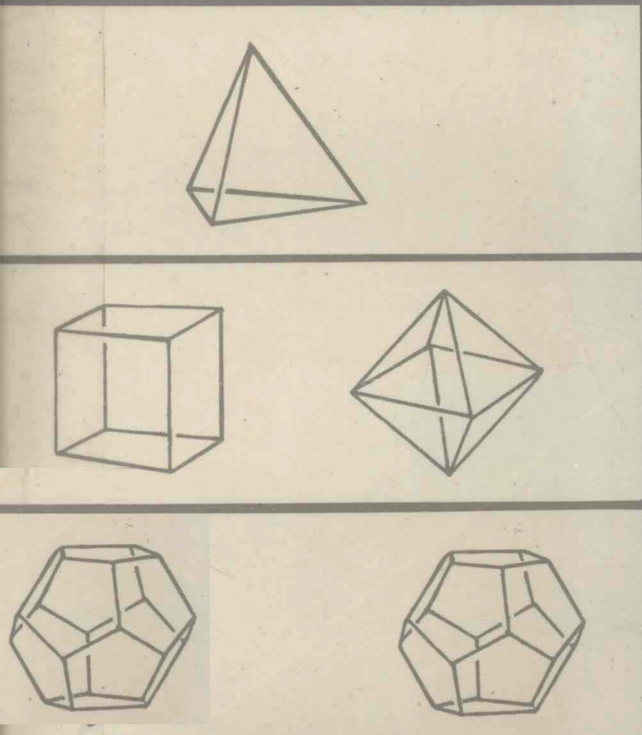
群——通向几何学之路

R. P. BURN

郭永康　苏秀荣　程生有　译　徐润炎　审校



大连理工大学出版社

群——

通向几何学之路

郭永康　苏秀荣　程生有　　译
徐润炎　　　　审校

大连理工大学出版社

R.P.BURN

GROUPS
A PATH TO GEOMETRY

本书根据Cambridge University Press 1985.
First Published 1985 译出

群一通向几何学之路
Qun—Tongxiang Jihexue Zhilu

郭永康 苏秀荣 程生有 译
徐润炎 审校

大连理工大学出版社出版发行 (邮政编码：116024)
(出版社登记证[辽] 第16号) 大连理工大学印刷厂印刷

开本: 787*1009 1/32 印张：$9\frac{1}{8}$ 字数:196千字
1999年12月第1版 1990年12月第1次印刷
印数: 0001—1500册

责任编辑: 责任校对：王 堇
平面设计: 姜严军

ISBN 7-5010-0296-8//051 定价：2.01元

内 容 简 介

本书是一部群论的初级教程，通过按序编排的800多个习题论述了置换群、Möbius群、旋转群、抽象群、Möbius平面的反演与球平投射、陪集、直积、域与向量空间、一般线性群$GL(2,F)$、特征向量与特征值、同态、共轭性、线性分式群、仿射群、正交群、离散群、墙纸群等。对二、三维几何学的内容构造出的大多数群，成为本书群论应用的主要领域。本书的几何群倾向于把群论跟复分析、线性代数以及结晶学联系起来，给读者在这些领域的研究提供了一个有用的基础。

本书适作本科数学专业的选修教材，也是化学、光学及专业数学工作者和教师的一部好参考书。

序

这是一本群论的初级教程，具有传统的严格性，为读者提供一条扎实地掌握这门学科的高效率的途径。它不是通常的习题集，它以较多的篇幅阐述理论，全面而系统，但是精要明快。在观点阐述与理论分析中为读者准备着概念上的训练，在许多习题甚至一些解答中，随着训练的进程又新增理论内容。在作解答的过程中，往往借机继续阐述理论，以便使读者温故而知新。

由二、三维几何学的内容构造出本书的大多数群，它把群论跟复分析、线性代数以及结晶学联系起来，为读者在这些领域的研究提供一个有用的基础。

正如作者所述“数学的内容与其说是供人们学习的不如说是给人们应用的。”这也是他多年教学经验之总结，为我国现行数学教学改革提供了有用的启示。

所以，这本书对于初学群论的读者可作为精读细练的教材，对于密切联系这门学科的工作者可提供参考性的简介。

徐利治

1990 年 6 月

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.c

原　　序

本书是一部群论的初级教程，它具有传统的严格性，叙述上有三个显著特点。

第一，本书按顺序编入了800多个习题，这就使得课程的进行与其用讲授方式不如用讨论方式为好。数学的内容与其说是供人们学习的不如说是给人们应用的，因为，一些讲授得出反面印象的事，实在是太常见的了。

第二，开始便把变换群作为讨论群的起端，这是符合群论的历史原状的。这样做不仅使得结合律在其后便立即得到了证明，还明显地有利于研究以及规定出单个运算的集合。Galois（1830），Jordan（1870），以至于Klein的“关于二十面体的讲演”(1884）中，都指出群是由几组闭合公理来定义的，别的公理隐含在他们关于有限变换群的讨论的行文之中。关于抽象群方面的内容开始于第六章。

第三，由二、三维几何学的内容构造出本书的大多数群，也是第七与十七至二十三章中群论应用的主要领域。在几何学中领会共轭性是最好的安排，而线性与仿射群则是那些最容易使得同态的功能在其中发挥好效应的内容。本书的几何群倾向于把群论跟复分析、线性代数以及结晶学联系起来，给每个读者在这些领域的研究提供了一个有用的基础。

这门课程所需的数学知识是扎实的高中数学，在少数地方用到了归纳证明，而有一处用到了余弦定理。如果在中学便熟悉了群、矩阵以及复数，那当然是会有帮助的。不过书

中在这些方面已经做到了自给自足。虽然本书所考虑的预备知识要比作者早先所写“数论捷径”一书来得少，但几何群方面的一些问题会给个别学生带来不少困难，概念的相继发展在这领域中是较多的，本书部分地补偿了这一点。所需的群论以外的概念是具体地显示出来的，而极少带有抽象性。例如，书中没有定义抽象向量空间，只用到n度空间，可以向学生声明，第七、十八、十九章的结果并不在书中其他部分使用。

书中得到的大多数结果在近20年来已经为学校教师们所需要和引用，但是多数证明未被理解。作者希望，书中提供的不仅是证明，而且还象当今英国学校所做到的那样，也洞察变换几何学，这对学生来说，在其以后的学习中，会在概括与抽象方面具备一种宽广扎实的基础。

作者非常感谢在将本书设计成教程中的合作者Alam Beardon博士，和在讨论实际问题与解答方面花费不少时间的同事Bob Hall. 作者以感激之情引用了P.Neumann博士与B.L van der Waerden教授的历史资料。书中的不足之处责任只在作者本人。

剑桥大学，哈麦尔顿（Homerton）学院。1984年7月

R. P. Burn

目　　录

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.c

第一章　函　　数

在整个19世纪中，群论是对置换与代换的一种研究。把群元素一般看作“运算”,就是如今我们将称为的一个集合到其自身的变换（双射）。群的这种看法非常适用于几何学，也是本书大多数地方我们采用的看法。

第一章中我们建立变换的那些性质，它们使得变换集合在复合步骤下形成群，而我们是在19世纪尚未知的一种集合论严格性之下来做这一工作的。本章是全书中最抽象的一章，学生感到对此不适应时可以从第二章开始，即只需他接受第一章末尾问题的结果。

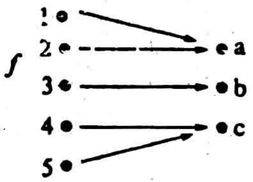
因为我们将在本章中建立函数的一种形式上的定义，我们也将对名词“同构”、“同态”与“一对一对应”提供一种背景，所有这些名词是描述群论中用到的特别类型的函数，它们通常并不被设想成群元素本身。

同时阅读：Green，第三章。

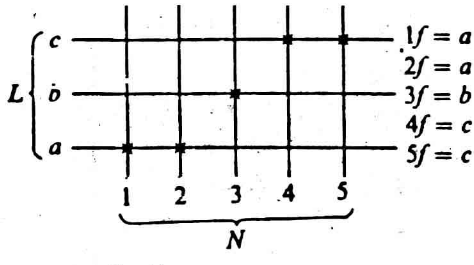
函数　$N \to L$

箭号图

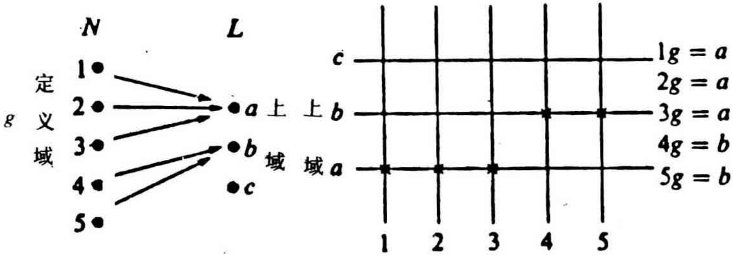
N = 数　L = 字



图象



$f = \{(1, a), (2, a), (3, b), (4, c), (5, c)\}$



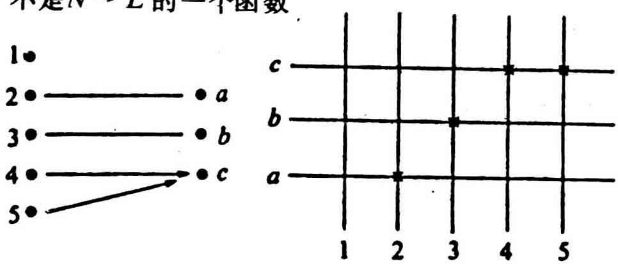
$g=\{(1,a),(2,a),(3,a),(4,b),(5,b)\}$ 定义域

域 $N=\{1,2,3,4,5\}$，上域 $L=\{a,b,c\}$.

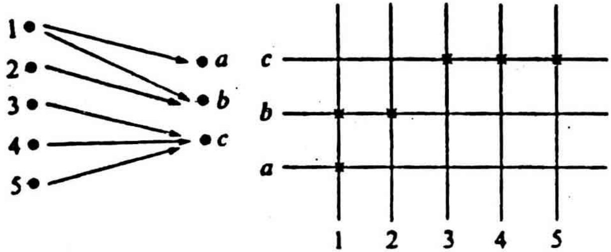
f 与 g 都是从 N 到 L 的函数例子，

f：$N\to L$ 与 g：$N\to L$.

不是 $N\to L$ 的一个函数



不是 $N\to L$ 的一个函数



1．用上面的图，依照它们所含的规律来完成下述句子。

当对集合N的每个元素n……时，就定义于一个函数f: $N\to L$．

2．用上面的图，依照它们所含的规律来完成下述句子。

上列函数图象中用到的矩阵列代表所谓笛卡儿乘积$N\times L$．$N\times L$的每个元素是由N中的n与L中的x所成有序数对(n,x)．一个函数$N\to L$的图象由$N\to L$的一个子集所组成，对各个……正好有一个元素(n,x)．

3．下列关系中哪些定义着实数$\mathrm{R}\to\mathrm{R}$的函数？

（i）$x\mapsto x^2$；　（ii）$x^2\mapsto x$；（iii）$x\mapsto 1/x$；

（iv）$x\mapsto \sin x$；（v）$x\mapsto \mathrm{tg}\,x$．

4．如果$A=\{0,1\}$，有多少个不同的$A\to A$函数？

内射（一对一的）

5．画由（i）$x\mapsto x^3$与由（ii）$x\mapsto x^2$所给出的函数$\mathrm{R}\to\mathrm{R}$的略图。

如果$x^3=y^3$，是否得出$x=y$？

如果$x^2=y^2$，是否得出$x=y$？

这里的差别导致我们把由$\alpha: x\mapsto x^3$所定义的α：$\mathrm{R}\to\mathrm{R}$叫做一个一对一的函数或者内射。我们说$\beta: x\mapsto x^2$不是在R上一对一的。

6．设$A=\{1,2,3,4\}$．

（i）展示一个一对一的函数$A\to A$的图象。

（ii）展示一个并不一对一的函数$A\to A$的图象。

（iii）有多少个$A\to A$的函数？

7．设N代表自然数集$\{1,2,3,\cdots\}$．画由$n\mapsto n^2$定义的$\mathrm{N}\to\mathrm{N}$函数图象的一部分，这是否是一个一对一的函数？

8．如果一个函数是一对一的，关于这个函数图象的那些行能说些什么？

满射（映上去）

9．画出由（i）α: $x \mapsto e^x$ 与（ii）β: $x \mapsto x+1$ 所给出的函数R→R图象的略图。

对任何选取的实数 y，是否总能求得一个实数 x 使得α: $x \mapsto y$？

对任何选取的实数 y，是否总能求得一个实数 x 使得β: $x \mapsto y$？

这里的差别导致我们把 β 叫做一个映上去的函数或者满射，而说 α 不是映上去的。

10．设 $A=\{1,2,3,4\}$，展示一个（i）映上去；（ii）不是映上去的函数 $A \to A$ 的图象。

11．举例说明由偶数 $2n \mapsto n$，奇数 $(2n-1) \mapsto n$ 的函数N→N的部分图象。

这是否是一个一对一的函数？

这是否是一个映上去的函数？

12．关于一个映上去函数的图象的行能说些什么？

13．设 $A=\{1,2,3,4\}$

能否构造一个函数 $A \to A$，它是一对一的但不是映上去的？

能否构造一个函数 $A \to A$，它是映上的但不是一对一的？

14．能否构造一个函数N→N，它是一对一的但不是映上去的？

能否构造一个函数N→N，它是映上去的不是一对一的？

15．在任一集合 A 上揣摩出一种条件使得每个一对一的

函数 $A\to A$ 必定是映上去的，又每个映上去的函数 $A\to A$ 必定是一对一的。借助于问题 8 与问题12验证所作猜测。

一个内射而也是满射的就叫做一个双射，以同样的有限集作为定义域与上域时，内射、满射与双射事实上是一样的。

16. 举出函数 $\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ 的例子，它是

（i）一对一的又是映上去的（双射）。

（ii）一对一的但不是映上去的（内射）。

（iii）映上去的但不是一对一的（满射）。

（iv）既非一对一的又非映上去的。

17. 如果存在一个一对一函数 $A\to A$ 而不是映上去的，关于集合 A 能说些什么？

函数的复合步骤

18. 如果 α 与 β 是函数 $\mathbf{R}\to\mathbf{R}$，由

$$\alpha: x\mapsto 2x \quad 与 \quad \beta: x\mapsto x+1$$

定义，则定义 $\alpha\beta: x\mapsto 2x+1$

$$x\overset{\alpha}{\mapsto}2x\overset{\beta}{\to}2x+1.$$

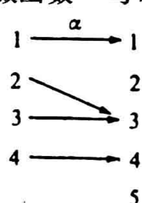
这个关系写成 $(x)\alpha\beta=(2x)\beta=2x+1$.

在同样的定义下确定 $(x)\beta\alpha$.

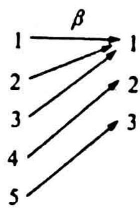
19. 如果 $\alpha: A\to B$ 与 $\beta: B\to C$ 是函数，由确定 $(x)\alpha\beta$（在先 α 后 β 的函数 $\alpha\beta$ 下 x 的象）来形式上定义 $\alpha\beta: A\to C$.

函数 $\alpha\beta$ 叫做函数 α 与 β 的复合。

20. 如果



与



展示 $\alpha\beta$.

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.c