致以衷心的感谢。

本书由陈爱江、张文良担任主编，刘晓俊、李春萍担任副主编，参加编写的还有王宏艳、贾培佩、武萌、尹亮亮、张玉敏、刘晓霞、袁国强、肖倩、石启宏、常萌、展正然等。

由于水平、能力所限，书中定有不足之处，恳请读者批评指正。

编　者

2011 年 3 月

目　录

第一章　随机事件及其概率

学习目标

1. 理解随机试验的特点，掌握样本点、样本空间的概念。

2. 理解随机事件概念，掌握事件之间的关系及其运算。

3. 理解概率的定义，掌握概率的基本性质，会应用这些性质进行概率的基本运算。

4. 掌握等可能概型的定义，能熟练运用排列组合知识计算常见的等可能概率问题，如随机抽样、生日问题等。

5. 掌握古典概型概率的计算方法。

6. 熟练掌握条件概率公式、乘法公式、全概率公式、贝叶斯公式，会求较复杂事件的概率。

7. 理解两个事件相互独立的定义、推论。

8. 掌握三个事件相互独立与三个事件两两相互独立的定义及其区别。

重点难点

理解概率的定义，掌握概率的基本性质，会应用这些性质进行概率的基本运算。

古典概型事件的概率计算；条件概率的理解；全概率公式与贝叶斯公式的应用；事件独立性概念的理解。

第一节　随机事件

一、随机试验与随机事件

通常称满足以下三个条件的试验为随机试验，简称试验，一般用字母 E 表示：

（1）在相同条件下可以重复；

（2）每次试验的所有可能结果是明确知道的，并且不止一个；

（3）在每次试验前不能准确地预言该次试验出现哪种结果。

我们把在一次试验中可能出现也可能不出现的结果称为随机事件，简称事件，一般用大写字母 A，B，C 等表示。在试验中必然发生的事情叫必然事件，一般用字母 Ω 表示；在试验中一定不发生的事情叫不可能事件，一般用字母 $\varnothing$ 表示。为了讨论问题方便，以后我们把不可能事件和必然事件也当作随机事件来看待。

举例：

E_1：掷一枚均匀硬币，观察正、反面出现的情况为一随机试验。

设 A 表示“出现正面”，B 表示“出现反面”，则 A，B 均为 E_1 的随机事件。

E_2：掷一均匀骰子，观察出现的点数情况为一随机试验。

设 A 表示“出现 1 点”，B 表示“出现 2 点”，C 表示“点数小于 3”，D 表示“出现奇数点”，则它们均为 E_2 的随机事件。

E_3：设有 10 件同类型产品，其中有 8 件正品，2 件次品，从中任取 2 件，观察 2 件中含有次品的件数为一随机试验。

设 A 表示“恰有 0 件次品”，B 表示“恰有 1 件次品”，C 表示“恰有 2 件次品”，则 A，B，C 均为 E_3 的随机事件。

E_4：在一批灯泡中，任取一只，测试它的使用寿命为一随机试验。

设 A 表示“寿命大于 800 小时”，B 表示“寿命小于 500 小时”，则它们均为 E_4 的随机事件。

在 E_2 中，“出现 1 点”，“出现 2 点”是最简结果，称为基本事件。“点数小于 3”是由“出现 1 点”，“出现 2 点”两个基本事件组合而成；“出现奇数点”是由“出现 1 点”，“出现 3 点”，“出现 5 点”三个基本事件组合而成，称为复合事件。

基本事件也称样本点，记作 ω，所有样本点的集合称为样本空间，记作 Ω。以上各例样本空间分别为

E_1：$\Omega_1 = \{A, B\}$

E_2：$\Omega_2 = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

E_3：$\Omega_3 = \{A, B, C\}$

E_4：$\Omega_4 = \{t \mid t \geqslant 0\}$，其中 t 表示灯泡的寿命。

说明：

（1）构成样本空间的样本点取决于试验的内容，而样本空间是相对于所述的试验而言的。例如，试验 E：掷一骰子，观察偶数点出现的情况，则样本空间 $\Omega = \{2, 4, 6\}$，与 Ω_2 不同，若观察点数不超过 4 的情况，则样本空间 $\Omega = \{1, 2, 3, 4\}$。

（2）平时我们所说的随机事件是基本事件或由基本事件组合而成的复合事件，因此，事件是样本空间 Ω 的子集，而基本事件是样本空间 Ω 的元素，样本空间作为事件而言是一个必然事件，空集是不可能事件。

二、事件的关系与运算

我们讨论随机事件时，不是只讨论它的一个事件，而是要讨论一些事件，这些事件之间又存在着一定的关系。例如，在检查圆柱形产品时，如果要求它的长度和直径都符合规格这件产品才算合格，那么我们考虑“产品合格”与“产品不合格”时，就要考虑到“直径合格”，“长度合格”，“直径合格且长度合格”，“直径合格而长度不合格”，“长度合格而直径不合格”及“长度与直径都不合格”。这些事件的关系用语言叙述较麻烦，为此引进一些符号来表示事件的关系。

1. 事件的包含及相等

设有事件 A 与 B，如果事件 A 发生必导致事件 B 发生，则称事件 B 包含事件 A 或称 A 是 B 的子事件，记作 $B \supset A$ 或 $A \subset B$，如图 1-1 所示。

【例 1】 在检查圆柱形产品时，设 A 表示“产品合格”，B 表示“直径合格”。因为

“产品合格”必然导致“直径合格”，所以有 B⊃A。

如果事件 A⊃B 且 B⊃A，则称事件 A 与 B 相等，记作 A = B。

【例 2】 在例 1 中，设 C 表示“直径合格且长度合格”，而 A 表示“产品合格”，显然有 A = C。

2. 事件的和（并）与差

（1）由事件 A 与 B 至少发生其一所构成的事件称为事件 A 与 B 的和（并），记作 A + B 或（A∪B），如图 1－2 所示。

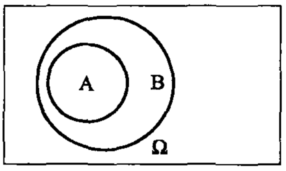

图 1－1

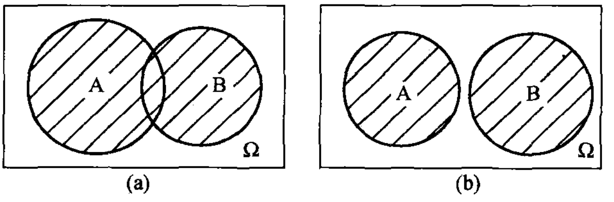

图 1－2

事件 A + B 通常包含着三部分：

① A 发生，B 不发生；

② B 发生，A 不发生；

③ A 与 B 都发生。

【例 3】 在例 1 中，若设 D 表示“产品不合格”，E 表示“直径不合格”，F 表示“长度不合格”，则有 D = E + F。因为产品不合格是直径不合格与长度不合格两个事件的和，也就是说，如果产品不合格，那么它的长度与直径至少有一个不合格。

关于两个事件的和，若对任意事件 A，有 A + ∅ = A，A + Ω = Ω；且可以推广到有限个事件的情形，即“A_1，A_2，…，A_n 至少有一个发生”，可记作

$$A = A_1 + A_2 + \cdots + A_n = \sum_{i=1}^{n} A_i \quad (A = \bigcup_{i=1}^{n} A_i)$$

更一般地，“事件 A_1，A_2，…，A_n，…至少有一个发生”，记作

$$A = A_1 + A_2 + \cdots + A_n + \cdots = \sum_{i=1}^{\infty} A_i \quad (A = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i)$$

（2）由事件 A 发生而事件 B 不发生所构成的事件，称为事件 A 与 B 的差，记作 A－B，如图 1－3 所示。

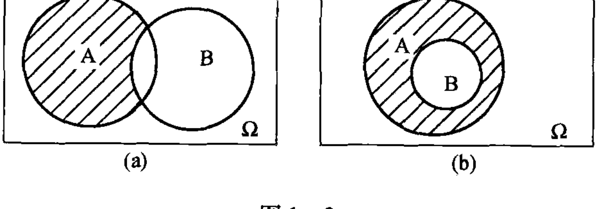

图 1－3

【例 4】 在例 1 中，A 表示“产品合格”，B 表示“直径合格”，D 表示“长度不合

格”，则

$$A = B - D$$

3. 事件的积（交）

由事件 A 与 B 同时发生构成的事件称为事件 A 与 B 的积（交），记作 AB（$A \cap B$），如图 1－4 所示。

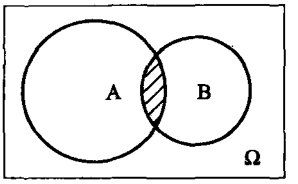

图 1－4

【**例 5**】 如前面讨论的圆柱形产品，“产品合格”便是“直径合格”与“长度合格”的积。

事件积的概念可以推广到有限个或可列个事件上去，把事件 A_1，A_2，…，A_n 同时发生的事件记作

$$A = A_1 A_2 \cdots A_n = \prod_{i=1}^{n} A_i \quad (A = \bigcap_{i=1}^{n} A_i)$$

更一般地，把 A_1，A_2，…，A_n，…同时发生的事件记作

$$A = A_1 A_2 \cdots A_n \cdots = \prod_{i=1}^{\infty} A_i \quad (A = \bigcap_{i=1}^{\infty} A_i)$$

4. 互不相容事件（互斥事件）

若事件 A 与 B 不能同时发生，则称 A 与 B 为互不相容事件，记作 $AB = \varnothing$（$A \cap B = \varnothing$），如图 1－5 所示。

【**例 6**】 例 1 中，A 表示“产品合格”，F 表示“长度不合格”，则有 $AF = \varnothing$

如果事件 A，B，C，…中任意两个事件都是互不相容的，则称它们彼此互不相容，或称它们两两互斥。

5. 对立事件（互逆事件）

如果事件 A 与 B 满足：

（1） $A + B = \Omega$；

（2） $AB = \varnothing$

则称事件 A 与 B 为对立事件，习惯上把 A 的对立事件记作 $\overline{A}$，如图 1－6 所示。

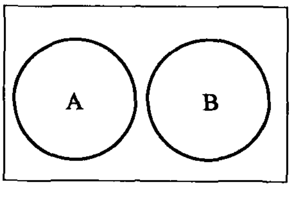

图 1－5

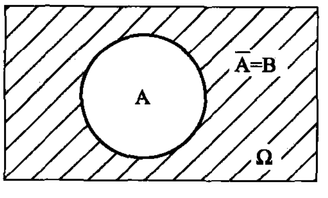

图 1－6

显然，$\overline{A} = \Omega - A$，$\overline{\overline{A}} = A$，即 A 与 $\overline{A}$ 互为对立事件。

【**例 7**】 上例中，“产品合格”事件与“产品不合格”事件是对立事件。

需要指出，对立事件一定是互不相容事件，而互不相容事件不一定是对立事件。

从我们学过的集合概念中不难发现，事件间的关系及其运算与集合论中集合间的关系与运算是完全类似的。把概率论中的基本事件看做集合论中的元素，由若干个基本事件组

成的复合事件便可以看做包含若干个元素的集合，而把基本事件的全体构成的样本空间看做集合论中的全集。为了便于对照，将它们的术语列于表 1－1 中。

表 1－1

记　号	集合论	概率论
Ω	全集	样本空间，必然事件
$\varnothing$	空集	不可能事件
ω	Ω 的元素	基本事件
$A \subset B$	A 是 B 的子集	事件 B 包含事件 A
$A+B$ $(A \cup B)$	A 与 B 的并集	事件 A 与事件 B 的和（并）
AB $(A \cap B)$	A 与 B 的交集	事件 A 与事件 B 的积（交）
$A-B$	A 与 B 的差集	事件 A 与事件 B 的差
$AB=\varnothing$	A 与 B 互不相交	事件 A 与事件 B 互不相容
$\overline{A}$	A 的补集	事件 A 的对立事件

对于事件来说，也有类似集合的运算规则：

（1）交换律：$A+B=B+A$，$AB=BA$

（2）结合律：$(A+B)+C=A+(B+C)$，$(AB)C=A(BC)$

（3）分配律：$(A+B)C=AC+BC$，$AB+C=(A+C)(B+C)$

（4）对偶律（德·摩根律）：$\overline{A+B}=\overline{A}\,\overline{B}$，$\overline{AB}=\overline{A}+\overline{B}$

由上面的规则可以看出，对事件的分析可以转化为对集合的分析，从而利用集合间的运算关系来分析事件间的关系。

【例 8】 事件 A_k 表示第 k 次取到合格品（$k=1,2,3$），试用事件的运算符号 A_k 表示下列事件：

（1）三次中至少有一次取到合格品；

（2）前两次取到合格品；

（3）三次中恰有两次取到合格品。

解：（1）$A_1+A_2+A_3$

（2）$A_1A_2\overline{A}_3+A_1A_2A_3$

（3）$A_1A_2\overline{A}_3+A_1\overline{A}_2A_3+\overline{A}_1A_2A_3$

【例 9】 如果 x 表示一个沿数轴随机运动的质点的位置，试说明下列事件的关系：

$A=\{x \mid x \leqslant 20\}$；$B=\{x \mid x>3\}$；$C=\{x \mid x<9\}$；$D=\{x \mid x<-5\}$；$E=\{x \mid x \geqslant 9\}$

解：如图 1－7 所示。

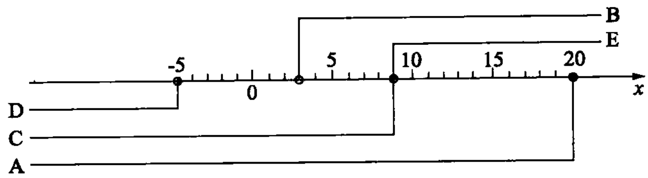

图 1－7

由图 1－7 可看出：$A \supset C \supset D$，$B \supset E$；D 与 B，D 与 E 互不相容；C 与 E 为对立事件。

第二节 概率的概念

由于随机试验有许多种可能结果，而各种结果出现的可能性不一样，为了进行确切的推断，我们用一个数值来表示事件发生的可能性大小。这种度量随机事件发生可能性大小的数值称为事件的概率，并将事件 A 的概率记为 $P(A)$。下面具体讨论事件的概率。

一、事件的频率

在相同条件下，做 n 次试验，设事件 A 发生了 n_A 次，则称 $\frac{n_A}{n}$ 为事件 A 发生的频率，记作

$$f_n(A)=\frac{n_A}{n} \tag{1.1}$$

显然，$0 \leqslant f_n(A) \leqslant 1$。

例如，很多人做过掷均匀硬币的试验，设 A 表示“出现正面”，结果如表 1－2 所示。

表 1－2

实验者	n	n_A	$f_n(A)$
蒲丰	4040	2048	0.5070
K·皮尔逊	12000	6019	0.5016
K·皮尔逊	24000	12012	0.5005

容易看出，随着试验次数的增多，频率 $f_n(A)$ 有接近 0.5 的趋势。

一般来说，一个随机事件 A 在 n 次重复试验中出现的频率为 $f_n(A)$，当试验次数越来越多时，$f_n(A)$ 将在一个常数 p 附近摆动，且逐渐稳定于这个常数，这就是“频率的稳定性”。它是隐藏在随机现象中的规律，即常说的统计规律性。

二、概率的定义

1. 概率的统计定义

定义 1 在相同条件下，重复进行 n 次试验，其中事件 A 发生了 n_A 次，当试验次数 n

充分大时，事件 A 的频率 $\frac{n_A}{n}$ 将稳定在某一个常数 p 附近，则称此常数 p 为事件 A 出现的概率。记作

$$P(A)=p \tag{1.2}$$

当 n 充分大时，根据频率的稳定性，我们可以用频率代替概率，即

$$P(A)=\frac{n_A}{n} \tag*{(1.2)$'$}$$

显然，$0\leqslant P(A)\leqslant 1$，$P(\Omega)=1$，$P(\varnothing)=0$。

2. 概率的古典定义

定义 2 设随机试验 E 的样本空间 Ω，Ω 中所含基本事件总数为 n，A 为随机试验 E 的任意一个事件，若满足条件：

（1）Ω 中基本事件总数 n 有限，称为“有限性”；

（2）Ω 中每个基本事件发生的可能性相同，称为“等可能性”

设事件 A 包含的基本事件数为 n_A，则事件 A 发生的概率为

$$P(A)=\frac{n_A}{n} \tag{1.3}$$

利用此定义计算时应该注意有限性和等可能性这两个条件。

古典概率模型也称等可能试验概型，因为它是概率论发展初期主要研究的对象，故称古典概型。

下面举例说明定义的用法。

【例 10】 掷一枚均匀硬币，求出现正面的概率。

解： 因为掷一枚均匀硬币只可能出现“正面向上”或“反面向上”两个结果，所以样本空间为：

Ω = {正面向上，反面向上}，即 $n=2$。由于硬币是均匀的，所以出现正面与反面是等可能的。设 A 表示“正面向上”，即

A = {正面向上}，所以 $n_A=1$，于是

$$P(A)=\frac{n_A}{n}=\frac{1}{2}$$

【例 11】 掷一均匀骰子，求：

（1）出现 6 点的概率；

（2）出现偶数点的概率。

解：（1）随机掷一次骰子可能出现“1”点，出现“2”点……出现“6”点，共有 6 种可能，因此样本空间为

$$\Omega=\{1,2,3,4,5,6\},\ n=6$$

因骰子是均匀的，所以出现每个点的机会相同，设 A 表示“出现 6 点”，即 A = {6}，$n_A=1$，于是

$$P(\mathrm{A})=\frac{n_{\mathrm{A}}}{n}=\frac{1}{6}$$

（2）因 $n=6$，设 B 表示“出现偶数点”，即 $\mathrm{B}=\{2,4,6\}$，$n_{\mathrm{B}}=3$，于是

$$P(\mathrm{B})=\frac{n_{\mathrm{B}}}{n}=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$$

实际解题时，不必写出样本空间，只求出 n 及 n_{A} 即可。

【例 12】 一付扑克牌共 54 张，任取一张，求它是黑桃的概率。

解：因 54 张牌均不相同，任取一张，每张出现的可能性相同，所以 $n=54$。设 A 表示“任取一张是黑桃”，$n_{\mathrm{A}}=13$，故

$$P(\mathrm{A})=\frac{n_{\mathrm{A}}}{n}=\frac{13}{54}$$

如果以花色为基本事件，共 5 种花色，即 $\Omega=\{$黑桃，红桃，梅花，方块，王$\}$，$n=5$。

设 A 表示“黑桃”，则 $n_{\mathrm{A}}=1$，于是

$$P(\mathrm{A})=\frac{n_{\mathrm{A}}}{n}=\frac{1}{5}$$

此种解法等可能性被破坏了，所以得出的结果是错误的。

若题目的条件改为：一付扑克牌无大小王共 52 张，从中任取一张，求它是黑桃的概率，则以张数或花色为基本事件求解均正确。

即：（1）以张数为基本事件，则

$$P(\mathrm{A})=\frac{n_{\mathrm{A}}}{n}=\frac{13}{52}=\frac{1}{4}$$

（2）以花色为基本事件，则

$$P(\mathrm{A})=\frac{n_{\mathrm{A}}}{n}=\frac{1}{4}$$

（因四种花色取哪一种是等可能的，故采用花色作为基本事件。）

通过以上几个简单的例子，说明用古典定义求概率时，一定要严格把握条件，不能盲目套公式，否则会出现错误的结果。

三、概率的性质

性质 1 $0\leqslant P(\mathrm{A})\leqslant 1$，$P(\varnothing)=0$，$P(\Omega)=1$

性质 2 设事件 A 与 B 互不相容，则有

$$P(\mathrm{A}+\mathrm{B})=P(\mathrm{A})+P(\mathrm{B}) \tag{1.4}$$

即两个互斥事件和的概率等于两个事件概率之和。

证明：设总的试验次数为 n，事件 A 与 B 发生的次数分别为 n_A，n_B，当试验次数 n 充分大时，频率 $\frac{n_A}{n}$，$\frac{n_B}{n}$，$\frac{n_A+n_B}{n}$ 将分别在常数 $P(A)$，$P(B)$，$P(A+B)$ 附近摆动，并随着 n 的增加越来越接近它们。因为 $\frac{n_A}{n}+\frac{n_B}{n}=\frac{n_A+n_B}{n}$，以频率代替概率，有 $P(A+B)=P(A)+P(B)$（对古典概型更为明显）。

推论(1)　若事件 A_1，A_2，…，A_n 两两互斥，则有

$$P\left(\sum_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i) \tag{1.5}$$

同样可推得，若事件 A_1，A_2，…，A_n，…两两互斥，则有

$$P\left(\sum_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i) \tag{1.6}$$

推论(2)　对立事件的概率和等于 1。

即 $P(A)+P(\overline{A})=1$ 或 $P(A)=1-P(\overline{A})$，后一种表示法在概率计算中常常用到。

推论(3)　若 $A\subset B$，则有

$$P(B-A)=P(B)-P(A) \tag{1.7}$$

证明：如图 1－8 所示。因 $B=(B-A)+A$，且 $A(B-A)=\varnothing$，故

$$P(B)=P(A+(B-A))=P(A)+P(B-A)$$

即

$$P(B-A)=P(B)-P(A)$$

也可得出

$$P(B)\geqslant P(A) \tag{1.8}$$

性质 3　设 A，B 为任意两个随机事件，则

$$P(A+B)=P(A)+P(B)-P(AB) \tag{1.9}$$

证明：如图 1－9 所示。

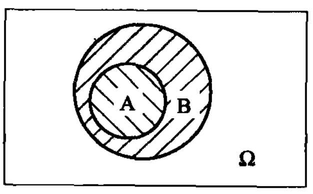

图 1－8

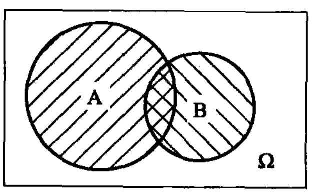

图 1－9

因 $A+B=(A-AB)+B$，且 $(A-AB)B=\varnothing$，$A\supset AB$，故

$$P(A+B)=P((A-AB)+B)=P(A-AB)+P(B)=P(A)-P(AB)+P(B)$$

即

$$P(A+B)=P(A)+P(B)-P(AB)$$

性质 3 可以推广到 n 个事件的情况。当 $n=3$ 时，有

$$P(A_1+A_2+A_3)=P(A_1)+P(A_2)+P(A_3)-P(A_1A_2)-P(A_1A_3)$$
$$-P(A_2A_3)+P(A_1A_2A_3)$$

以上均称为概率的加法公式。

四、例题分析

1. 抽球模型

抽球问题可分为不放回抽取与放回抽取两种情况，下面就不放回抽取详细分析，对不放回抽取搞清了，则放回抽取问题就迎刃而解了。

（1）不放回抽球模型

【例 13】 设袋中有 6 个球，其中 4 个白球，2 个红球，从袋中任取 2 球，不放回。

求：① 取得两个白球的概率；② 恰有一个白球的概率；③ 至少有一个白球的概率。

解： 设 A_1 表示"取得两个白球"，A_2 表示"恰有一个白球"，A_3 表示"至少有一个白球"。

本题中，白球与红球的数目不等，因此不能以颜色作为基本事件。为满足等可能性要求，先对 6 个球进行编号，其编号为白$_1$ 白$_2$ 白$_3$ 白$_4$ 红$_5$ 红$_6$，这样任取一球，则每个球抽到的可能性就相同了。基本事件总数 n 的值是从 6 个元素中任取一个，共有 $C_6^1=6$ 种可能，再从剩下的 5 个元素中任取一个，共有 $C_5^1=5$ 种可能，由乘法原理，$n=C_6^1C_5^1=30$。

① 同理，事件 A_1 的基本事件个数 $n_{A_1}=C_4^1C_3^1=12$

$$P(A_1)=\frac{n_{A_1}}{n}=\frac{C_4^1C_3^1}{C_6^1C_5^1}=\frac{12}{30}=\frac{2}{5}$$

② n_{A_2}的值除用排列组合知识外，还用到乘法原理和加法原理，$n_{A_2}=C_4^1C_2^1+C_2^1C_4^1=16$

"恰有"一词无顺序，恰有一个白球包含第一个白第二个红和第一个红第二个白两种情况。

$$P(A_2)=\frac{C_4^1C_2^1}{C_6^1C_5^1}+\frac{C_2^1C_4^1}{C_6^1C_5^1}=\frac{16}{30}=\frac{8}{15}$$

③ 同上：$P(A_3)=P(\text{至少一白})$

"至少一白"包含"恰有一白"和"恰有两白"两种情况，因此，$P(\text{至少一白})=P(\text{恰有一白}+\text{恰有两白})$。根据互斥性，有

$$P(\text{至少一白})=P(\text{恰有一白})+P(\text{恰有两白})=\frac{C_4^1C_2^1+C_2^1C_4^1}{C_6^1C_5^1}+\frac{C_4^1C_3^1}{C_6^1C_5^1}=\frac{14}{15}$$

即
$$P(A_3)=\frac{14}{15}$$

或
$$P(A_3)=1-P(\overline{A_3})=1-P(\text{恰有两红})=1-\frac{C_2^1C_1^1}{C_6^1C_5^1}=1-\frac{2}{30}=\frac{14}{15}$$

（2）放回抽球模型

若例 13 中做放回抽球，则 $n=C_6^1C_6^1=36$，即第一次从 6 个元素中任取一个，共有

$C_6^1=6$ 种取法，第二次仍从 6 个元素中任取一个，有 $C_6^1=6$ 种取法。然后用乘法原理，共有 $C_6^1C_6^1=36$ 种取法。其他做法完全类似。

$$n_{A_1}=C_4^1C_4^1=16 \quad \therefore\ P(A_1)=\frac{C_4^1C_4^1}{C_6^1C_6^1}=\frac{16}{36}=\frac{4}{9}$$

$$n_{A_2}=C_4^1C_2^1+C_2^1C_4^1=16 \quad \therefore\ P(A_2)=\frac{C_4^1C_2^1+C_2^1C_4^1}{C_6^1C_6^1}=\frac{16}{36}=\frac{4}{9}$$

$$n_{A_3}=C_4^1C_2^1+C_2^1C_4^1+C_4^1C_4^1=32 \quad \therefore\ P(A_3)=\frac{C_4^1C_2^1+C_2^1C_4^1+C_4^1C_4^1}{C_6^1C_6^1}=\frac{32}{36}=\frac{8}{9}$$

或
$$P(A_3)=1-P(\overline{A}_3)=1-\frac{C_2^1C_2^1}{C_6^1C_6^1}=1-\frac{4}{36}=\frac{32}{36}=\frac{8}{9}$$

超几何概率：设有 N 个元素可以分为 N_1，N_2 两部分，且 $N_1+N_2=N$，试验 E 为：从 N 个中任取 n 个元素，不放回，求这 n 个元素中恰有 m 个元素属于 N_1（或 N_2）的概率。

设 A 表示"n 个元素中恰有 m 个元素属于 N_1"，则超几何概率公式为

$$P(A)=\frac{C_{N_1}^{m}C_{N_2}^{n-m}}{C_N^n} \tag{1.10}$$

超几何概率在现实中，尤其是在不放回抽样检验中经常用到，特别是破坏性检验，样品不能再放回。例如，从含有 M 件次品的 N 件产品中，不放回地抽取 n 件，则抽到的次品数恰有 m 件的概率为

$$\frac{C_M^mC_{N-M}^{n-m}}{C_N^n}$$

在例 13 中，做不放回抽球模型满足超几何概率的条件，由式（1.10）有

$$P(A_1)=\frac{C_4^2C_2^0}{C_6^2}=\frac{6}{15}=\frac{2}{5}$$

$$P(A_2)=\frac{C_4^1C_2^1}{C_6^2}=\frac{8}{15}$$

$$P(A_3)=P(\text{至少一白})=P(\text{恰有一白})+P(\text{恰有两白})=\frac{C_4^1C_2^1}{C_6^2}+\frac{C_4^2C_2^0}{C_6^2}=\frac{8}{15}+\frac{6}{15}=\frac{14}{15}$$

该公式可推广到总元素个数 N 可分解为多组的情形。

【例 14】 袋中有 10 个球，分别编有 1 ~ 10 号编码，从中任取 3 球，不放回。求：

（1）最小号码是 5 的概率；

（2）最大号码是 7 的概率。

解：（1）由题意，5 号是取定的，因此本题可做如下分割，即把 N 分成 N_1，N_2，N_3 三部分，求最小号码是 5，即从 N_2 中取出 5 号，再从 N_3 中取出另外两个号即可，如