Mathematical Modeling

数学建模

沈继红 高振滨 张晓威 主编

清华大学出版社

数学建模

沈继红 高振滨 张晓威 主编

清华大学出版社
北 京

内 容 简 介

快速发展的科技本质上是一种数学技术的跨越，因而越来越多的行业——有些是数学应用的非传统行业如社会学、生态学、农业学等——渴求数学的参与。本书从数学建模的产生开始，全面而细致地讲解数学建模在解决各类实际问题中的应用。本书力图打破数学建模的神秘感，各节完全从真实的问题入手，让读者体验从问题提出到数学建模再到问题解决的亲身感受。通过本书，读者可以掌握基本的数学建模过程、方法和技巧。我们试图通过本书使读者能够搭建起从客观世界到数学理论的一座桥梁，从而实现数学知识与客观问题的对接。

本书可作为大专院校本科生数学建模课程的教材，也可以作为工程技术人员自学的参考书籍。

图书在版编目（CIP）数据

数学建模 / 沈继红，高振滨，张晓威主编．--北京：清华大学出版社，2011.10
ISBN 978-7-302-26357-9

Ⅰ．①数…　Ⅱ．①沈…　②高…　③张…　Ⅲ．①数学模型　Ⅳ．①O141.4

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2011)第 156649 号

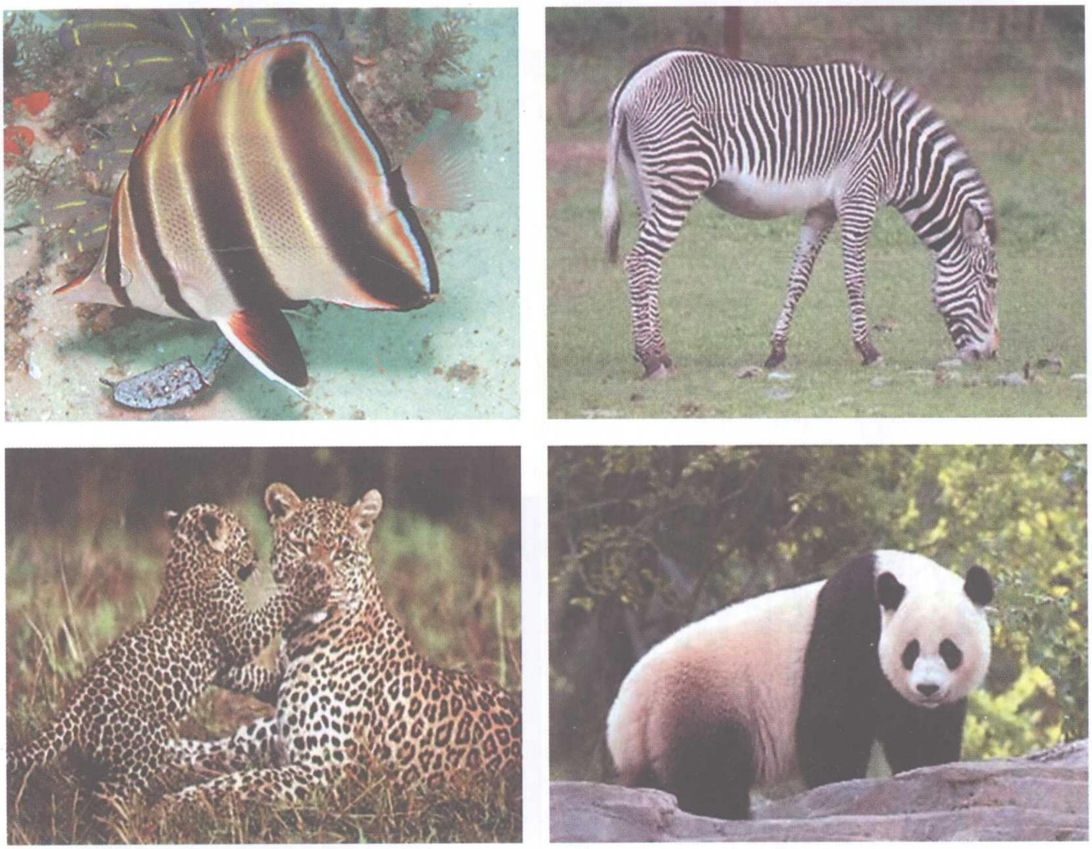
责任编辑：石　磊　赵从棉
责任校对：赵丽敏
责任印制：李红英

出版发行：清华大学出版社　　　　**地　　址**：北京清华大学学研大厦 A 座
http://www.tup.com.cn　　　　**邮　　编**：100084
社 总 机：010-62770175　　　　**邮　　购**：010-62786544
投稿与读者服务：010-62776969，c-service@tup.tsinghua.edu.cn
质 量 反 馈：010-62772015，zhiliang@tup.tsinghua.edu.cn
印 装 者：清华大学印刷厂
经　　销：全国新华书店
开　　本：185×230　　**印　张**：13.25　　**插　页**：2　　**字　数**：293 千字
版　　次：2011 年 10 月第 1 版　　**印　次**：2011 年 10 月第 1 次印刷
印　　数：1～4000
定　　价：25.00 元

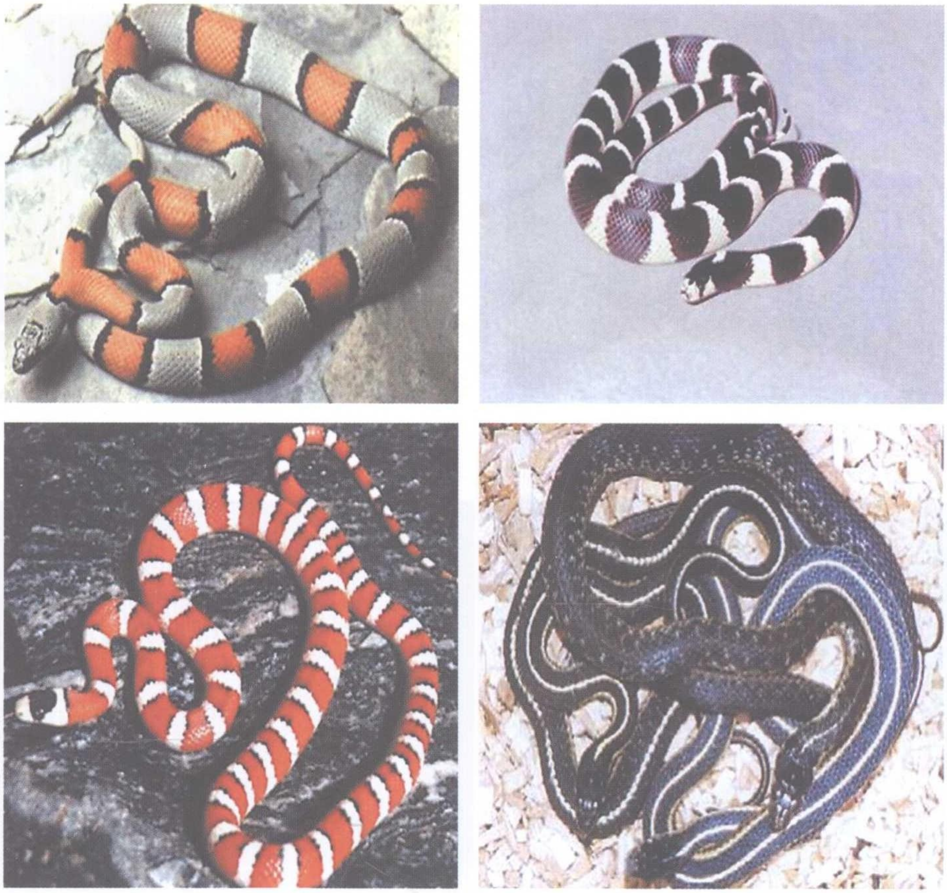
产品编号：042041-01

彩图 2.11

彩图 3.10

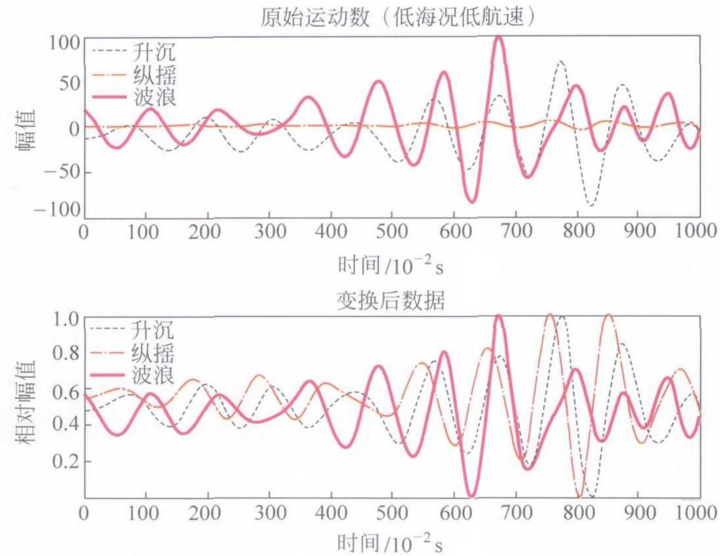


彩图 3.14

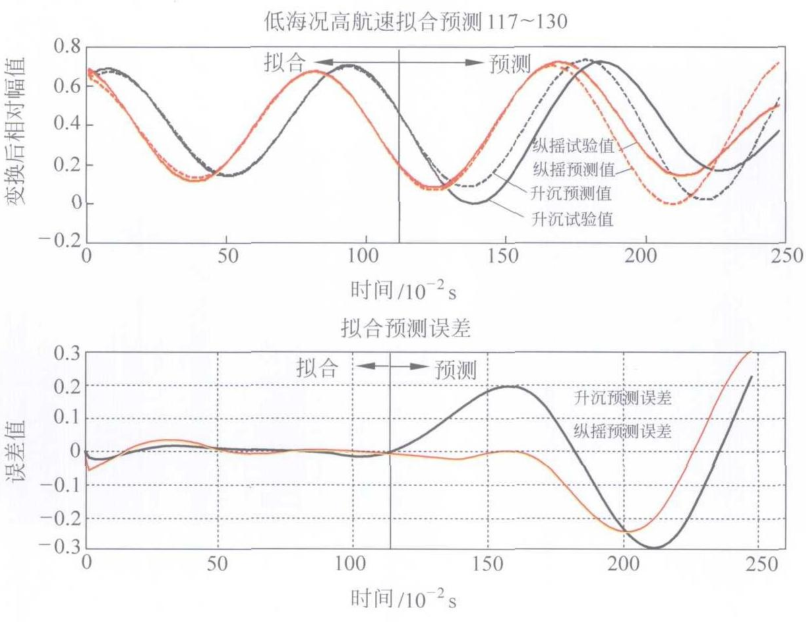


彩图 3.15

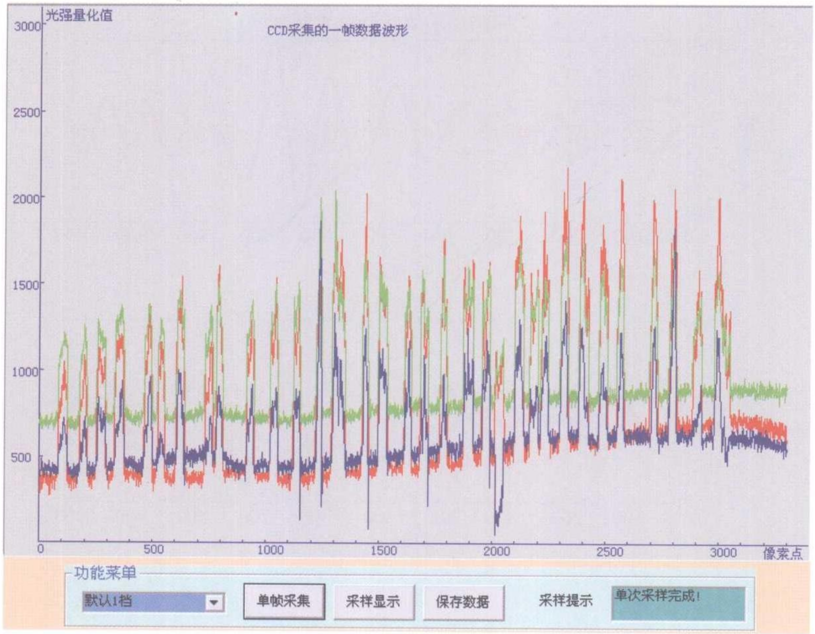
彩图 3.16


原始运动数（低海况低航速）
升沉
纵摇
波浪
幅值
时间/10^{-2}s
变换后数据
升沉
纵摇
波浪
相对幅值
时间/10^{-2}s

彩图 7.5


低海况高航速拟合预测 117~130
拟合
预测
纵摇试验值
纵摇预测值
升沉预测值
升沉试验值
变换后相对幅值
时间/10^{-2}s
拟合预测误差
拟合
预测
升沉预测误差
纵摇预测误差
误差值
时间/10^{-2}s

彩图 7.7



彩图 8.15

彩图 10.1

彩图 10.2

前 言

经常有人问我，什么叫数学建模？ 我说，简单地讲，就是利用数学理论对实际问题进行模拟。 看到对方有些狐疑，我继续解释——比如 2010 年冰岛火山爆发，火山灰四处飘逸，造成英国、德国等许多欧洲国家的航班取消，有人在网上宣布，火山灰也会飘到中国，形成酸雨，劝大家下雨时一定躲避。 消息很快不胫而走，造成一定程度的恐慌。 这时，有专家辟谣，讲火山灰飘到中国已经微乎其微，根本形成不了酸雨。 到底哪种说法对？ 得有一个科学的说法使人信服。 其实，火山灰的扩散是一个自然现象，可以建立一个数学模型对这样一个过程进行模拟，最终算出火山灰飘到中国的浓度，也自然会科学地回答你，中国是否会形成酸雨。 这个过程就是数学建模。

数学建模并不是新的概念，人类在不断认识自然并利用自然为自身造福的过程中，数学体系在逐步建立与完善，数学建模也一直伴随着人类解决自然界或生产实践中的各类难题。 20 世纪后半叶，数学开始全面介入到从日常生活到国际事务的方方面面，其应用领域已远远超出传统的力学、天文学等领域，逐步渗透到经济、社会、生态、农业、体育乃至军事活动中。

数学建模作为一门大学的数学课程，已经成为大部分高等学校的共识。 本书的作者从事数学建模的教学及竞赛辅导工作已有 20 年，对数学建模的教学有着诸多体会。 基于多年的教学经历，我们在撰写本书时极力突出以下几个特点。

（1）结构上的数学化。 本书主要作为一本大学阶段的数学建模教科书，或者作为数学建模的一本入门教材，其基点落在引领读者梳理数学与客观世界的关系，或者说是沿着数学的脉络切入客观世界。 这样做看起来迎合了数学的特点，而实际上，多少有点与数学建模的真实含义背道而驰。 数学建模正常的思路应该是——先给出实际问题，然后从问题入手考虑如何对其建立数学模型。 但是，作为一本教材，我们考虑还是应该侧重于讲解如何搭建数学与客观世界的桥梁，从这个意义上讲，按照数学分支进行章节的分类更易于让读者对数学建模有一个整体的认识。

（2）内容上的可读性。 当然，我们不想让结构上的安排混淆数学建模的真实含义。 实际上，我们在每个模型的编排上还是尽量还原客观问题的本来面目。 因此，每个数学模型都具有强烈的原问题驱动性。 从实际问题入手是叙述每个模型的基本特征。 换句话说，在每个模型中，问题是占有主导地位的，解决问题着重强调数学模型的建立，而数学理论的讲解则在其次。 在阐述数学的知识时，我们基本上采取说明式的方法阐述数学的

原理和思想，省略了大量的定理证明。我们尽量在数学的描述上做到简练、实用。

（3）问题的时代真实感。我们还注意到，虽然数学理论是经典的，但数学建模完全可以具有时代性。我们希望书中的实际问题离读者不要太远，否则，客观问题的真实性会因为时代的久远而显得模糊。我们一方面搜集了生活中人们经常碰到的问题，同时也搜集了近些年发生的事情或实际问题，以使读者更能体会数学建模的应用性和威力。

从发展的角度讲，数学的知识是无限的。数学的应用与技巧千变万化，难以穷尽。因此，想通过大量的例子来涵盖数学建模的全部无异于九天揽月。我们希望通过本书尽量给读者一个整体的解决实际问题的数学建模过程。

数学建模涉及的数学分支众多，尤其是我们希望更多的新的东西加入到本书中来，因此，在编写这本书时吸收了许多教师的加入。本书由沈继红、高振滨及张晓威主编，罗跃生、朱磊、王淑娟、戴运桃、许丽艳、徐耀群、孙薇、衣凤岐、柴艳有、周双红、廉春波、郭金龙参与了编写，书中很多模型是作者们最近取得的成果。另外，一些研究生帮助整理了校对格式，在此表示感谢。

由于水平有限，书中的错误及疏漏之处在所难免，诚望专家和读者提出批评。

编　者

2011.6.4

目　录

第1章　数学建模概论

我们以及我们的世界太需要数学了，但人们却往往视而不见。自从人类萌发了认识自然、改造自然之念，幻想着改造自然之时，数学便一直成为人们手中的有力武器。牛顿的万有引力定律、伽利略发明的望远镜让世界为之震惊，其关键理论却是数学。然而，社会的发展却使数学日益脱离自然的轨道，逐渐发展成高深莫测的"专项技巧"。数学被神化，同时，又被束之高阁。

近半个世纪以来，数学的形象有了很大的变化，数学已经不再单纯是数学家与少数物理学家、天文学家、力学家手中的神秘武器，它越来越深入地应用到各行各业之中，几乎在人类社会生活的每个角落都在显示它的无穷威力。这一点尤其表现在生物、政治、经济、体育乃至军事等数学应用的非传统领域。数学甚至可以渗透到人类难以琢磨的情感领域——《自然》杂志上登载了匈牙利与美国的科学家的一份研究报告，其内容是关于预测友谊是否会保持长久的一个数学公式。我们看到，数学不再仅仅作为一种工具和手段，而日益成为一种"技术"参与到实际问题中。近年来，随着计算机技术的不断进步，数学的应用更得到突飞猛进的发展。

利用数学方法解决实际问题时，首先要进行的工作是建立数学模型，然后才能在此模型的基础上对实际问题进行理论求解及分析。需要指出的是，虽然数学在解决实际问题时会起到关键的作用，但数学模型的建立要符合实际情况。建立一个符合实际情况的数学模型是我们解决实际问题的关键之一。

1.1　数学模型概念

或许我们对客观实际中的模型并不陌生。敌对双方在某地区作战时，都务必需要这个地区的主体作战地形模型；在采煤开矿或打井时，我们需要描述本地区的地质结构的地形图；出差或旅游到外地，总要买一张注明城市中各种地名及交通路线的交通图；而在编制计算机程序时，我们往往要先画出框图。我们看到，这些图能够简单明了地说明我们所需要事物的特征，从而帮助我们顺利地解决各种实际问题。

模型在我们的生活中也是无处不在的。进入科技展厅，我们会看到水电站模型、人造卫星模型；游逛魔幻城，我们会对各种几乎逼真的模拟物而惊诧万分；为了留念，我们会与美丽的风景一起留在照片上。还有各种动物或飞机、汽车等儿童玩具，这些以不同方式被缩小了

的客观事物都是我们生活中极平常的模型。

一般地说，模型是我们所研究的客观事物有关属性的模拟，它应当具有事物中我们关心和需要的主要特性。

当然，数学模型较以上实物模型或形象模型复杂和抽象得多，它是运用数学的语言或工具，对部分现实世界的信息（现象、数据等）加以翻译、归纳的产物。数学模型经过演绎、求解以及推断，给出数学上的分析、预报、决策或控制，再经过翻译和解释，回到现实世界之中。

最后，这些推断或结果必须经过实际的检验，完成实践——理论——实践这一循环。如果检验的结果是正确的或基本正确的，即可用来指导实际，否则，要重新考虑翻译、归纳的过程，修改数学模型。

华盛顿大学的数学家詹姆斯·默里教授在 2003 年 8 月 7 日举行的一个国际会议上提出了两个简单的数学公式，并称可以根据这两个公式成功地预测新婚夫妇婚姻的牢固度。默里教授用 10 年的时间对 100 对夫妇进行了相关的测验。他让新婚夫妇与心理医生就性、孩子、金钱等话题进行交谈，并给新婚夫妇在谈话过程中的表情或手势打分。积极的反应加分，消极的反应则减分。默里教授根据这些分数进行分析研究，逐渐得出了针对丈夫及妻子的两个等式。根据两个等式的平衡性，就可预测夫妇二人今后的婚姻状况。这听起来有点儿悬，但默里教授称这种测验方法的准确率可以达到 94%。作为一种模型，当然要经得起客观实际的考验。事实上，默里教授每隔两年就要对照参加测验的夫妇的婚姻状况来检测公式的正确性。

具体地说，作为一种数学方法，数学模型是为了某个特定的目的，在做出一些必要的简化假设下，运用适当的数学工具得到一个数学结构。它或者能够解释特定现象的现实性态，或者能够预测对象的未来性态，或者能够提供处理对象的最优决策或控制。

1.2 一个简单的数学模型实例

一辆汽车在拐弯时急刹车，结果冲到路边的沟里（见图 1.1），交通警察立即赶到了事故现场。司机申辩说，当他进入弯道时刹车失灵，他还一口咬定，进入弯道时其车速为每小时 40 英里（这是该路的速度上限，约合每秒 17.92 m）。警察验车时证实该车的制动器在事故发生时确实失灵，然而，司机所说的车速是否真实可信呢？

现在，让我们帮警察计算一下司机所报速度的真实性。

连接刹车痕迹的初始点和终点，用 x 表示沿连线汽车横向所走出的距离，用 y 表示竖直的距离，如图 1.2 及表 1.1 所示。

表 1.1 m

x	0	3	6	9	12	15	16.6	18	21	24	27	30	33.3
y	0	1.19	2.15	2.82	3.28	3.53	3.55	3.54	3.31	2.89	2.22	1.29	0

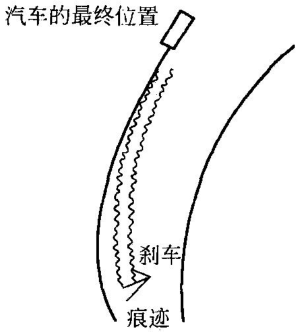


图　1.1

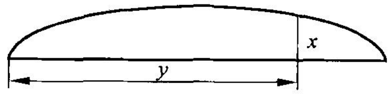


图　1.2

在上面的表中，我们给出了外侧刹车痕迹的有关值，而且，经过测量还发现，该车并没有偏离它所行驶的转弯路线，也就是说，它的车头一直指向切线方向。可以假设，该车的重心是沿一个半径为 r 的圆作圆周运动。另外，在出事过程中，制动器失灵，而司机又不可能去踩油门加速，因此，汽车在整个过程中无外力作用，我们可以进一步假设汽车的重心作匀速圆周运动。

假设摩擦力作用在该车速度的法线方向上，并设汽车的速度为 v。显然，摩擦力提供了向心力，设摩擦系数为 μ，则有

$$\mu mg = m\frac{v^2}{r}$$

其中 m 为汽车质量，g 为重力加速度。由上式易得

$$v = \sqrt{\mu g r} \tag{1-1}$$

如何计算圆周半径 r？如图 1.3 所示，假设已知弦的长度为 c，弓形的高度为 h，由勾股定理知

$$r^2 = (r-h)^2 + \left(\frac{c}{2}\right)^2$$

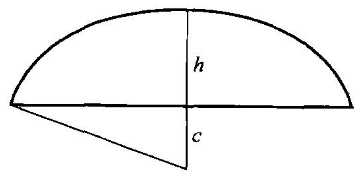


图　1.3

由表 1.1 中数据很容易算出 $c=33.27$，$h=3.55$ 后，得

$$r = 40.75 \text{ m}$$

根据实际路面与汽车轮胎的情况，可以测量出摩擦系数 μ，经过实际测试得到

$$\mu g = 8.175 \text{ m/s}^2$$

将此结果代入式(1-1)中，得

$$v = 18.25 \text{ m/s}$$

此结果比司机所报速度(17.92 m/s)略大。但是，我们不得不考虑计算半径 r 及测试时的误差。如果误差允许在 10%以内，无疑，计算结果对司机是相当有利的。

1.3 建立模型的方法、步骤和模型的分类

建立数学模型主要采用机理分析与统计分析两种方法。机理分析法是指人们根据客观事物的特性，分析其内部的机理，弄清其因果关系，再在适当的假设简化下，利用合适的数学工具得到描述事物特征的数学模型。统计分析法是指人们一时得不到事物的特征机理，便通过测试得到一串数据，再利用数理统计等知识对这串数据进行处理，从而得到最终的数学模型。

建立数学模型需要哪些步骤并没有固定的模式，下面只是按照一般情况，提出一个建立数学模型的大体过程。

1. 建模准备

要了解问题的实际背景、明确建立模型的目的，掌握对象的各种信息如统计数据等，弄清实际对象的特征，总之，是要做好建立模型的准备工作。这一步往往要大量查阅资料，请教专家，以便对所要建立的数学模型问题有透彻的了解。

2. 模型假设

根据实际对象的特性和建立模型的目的，对问题进行必要的简化，并且用精确的语言作出假设，这是建立模型的第二步，也可以说是关键的一步。有时，假设作得过于详细，试图将复杂的实际现象的各个因素都考虑进去，可能很难进行下一步的工作。所以，要善于辨别问题的主要和次要方面，抓住主要因素，抛弃次要因素，尽量将问题均匀化、线性化。

3. 建立模型

根据所做的假设，运用适当的数学工具，建立各个量之间的等式或不等式的关系，列出表格，画出图形或确定其他数学结构，是建立数学模型的第三步。为了完成这项数学模型的主体工作，人们常常需要具有比较广阔的应用数学知识，除了微积分、微分方程、线性代数及概率统计等基础知识外，也许还会用到诸如数学规划、排队论、图论及对策论等。可以说，任何一个数学分支都可能应用到数学建模中去。当然，这并非要求我们对数学的各个分支都精通。而且，建模时还有一个原则，即尽量采用简单的数学工具，以便使更多的人能对我们所建立的数学模型有所理解并且能够使用它。

4. 模型求解

对上述建立的数学模型进行数学上的求解，包括解方程、画出图形、证明定理以及进行逻辑运算等。这部分将会用到传统的或近代的数学方法，特别是相关的计算机技术。

5. 模型分析

对上述求得的模型结果进行数学上的分析，有时是根据问题的性质，分析各变量之间的依赖关系或稳定性态；有时则根据所得的结果给出数学上的预测；有时给出数学上的最优决策或控制。

6. 模型检验

这一步是把模型分析的结果"翻译"回到实际对象中，用实际现象、数据等检验模型的合理性与实用性。显而易见，这一步对于模型的成败是非常重要的，并且是必不可少的。如果检验的结果不符合或部分不符合实际情况，那么，我们必须回到建模之初，修改、补充假设，重新建模，即按上面步骤做到模型检验这一步；如果检验结果与实际情况相符，则可进行最后的工作——模型应用。

有些模型难以接受实际的检验，如核战争等问题。还需指出的是，并非所有建模过程都要经过上述这些步骤，有时各个步骤之间的相互界限也并不十分明显。因此，在建模过程中不要局限于形式上的按部就班，重要的是，根据对象的特点和建模的目的，去粗取精，去伪存真，从简到繁，不断完善。

模型的分类很复杂，按照不同的考虑方式，有不同的分类方法，这里仅列出几种。

按照变量的情况，可分为离散型和连续型模型，也可分为确定型模型和随机模型；按照时间变化对模型的影响，可分为静态模型和动态模型；按照研究方法和对象的特征，有初等模型、优化模型、逻辑模型、稳定性模型、扩散模型等；按照研究对象的实际领域，有人口模型、交通模型、体育模型、生理模型、生态模型、经济模型、社会模型等；按照对研究对象的了解程度，有所谓的白箱模型、灰箱模型和黑箱模型。

1.4 开放性的数学思维

应当特别指出的是，要学会建立数学模型，除了要学会灵活应用数学知识外，还应当培养自己分析和解决问题的观察力、想象力和创造力。知识是有限的，而想象力和创造力却可使知识无限地延展。从这种意义上讲，掌握开放性的数学思维方法比获得严谨的理论知识更为重要。

古希腊有一个极善于诡辩的哲学家芝诺，他曾经认为，如果让乌龟先爬行一段路后再让阿基里斯（古希腊神话中善跑的英雄）去追它，那么阿基里斯将永远也追不上前者。芝诺的理论根据是：阿基里斯在追上乌龟前必须先到达乌龟的出发点，这时乌龟已向前爬了一段路程。如此分析下去，阿基里斯虽然离乌龟越来越近，但是却永远也追不上乌龟。这种结论虽然是错误的，但奇怪的是，从逻辑上讲，这种推理却没有任何问题。

下面，我们从数学的角度来分析一下这个问题。假设阿基里斯跑的时候乌龟已爬了