普通高等教育“十二五”规划教材

大学物理

（上册）

主　编　石永锋　叶必卿
主　审　张晓波

中国水利水电出版社
www.waterpub.com.cn

普通高等教育“十二五”规划教材

大学物理

（上册）

主　编　石永锋　叶必卿
主　审　张晓波

中国水利水电出版社
www.waterpub.com.cn

内 容 提 要

本书是根据教育部最新制订的《理工科非物理类专业大学物理课程教学基本要求（讨论稿）》，以大众化教育形式下对人才培养的要求为出发点，针对当前学生的特点编写而成。

本书思路清晰、表述简洁，重视物理思想和物理图像的描述，内容通俗易懂。配有丰富的习题，便于知识点的及时巩固。力争做到近代物理与经典物理的有机结合、物理理论与工程技术实际的有机结合。为了提高物理学的亲和力，每章后附有相关物理学家的生平简介。全书采用国际单位制，所有名词均以全国自然科学名词审定委员会 1988 年公布的基础物理学名词为准。全书共 19 章，分为上、下两册。本书是上册，共 10 章，包括：质点力学，刚体力学，静电场，磁场等内容。

本书可作为高等学校理工科非物理专业大学物理课程的教材或参考书使用，也可供其他专业和社会读者阅读。

图书在版编目（CIP）数据

大学物理. 上册 / 石永锋, 叶必卿主编. -- 北京 :
中国水利水电出版社, 2011.1
普通高等教育“十二五”规划教材
ISBN 978-7-5084-8321-4

Ⅰ. ①大… Ⅱ. ①石… ②叶… Ⅲ. ①物理学－高等学校－教材 Ⅳ. ①O4

中国版本图书馆CIP数据核字(2011)第008279号

书　　名	普通高等教育“十二五”规划教材 **大学物理（上册）**
作　　者	主编　石永锋　叶必卿　　主审　张晓波
出版发行	中国水利水电出版社 （北京市海淀区玉渊潭南路 1 号 D 座　100038） 网址：www.waterpub.com.cn E-mail：sales@waterpub.com.cn 电话：（010）68367658（营销中心）
经　　售	北京科水图书销售中心（零售） 电话：（010）88383994、63202643 全国各地新华书店和相关出版物销售网点
排　　版	中国水利水电出版社微机排版中心
印　　刷	北京市兴怀印刷厂
规　　格	184mm×260mm　16 开本　17 印张　403 千字
版　　次	2011 年 1 月第 1 版　2011 年 1 月第 1 次印刷
印　　数	0001—4000 册
定　　价	**30.00** 元

前言

QIANYAN

物理学是在人类探索自然奥秘的过程中形成的，是研究物质基本结构、基本运动形式以及物质之间相互作用规律的科学。物理学是从研究物体的机械运动规律开始发展起来的，后来又研究了热现象、电磁现象、光现象和辐射现象等。到了19世纪末物理学已经形成完整的体系，被称为经典物理学。在20世纪初的30年中，物理学经历了一场革命，相对论和量子力学诞生了。从此以后形成的物理学体系称为近代物理学。

物理学是一切自然科学的基础，在探讨物质结构和运动基本规律的进程中，每一次重大的发现和突破都会导致新领域的诞生和新方向的出现，同时也会伴随新的分支学科、交叉学科和新的技术学科的问世。在已经过去的100年间，物理学已经形成若干个系统、清晰的分支学科，例如力学、热学、声学、光学和电磁学等，同时也形成了激光、无线电、微电子、原子能等一些独立学科。我们在大学本科时代学到的知识基本上都是100～400年前的发现，尽管如此，这些古老的基础物理知识与今天乃至未来的人类生活和科技发展仍然有着密切的联系，上至航天技术、下到石油勘探，大到宇宙秘密的探索、小到计算机芯片的研制，样样都离不开物理学的基础作用。甚至似乎与自然科学无关的经济、金融、股票、政治等领域，也有人采用物理学的方法和概念进行研究，并取得令人信服的成果。可见，物理学作为所有自然科学中发展最早、最成熟，理论与实验相辅相成的一门定量化的学科，其成就不仅发展了物理学自身，而且已经成为新技术、新学科、新思维的原动力。物理学始终处在自然科学发展的最前列，它推动着技术的进步和创新，极大地影响着经济和社会的进步。2005年被联合国命名为“国际物理年”，这也是有史以来联合国第一次以单一学科命名的国际年。

随着时代的发展，青年人的兴趣和志向越来越多元化。特别是我国随着高等教育大众化步伐的加快，人才培养模式也随之发生了重大变化。因此，在新形势下为了适应21世纪对高素质人才的需要，如何讲授好大学物理这门课，是摆在高校物理教育工作者面前的首要任务。我们要以现代的观点审视传统的物理教学内容，充分利用各种现代化教育技术手段，将传统文本教学

资源与现代的动画、图形、图片和视频等教学素材进行全面的整合，在教学中将它们有机地结合起来，使学生获得最佳的学习效果。

本书在编写中充分考虑到了学生的物理基础和学习的实际状况，以“基本要求”中的核心内容作为本书的基本框架，通篇贯彻着“少而精”、“理论联系实际”的原则。在基本概念和基本理论的讲述中，力求简单明了、由浅入深、易读易懂、便于掌握。对于一般性的知识只作简单介绍，交代清楚基本的物理观念、给出重要的结论，再通过典型例子加深对这些结论的理解。对于必要的数学推导，在不失严密的情况下尽量从简，而将主要精力放在培养学生使用数学工具解决实际物理问题的能力。

本教材有意侧重例题、习题和问题的基础性、应用性和典型性的训练。部分题目与实际紧密联系，物理原理清楚，难度适中，有较强的实际应用意义和一定的趣味性。相信这些题目在引起学生操作兴趣的同时，可以加深理解本课程的基础知识和基本概念。本书的习题内容和数量选择尽量与教材内容相配合，也有少量有一定难度的习题，以满足对本课程有浓厚兴趣的学生的需要。

本书加强了与中学物理相关内容的衔接，同时也注意到中学物理课程改革对大学物理课程带来的可能影响。学生在浏览本教材的目录后会发现，书中的力学、热学、光学和电磁学等内容在中学已经学过了。其中的牛顿定律等内容在中学曾经做过很多的练习。但是在大学物理课中，我们将使用全新的数学工具（如微积分、矢量等）去研究这些领域。尽管这些内容学生并不陌生，但是他们仍然要以初学者的心态去认真钻研，必要时也得放弃一些中学时期形成的观念。此外，本教材中还有很多公式，但是它们并不具有同等的重要性，最基本的、核心的公式并不很多。学生应该花费一定的精力理解它们所蕴含的深刻物理意义，弄清楚它们适用于什么物理过程，描述了什么物理现象和物理图像。这些公式也不抽象，它们与我们的生活总是密切相关。如果你再能灵活地利用这些公式去解决实际问题，那么你的大学物理课程就学得相当不错了。

本书由浙江理工大学石永锋和叶必卿主编，浙江理工大学马春生老师绘制了本教材的部分插图，编写了各章后的科学家史话。浙江理工大学杜娟老师编写了本教材的全部习题。

由于作者水平所限，书中难免存在不当和错误之处，恳请同行专家和读者提出宝贵意见，编者将不胜感激。

编　者

2010年10月

于杭州西子湖畔

目录
MULU

第一章　质点的运动

物理学（physics）**是研究物质的结构及其运动基本规律的学科。**世界是物质的，一切物质都在作永不停息的运动。在物质的各种运动中，最基本、最普遍的运动形式是机械运动、分子热运动、电磁运动、原子和原子核内部的运动以及其他微观粒子的运动。

机械运动指一个物体相对于另一个物体的位置随时间的变化或者一个物体内部各部分之间的相对位置随时间的变化的运动。力学是研究机械运动规律的学科。力学一般分为运动学和动力学两大部分。**运动学描述物体的空间位置随时间变化的规律，**而不涉及物体运动改变的原因。

本章学习要点

（1）掌握位置矢量、位移、加速度等描述质点运动及运动变化的物理量；理解这些物理量的矢量性、瞬时性和相对性。

（2）理解运动方程的物理意义及其作用，掌握运用运动方程确定质点的位置、位移、速度和加速度的方法，以及已知质点运动的加速度和初始条件求解速度、运动方程的方法。

（3）能计算质点在平面内运动时的速度和加速度，以及质点作曲线运动（包括圆周运动）时的角速度、角加速度、切向加速度和法向加速度。

（4）理解速度、加速度合成定理，并会用它求解质点的相对运动问题。

第一节　质点　参考系　运动方程

一、质点

实际物体都具有质量、形状和大小。一般来说，物体在运动过程中，其内部各点的运动情况是各不相同的，并且物体的形状和大小也会发生变化。但在研究某些问题时，为了突出其主要性质，忽略次要性质，简化问题的研究，我们常常**忽略物体的形状和大小，将物体看作只有质量而没有形状和大小的理想几何点，称为质点**（particle）。

如果一个物体在运动过程中，其任意两点的连线的空间指向始终保持不变（称这种运动为平动），物体内各点就具有完全相同的速度和加速度，这时我们可以将它当作质点来处理，火车在平直的铁路上平稳行驶就属于这种情况；另外，如果一个物体到观察着的距离远远大于这个物体本身的几何线度，也可以将该物体当作质点来看待，在研究地球绕太阳公转时，由于地球到太阳的平均距离约为地球半径的 10^4 倍，这时可以忽略地球本身的大小和转动，将其当作质点来处理。

一个确定的物体能否抽象成质点，应视具体情况而定。一列火车在转弯时，其内部各点的运动情况并不相同，这时就不能再认为火车是一个质点了。

二、参考系和坐标系

自然界中所有的物体都在运动，不存在绝对静止的物体，这就是**运动的绝对性**。为了描述某物体的运动，必须选择另外一个物体作为参考，这个**为了描述物体的运动而被选作参考的物体称为参考系**（frame of reference）。

参考系的选择是任意的，但在描述某一个物体的运动时，如果**选取的参考系不同，对该物体运动的描述也不同，这就是运动描述的相对性**。例如，在相对地面作匀速运动的列车中，一颗螺丝钉从车的顶棚落下。如果以列车为参考系，螺丝钉作直线运动；但如果以地面为参考系，螺丝钉作曲线运动。因此，在描述一个物体的运动时，必须指明是对什么参考系而言的。

在地球上研究物体运动时，往往选地面作为参考系。以后如果没有特别说明，都是以地面作为参考系的。

有了参考系只能对物体运动作定性的描述，要想定量地表示物体在各时刻的位置，还需要**在参考系上建立一个计算系统，这就是坐标系**。在同一个参考系上选择不同的坐标系，物体位置的坐标是不相同的。最常用的坐标系是直角坐标系，此外还有自然坐标系、极坐标系、柱面坐标系、球面坐标系和广义坐标系等。

三、位置矢量和运动方程

为了确定质点 P 在某一时刻的位置和方向，我们**由坐标原点 O 向质点 P 作一条有方向的线段，称为位置矢量**（position vector），**简称位矢**，用$\vec{r}$来表示。

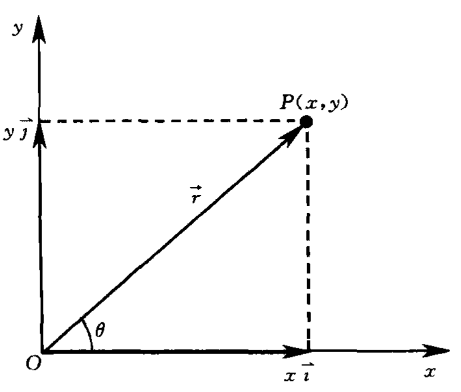

图 1-1

在图 1-1 的平面直角坐标系中，位矢 $\vec{r}$ 在 x 轴和 y 轴上的分量分别为 $x\vec{i}$ 和 $y\vec{j}$，其中$\vec{i}$、$\vec{j}$分别表示 x 轴和 y 轴的单位矢量，则位矢在平面直角坐标系中的表达式为

$$\vec{r}=x\vec{i}+y\vec{j} \tag{1-1}$$

位矢是既有大小、又有方向的物理量，其大小为

$$r=|\vec{r}|=\sqrt{x^2+y^2}$$

其方向用 $\vec{r}$ 与 x 轴的夹角 θ（称为**方向角**）表示，方向角的正切值为

$$\tan\theta=\frac{y}{x}$$

当质点相对于参考系运动时，用来确定质点方位的位矢 $\vec{r}$ 也会随时间变化，即位矢 $\vec{r}$ 是时间 t 的单值连续函数。**随时间变化的位矢**给出了质点在任一时刻的位置，它反映了质点的运动规律，我们称它为**质点的运动方程**。即

$$\vec{r}=\vec{r}(t) \tag{1-2}$$

质点运动方程的平面直角坐标表达式为

$$\vec{r}=x(t)\vec{i}+y(t)\vec{j} \tag{1-3}$$

质点运动过程中所走的路径称为质点运动的轨迹。描述质点运动轨迹的方程称为轨迹方程。如果质点运动的轨迹是一条直线，称这种运动为直线运动；如果质点运动的轨迹是一条曲线，称这种运动为曲线运动。

为了讨论问题方便，以上论述中我们都以二维情况为例，这种情况掌握了，推广到三维情况就不难了。

第二节　位移　速度　加速度

一、位移

为了描述质点在运动过程空间位置变化的大小和方向，我们引入位移的概念。

在图 1-2 的平面直角坐标系中，质点在 Δt 时间内从位置 P_1 沿曲线运动到位置 P_2，我们从 P_1 点到 P_2 点所作的矢径 $\Delta\vec{r}$，就是质点在 Δt 时间内的**位移矢量**，简称**位移**。从图中容易看出

$$\Delta\vec{r}=\vec{r}_2-\vec{r}_1$$

即质点在 Δt 时间内发生的位移等于质点在这段时间间隔内位矢的增量。

在平面直角坐标系中，$\vec{r}_1=x_1\vec{i}+y_1\vec{j}$，$\vec{r}_2=x_2\vec{i}+y_2\vec{j}$，因此

$$\Delta\vec{r}=(x_2\vec{i}+y_2\vec{j})-(x_1\vec{i}+y_1\vec{j})=(x_2-x_1)\vec{i}+(y_2-y_1)\vec{j}=\Delta x\vec{i}+\Delta y\vec{j}$$

位移的大小和方向分别为

$$|\Delta\vec{r}|=\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2} \quad \tan\alpha=\frac{\Delta y}{\Delta x}$$

式中：α 为位移矢量与 x 轴的夹角。

位移表示位置变化的实际效果，并不是质点所经历的路程。**路程是指质点实际运动的轨迹长度**，它是标量，通常用 Δs 表示。一般来说 $|\Delta\vec{r}|\neq\Delta s$，只有在 $\Delta t\to 0$ 的极限情况下，$|d\vec{r}|=ds$。

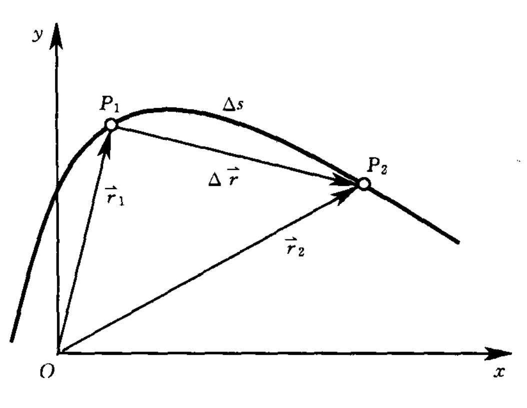

图 1-2

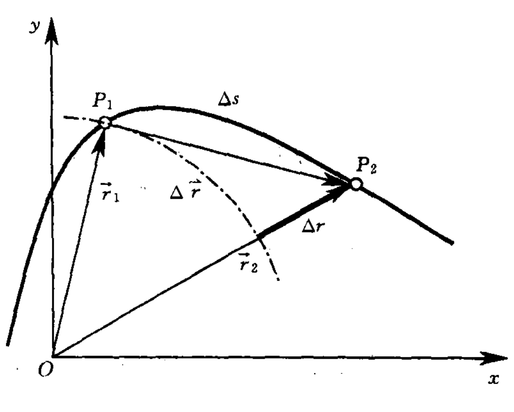

图 1-3

另外，位移的大小 $|\Delta\vec{r}|$ 与位矢大小的增量 Δr 是完全不同的两个量，如图 1－3 所示，Δt 时间内位矢的大小增量为

$$\Delta r=\Delta|\vec{r}|=|\vec{r}_1|-|\vec{r}_2|$$

二、速度

物体运动的快慢和方向用速度来描述。物体在作一般曲线运动时，在不同时刻的速度是不同的。

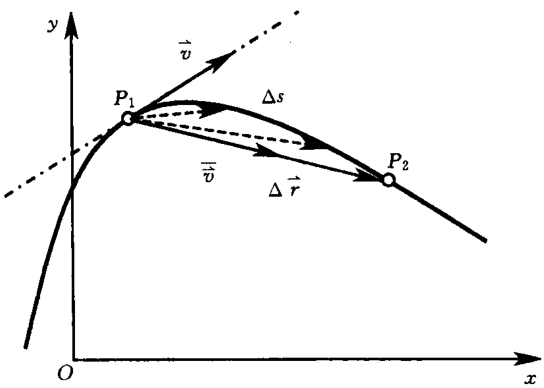

图 1－4

如图 1－4 所示，在 Δt 时间内质点的位移为 $\Delta\vec{r}$，则质点在这段时间内的平均速度定义为

$$\bar{\vec{v}}=\frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t}$$

平均速度是矢量，其方向与位移 $\Delta\vec{r}$ 的方向相同。如果时间间隔 Δt 不同，平均速度也不相同，所以在计算平均速度时，一定要强调是哪一段时间内的平均速度。

平均速度对质点的运动状态只能作粗略的描述。为了精确地描述质点运动的快慢程度和移动的方向，我们将时间 Δt 无限减小，当 $\Delta t\rightarrow 0$ 时，**平均速度的极限称为瞬时速度**（instantaneous velocity），**简称速度**，用 $\vec{v}$ 表示，即

$$\vec{v}=\lim_{\Delta t\rightarrow 0}\frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t}=\frac{d\vec{r}}{dt} \tag{1-4}$$

瞬时速度的方向与位移 $\Delta\vec{r}$ 的极限方向相同，由图 1－4 可以看出，$\Delta\vec{r}$ 的极限方向，即在 P_1 点瞬时速度的方向沿曲线在该点的切线方向，这个方向也是质点运动的方向。

在平面直角坐标系中，我们对运动方程式（1－3）两边对时间求导，得

$$\vec{v}=\frac{d\vec{r}}{dt}=\frac{dx}{dt}\vec{i}+\frac{dy}{dt}\vec{j}$$

因此，速度在 x、y 轴上的分量分别为

$$v_x=\frac{dx}{dt}\quad v_y=\frac{dy}{dt} \tag{1-5}$$

在已知 v_x、v_y 的情况下，速度的大小可以写为

$$v=\sqrt{v_x^2+v_y^2}$$

设速度与 x 轴的夹角为 α，容易得出

$$\tan\alpha=\frac{v_y}{v_x}$$

在 Δt 时间内，在单位时间内质点所通过的路程称为平均速率，即

$$\bar{v}=\frac{\Delta s}{\Delta t}$$

当 $\Delta t\to 0$ 时，**平均速率的极限称为瞬时速率**（instantaneous speed），**简称速率**（speed），即

$$v=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta s}{\Delta t}=\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} \tag{1-6}$$

下面我们讨论一下瞬时速度的大小与瞬时速率的关系。瞬时速度的大小可以写为

$$|\vec{v}|=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{|\Delta\vec{r}|}{\Delta t}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{|\Delta\vec{r}|}{\Delta s}\cdot\frac{\Delta s}{\Delta t}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{|\Delta\vec{r}|}{\Delta s}\cdot\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta s}{\Delta t}$$

由前面的叙述可知

$$\lim_{\Delta t\to 0}\frac{|\Delta\vec{r}|}{\Delta s}=1$$

因此

$$|\vec{v}|=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta s}{\Delta t}=\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}=v \tag{1-7}$$

式（1－7）表明，**质点瞬时速度的大小等于瞬时速率。**尽管如此，在一般情况下，质点在某段时间内的平均速度大小并不等于在这段时间内的平均速率。

三、加速度

加速度是描述速度变化快慢和变化方向的物理量。

在图 1－5 中，质点在 Δt 时间内从 P_1 点运动到 P_2 点，在 P_1 点和 P_2 点的速度分别为 $\vec{v}_1$ 和 $\vec{v}_2$，速度的增量用 $\Delta\vec{v}$ 来表示，则质点在这段时间内的平均加速度为

$$\bar{\vec{a}}=\frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t}$$

平均加速度是矢量，其方向与速度增量 $\Delta\vec{v}$ 的方向相同。从图 1－5 可以看出，$\Delta\vec{v}$ 的方向总是指向曲线的凹侧，因此平均加速度的方向也指向曲线的凹侧。

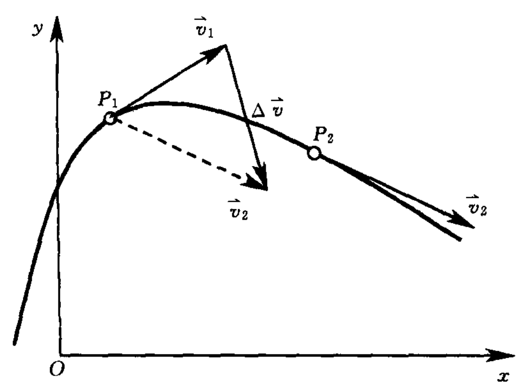

图 1－5

平均加速度只能对速度随时间变化的情况进行粗略的描述，为了精确地描述质点在各时刻速度的变化情况，我们将**当 $\Delta t\to 0$ 时，平均加速度的极限定义为瞬时加速度**（instantaneous acceleration），**简称加速度**，用 $\vec{a}$ 表示，即

$$\vec{a}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t}=\frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t} \tag{1-8}$$

因为 $\vec{v}=\frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t}$，所以加速度也可以表示为

$$\vec{a}=\frac{\mathrm{d}^2\vec{r}}{\mathrm{d}t^2} \tag{1-9}$$

可见，加速度既等于速度对时间的一阶导数，也等于位置矢量对时间的二阶导数。

瞬时加速度的方向与 $\Delta\vec{v}$ 的极限方向相同，而 $\Delta\vec{v}$ 的极限方向指向曲线的凹侧，因此 $\vec{a}$

的方向也指向曲线的凹侧。

在平面直角坐标系中，如果已知速度$\vec{v}=v_x\vec{i}+v_y\vec{j}$和运动方程$\vec{r}=x\vec{i}+y\vec{j}$，由式（1-8）、式（1-9）得加速度为

$$\vec{a}=\frac{dv_x}{dt}\vec{i}+\frac{dv_y}{dt}\vec{j}=\frac{d^2x}{dt^2}\vec{i}+\frac{d^2y}{dt^2}\vec{j}$$

即加速度在x、y轴上的分量分别为

$$a_x=\frac{dv_x}{dt}=\frac{d^2x}{dt^2}\quad a_y=\frac{dv_y}{dt}=\frac{d^2y}{dt^2}\tag{1-10}$$

加速度大小为

$$a=\sqrt{a_x^2+a_y^2}$$

设加速度与x轴的夹角为φ，则

$$\tan\varphi=\frac{a_y}{a_x}$$

四、直线运动情形

当质点作直线运动时，可以取运动所在的直线为x轴，$\vec{i}$为x轴的单位矢量，则在任意时刻质点的位矢、位移、速度和加速度分别为

$$\vec{r}=x\vec{i}\qquad\Delta\vec{r}=x\vec{i}-x_0\vec{i}=\Delta x\vec{i}$$

$$\vec{v}=v\vec{i}=\frac{dx}{dt}\vec{i}\qquad\vec{a}=a\vec{i}=\frac{dv}{dt}\vec{i}=\frac{d^2x}{d^2t}\vec{i}$$

其中x、Δx、v和a有一个共同特点，即当它们为正值时其对应的矢量与$\vec{i}$方向相同，反之与$\vec{i}$方向相反，也就是说它们的符号已经能够表示它们的方向，因此在质点作直线运动的情况下，我们往往直接用x、Δx、v和a表示任意时刻质点的位矢、位移、速度和加速度，而不必再采用上面的矢量形式。

【例1-1】 已知某质点在xOy平面内运动，其运动方程为

$$\vec{r}=t^3\vec{i}+(2t-1)\vec{j}$$

公式中的各个物理量均采用国际单位。试求该质点：

（1）从1s到2s时间内的位移。

（2）轨道方程。

（3）在$t=2$s时刻的速度和加速度的大小和方向。

解：（1）该质点在$t_1=1$s到$t_2=2$s时刻的位矢分别为

$$\vec{r}_1=1^3\vec{i}+(2\times1-1)\vec{j}=\vec{i}+\vec{j}$$

$$\vec{r}_2=2^3\vec{i}+(2\times2-1)\vec{j}=8\vec{i}+3\vec{j}$$

因此质点在这段时间内的位移为

$$\Delta\vec{r}=\vec{r}_2-\vec{r}_1=7\vec{i}+2\vec{j}$$

（2）由运动方程可知

$$x=t^3\quad y=2t-1$$

在以上两式中消去时间t即得质点运动的轨道方程为

$$x=\frac{1}{8}(y+1)^3$$

（3）由式（1－4）和式（1－9）得该质点在任意时刻的速度和加速度表达式分别为

$$\vec{v}=\frac{d\vec{r}}{dt}=3t^2\,\vec{i}+2\,\vec{j}$$

$$\vec{a}=\frac{d^2\vec{r}}{dt^2}=6t\,\vec{i}$$

则在 $t=2s$ 时刻的速度和加速度分别为

$$\vec{v}=12\,\vec{i}+2\,\vec{j}\quad \vec{a}=12\,\vec{i}$$

因此，速度的大小及与 x 轴的夹角分别为

$$v=\sqrt{12^2+2^2}=12.17(m/s)$$

$$\tan\theta=\frac{v_y}{v_x}=\frac{2}{12}=\frac{1}{6}\quad \theta=9.46°$$

加速度的大小为 $12m/s^2$，方向沿 x 轴正方向。

【例 1－2】 已知质点沿 x 轴作匀变速直线运动，加速度为 a，运动开始时位于 x_0 处，速度为 v_0，求该质点在任意时刻的速度和运动方程。

解： 由 $\frac{dv}{dt}=a$ 得 $dv=adt$，对该式两边积分，有

$$\int_{v_0}^{v}dv=\int_0^t adt$$

因此，质点在任意时刻的速度为

$$v=v_0+at$$

又由 $\frac{dx}{dt}=v$ 得 $dx=vdt$，对该式两边积分，有

$$\int_{x_0}^{x}dx=\int_0^t vdt=\int_0^t(v_0+at)dt$$

因此，质点的运动方程为

$$x=x_0+v_0t+\frac{1}{2}at^2$$

上式也可以写为

$$\Delta x=v_0t+\frac{1}{2}at^2$$

式中：Δx 为质点作直线运动的位移。

在速度表达式和运动方程中消去 t，得

$$v^2=v_0^2+2a\Delta x$$

以上结论就是我们非常熟悉的匀变速直线运动公式。

【例 1－3】 有一个质点沿着 x 轴运动，其加速度 a 与坐标 x 的关系为

$$a=4x+2$$

公式中的各个物理量均采用国际单位。设 $t=0$ 时，$x_0=0$，$v_0=-1m/s$，求质点在任意时刻的速度和运动方程。

解：由于 $a=\frac{dv}{dt}$，因此

$$\frac{dv}{dt}=4x+2$$

在上式两边同乘以 dx，得

$$\frac{dv}{dt}dx=(4x+2)dx$$

我们注意到$\frac{dx}{dt}=v$，所以上式可以改写为

$$vdv=(4x+2)dx$$

对上式两边积分，有

$$\int_{-1}^{v} vdv=\int_{0}^{x}(4x+2)dx \quad \frac{1}{2}(v^2-1)=2x^2+2x$$

即

$$v=\pm\sqrt{4x^2+4x+1}=\pm(2x+1)$$

由于 $x_0=0$ 时，$v_0=-1\text{m/s}<0$，因此质点在任意时刻的速度为

$$v=-(2x+1)$$

由于 $v=\frac{dx}{dt}$，因此

$$\frac{dx}{dt}=-(2x+1)$$

将上式分离变量，得

$$\frac{dx}{2x+1}=-dt$$

对上式两边积分，有

$$\int_{0}^{x}\frac{dx}{2x+1}=-\int_{0}^{t}dt \quad \frac{1}{2}\ln(1+2x)=-t$$

因此，质点的运动方程为

$$x=\frac{1}{2}(e^{-2t}-1)$$

【例 1-4】 如图 1-6 所示，将物体以初速度$\vec{v}_0$ 抛出去，$\vec{v}_0$ 与 x 轴的夹角为 θ_0，忽略空气阻力，求物体的速度及运动方程。

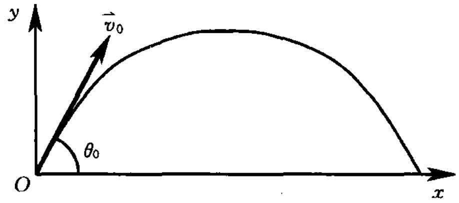

图 1-6

解：物体的加速度为

$$\vec{a}=-g\vec{j}$$

即加速度的分量 $a_x=0$、$a_y=-g$，因此

$$dv_x=a_x dt=0dt$$

$$dv_y=a_y dt=-gdt$$

由题意可知，当 $t=0$ 时，$v_{x0}=v_0\cos\theta_0$、$v_{y0}=v_0\sin\theta_0$。对以上两式积分得

$$v_x - v_0\cos\theta_0 = \int_{v_0\cos\theta_0}^{v_x} dv_x = \int_0^t 0dt = 0$$

$$v_y - v_0\sin\theta_0 = \int_{v_0\sin\theta_0}^{v_y} dv_y = -\int_0^t g dt = -gt$$

因此，物体的速度分量表达式为

$$v_x = v_0\cos\theta_0 \quad v_y = v_0\sin\theta_0 - gt$$

速度的矢量表达式为

$$\vec{v} = v_0\cos\theta_0\,\vec{i} + (v_0\sin\theta_0 - gt)\vec{j}$$

由速度的定义得

$$dx = v_x dt = v_0\cos\theta_0 dt \quad dy = v_y dt = (v_0\sin\theta_0 - gt)dt$$

由题意可知，当 $t=0$ 时，$x_0=0$、$y_0=0$。对以上两式积分得

$$x = \int_0^x dx = \int_0^t v_x dt = \int_0^t v_0\cos\theta_0 dt = v_0\cos\theta_0 t$$

$$y = \int_0^y dy = \int_0^t v_y dt = \int_0^t (v_0\sin\theta_0 - gt)dt = v_0\sin\theta_0 t - \frac{1}{2}gt^2$$

因此，质点的运动方程为

$$\vec{r} = v_0\cos\theta_0 t\,\vec{i} + \left(v_0\sin\theta_0 t - \frac{1}{2}gt^2\right)\vec{j}$$

讨论：

（1）在质点的运动方程中消去时间 t，即得质点的轨道方程为

$$y = -\frac{g}{2v_0^2\cos^2\theta_0}x^2 + \tan\theta_0 x$$

即质点的运动轨道为过坐标原点的抛物线。

（2）在轨道方程中设 $y=0$，得到质点的射程为

$$X = \frac{v_0^2\sin2\theta_0}{g}$$

当 $\sin2\theta_0=1$，即 $\theta_0=\frac{\pi}{4}$ 时射程最大，最大射程为 $X_{max}=\frac{v_0^2}{g}$。

（3）令 $v_y=v_0\sin\theta_0-gt=0$，解得质点到达最高点的时间为

$$t = \frac{v_0\sin\theta_0}{g}$$

将上式代入质点运动方程的 y 分量式 $y=v_0\sin\theta_0 t-\frac{1}{2}gt^2$ 中，即得质点上升的最大高度为

$$y = \frac{v_0^2\sin^2\theta_0}{2g}$$

思考与讨论

1. 已知一个作直线运动的质点的运动学方程为

$$x = 3t - 2t^3 + 1$$

公式中的各个物理量均采用国际单位。试求该质点的加速度表达式。加速度的方向如何？