21世纪普通高等教育规划教材

线性代数与概率统计

吴春青　石澄贤　主编

化学工业出版社

21 世纪普通高等教育规划教材

线性代数与概率统计

吴春青　石澄贤　主编

化学工业出版社

·北京·

本书介绍了线性代数与概率统计有关的内容。线性代数部分的内容包括行列式的定义与计算，矩阵的定义及运算，逆矩阵的概念，可逆的判定和可逆阵的求法以及矩阵的初等变换和秩；向量组的相关概念；线性方程组的解的判定及求解；特征值与特征向量的概念、性质和求法；二次型的相关概念等。概率统计部分的内容包括事件的关系与运算，基本概率公式；随机变量的相关概念与性质；多维随机变量的概念与性质；随机变量的数字特征与中心极限定理以及数理统计中常见的样本分布和参数估计、假设检验的方法等。

本书可作为应用型本科生的线性代数和概率统计教材，也可供相关专业的成人教育学生和工程技术人员使用。

图书在版编目（CIP）数据

线性代数与概率统计/吴春青，石澄贤主编．—北京：化学工业出版社，2011.5

21世纪普通高等教育规划教材

ISBN 978-7-122-10877-7

Ⅰ．线… Ⅱ．①吴…②石… Ⅲ．①线性代数-高等学校-教材②概率论-高等学校-教材③数理统计-高等学校-教材 Ⅳ．①O151.2②O21

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2011）第 051643 号

责任编辑：唐旭华　袁俊红　　　装帧设计：张　辉

责任校对：洪雅姝

出版发行：化学工业出版社（北京市东城区青年湖南街 13 号　邮政编码 100011）

印　　刷：北京市振南印刷有限责任公司

装　　订：三河市宇新装订厂

710mm×1000mm　1/16　印张 9¾　字数 185 千字　　2011 年 6 月北京第 1 版第 1 次印刷

购书咨询：010-64518888（传真：010-64519686）　售后服务：010-64518899

网　　址：http://www.cip.com.cn

凡购买本书，如有缺损质量问题，本社销售中心负责调换。

定　　价：19.00 元

前　言

线性代数和概率统计是大学数学教学中的主要基础课程。为了适应应用型本科院校数学教学的新形势，本书的编写在考虑基本内容符合工程数学课程教学基本要求的同时，结合多年的教学实践经验，力求基本概念清晰，突出基本方法的应用。同时考虑到数学课程的抽象性，尽可能采用从特殊到一般，从具体到抽象的认知规律。

本书共分八章。第一至第四章是线性代数的基本内容，第五至第八章为概率统计的基本内容。第一章介绍了行列式的定义、性质和计算；第二章介绍了矩阵的相关知识，如矩阵的概念与运算，矩阵的逆矩阵的定义、存在的条件与计算以及矩阵的初等变换和矩阵秩的概念与计算；第三章给出向量组的定义，讨论了线性方程组解的情况，从解向量的角度说明了线性方程组通解的求法，然后在向量组线性相关性讨论的基础上，通过基础解系给出了线性方程组解的结构；第四章介绍特征值、特征向量以及二次型的相关概念。第五章讨论了随机事件的概念与运算，给出了随机事件概率计算的基本公式；第六章讨论了一维和多维随机变量的相关概念，如分布列、密度函数、分布函数等；第七章讨论了随机变量的一些数字特征，如期望、方差等，通过大数定律和中心极限定理说明了一些随机变量的极限分布；第八章讨论了数理统计的一些基本知识，如抽样分布、参数估计和假设检验等。考虑到数学软件在数学中的作用，以 MATLAB 为例，在附录中说明了一些线性代数和概率统计的基本概念、方法如何应用这个数学软件来实现。书后附有每章习题的参考答案，便于自学。

本书第一章由姜忠义编写，第二章由刘玉清编写，第三章由涂庆伟编写，第四、五章及附录 1 由石澄贤编写，第六、七章由吴春青编写，第八章由阮宏顺编写。全书由吴春青、石澄贤统稿。

本书可作为应用型本科生的线性代数与概率统计教材，也可供相关专业的成人教育学生和工程技术人员使用。

本书的编写得到了常州大学教务处、数理学院领导的支持以及常州大学数学教学同仁的关心和协助，汤炳兴对本书也提出了修改意见，在此一并表示感谢！

由于编者水平有限，书中不足之处在所难免，恳请读者批评指正。

编者

2011 年 4 月

目 录

第一章　行　列　式

这一章先从线性方程组的解引入二、三阶行列式的定义，在介绍排列和逆序数的概念后，将二、三阶行列式的定义推广到 n 阶行列式．通过介绍行列式的性质及行列式的按行（列）展开定理，得到行列式的一些计算方法．行列式是线性代数的一个重要的概念，在数学及其他学科中都有广泛的应用．

第一节　二、三阶行列式

一、二阶行列式

在初等数学中知道二元线性方程组

$$\begin{cases} a_1x+b_1y=c_1 \\ a_2x+b_2y=c_2 \end{cases} \tag{1.1}$$

可以通过消元法求解，即当 $a_1b_2-a_2b_1\neq 0$ 时，该方程组有唯一的解

$$\begin{cases} x=\dfrac{c_1b_2-c_2b_1}{a_1b_2-a_2b_1} \\ y=\dfrac{a_1c_2-a_2c_1}{a_1b_2-a_2b_1} \end{cases}.$$

这组解的分母同为 $a_1b_2-a_2b_1$，是两个数相乘减去另外两个数相乘．分子的形式也是两个数相乘减去另外两个数相乘．因此如果引入一个概念来表示“两个数相乘减去另外两个数相乘”，那么二元线性方程组的解的形式就可以简洁明了，实际上这就是二阶行列式的定义．

定义 1　设 $a_{11},a_{12},a_{21},a_{22}$ 为 4 个数，将它们排成 2 行 2 列的数表

$$\begin{matrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{matrix}$$

称数 $a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}$ 为这个数表确定的**二阶行列式**，记作 $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$，即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}. \tag{1.2}$$

数 $a_{ij}(i=1,2;j=1,2)$称为二阶行列式的**元素**．元素 a_{ij} 的第一个下标称为**行标**，表示该元素所在的行为第 i 行；第二个下标称为**列标**，表示该元素所在的列为第 j 列．把 a_{11} 到 a_{22} 的连线称为**主对角线**，a_{12} 到 a_{21} 的连线称为**副对角线**，这样式(1.2) 就是二阶行列式等于主对角线上的两个元素的乘积减去副对角线上两

个元素的乘积.

有了二阶行列式的定义，线性方程组(1.1) 的解就可以用二阶行列式来表示了. 记

$$D_1=\begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix},\ D_2=\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix},$$

就有当二阶行列式 $D=\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}\neq 0$ 时，线性方程组(1.1) 有唯一解，且

$$x=\frac{c_1b_2-c_2b_1}{a_1b_2-a_2b_1}=\frac{D_1}{D},\ y=\frac{a_1c_2-a_2c_1}{a_1b_2-a_2b_1}=\frac{D_2}{D}.$$

例 1 $\begin{vmatrix} 5 & -1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix}=5\times 2-(-1)\times 3=13$； $\begin{vmatrix} a & b \\ -b & a \end{vmatrix}=a^2-(-b^2)=a^2+b^2$；

二、三阶行列式

类似于二阶行列式的定义，可以从 3 行 3 列的数表定义三阶行列式.

定义 2 将 9 个数排成 3 行 3 列的数表

$$\begin{matrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{matrix}$$

记

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-$$

$$a_{13}a_{22}a_{31}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{11}a_{23}a_{32}, \tag{1.3}$$

称此式为该 3 行 3 列的数表确定的**三阶行列式**.

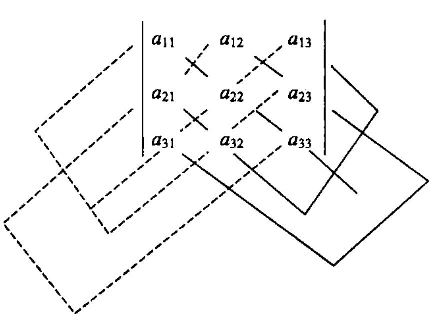

图 1.1

对应于二阶行列式，三阶行列式也有元素、行标及列标的概念，如元素 a_{32} 表示行列式中位于第 3 行、第 2 列的数. 应用如下的对角线法则可以方便地记忆三阶行列式（参看图 1.1）：

三阶行列式等于每条实线上三个元素的乘积加正号以及每条虚线上三个元素的乘积加负号后加起来.

对于三元线性方程组$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3=b_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+a_{23}x_3=b_2 \\ a_{31}x_1+a_{32}x_2+a_{33}x_3=b_3 \end{cases}$，若$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \neq 0$，则方程组有唯一解，且解为

$$x_1=\frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}},\quad x_2=\frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}},\quad x_3=\frac{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}}.$$

对于以上两种形式的二、三元线性方程组的解，在第三章中还会发现解中分子、分母的行列式还有规律可循（克莱姆法则）.

例 2 $\begin{vmatrix} 2 & -5 & 0 \\ 1 & 3 & -3 \\ 4 & -1 & 6 \end{vmatrix}=2\times3\times6+1\times(-1)\times0+(-5)\times(-3)\times4-0\times3\times4-$

$$(-1)\times(-3)\times2-1\times(-5)\times6$$
$$=(36)+(0)+(60)-(0)-(6)-(-30)=120.$$

例 3　求解方程 $D=\begin{vmatrix} 5-\lambda & 2 & 2 \\ 2 & 6-\lambda & 0 \\ 2 & 0 & 4-\lambda \end{vmatrix}=0.$

解　$D=\begin{vmatrix} 5-\lambda & 2 & 2 \\ 2 & 6-\lambda & 0 \\ 2 & 0 & 4-\lambda \end{vmatrix}=(5-\lambda)(6-\lambda)(4-\lambda)+2\times0\times2-2\times$

$$(6-\lambda)\times2-0\times0\times(5-\lambda)-2\times2\times(4-\lambda)$$
$$=(5-\lambda)(2-\lambda)(8-\lambda)=0,$$

可得该方程的解为 $\lambda_1=5$，$\lambda_2=2$，$\lambda_3=8$.

在这一节利用对角线法则给出了二、三阶行列式的定义，自然地就有这样的问题：这种定义行列式的方法能否推广到高阶的情形，即是否可以类似地定义四阶行列式，五阶行列式，…，n 阶行列式？一般的 n 阶行列式的定义就是下节要讨论的问题. 要说明的是对于四阶及四阶以上的行列式，不是从对角线法则去推广的，需要更详细地讨论式(1.2)，式(1.3)的规律来推广行列式的定义，也就是说，对角线法则对四阶及四阶以上的行列式是不成立的.

第二节　n 阶行列式

为了得到一般的 n 阶行列式的定义，需要进一步分析二、三阶行列式的定义

及式(1.2)、式(1.3)的规律，首先引入排列及逆序数的概念.

一、排列与逆序数

对于n个不同的考察对象，可以给它们规定一个次序，并称这个规定的次序为标准次序. 例如$1,2,\cdots,n$这n个自然数，在本书中规定由小到大的次序为标准次序.

定义 3 由n个自然数$1,2,\cdots,n$组成的一个无重复的有序数组$i_1 i_2\cdots i_n$，称为一个**n级排列**，简称为排列. $1,2,\cdots,n$中的每个自然数称为排列的元素.

例如1234和2431都是4级排列，而45321是一个5级排列. 显然，n级排列共有$n!$个. 排列$12\cdots n$中元素之间的次序都为标准次序，这个排列称为标准排列（也称为自然排列）.

定义 4 在n级排列中，当某两个元素的次序与标准次序不同时，就说存在一个**逆序**. 也就是说，在一个n级排列$i_1 i_2\cdots i_t\cdots i_s\cdots i_n$中，如果一个较大的数排在一个较小的数之前，即若$i_t>i_s$，则这两个数$i_t$，$i_s$组成一个逆序. 一个排列中所有逆序的总数，称为这个排列的逆序数，记为$\tau(i_1 i_2\cdots i_n)$或τ.

例如排列2431中，21,43,41,31是逆序，共有4个逆序. 故排列2431的逆序数$\tau=4$. 根据定义3，可按如下方法计算排列的逆序数：

设在一个n级排列$i_1 i_2\cdots i_n$中，比元素$i_t(t=1,2,\cdots,n)$大的且排在i_t前面的数共有t_i个，则i_t的逆序的个数为t_i，而该排列中所有元素的逆序的个数之和就是这个排列的逆序数. 即

$$\tau(i_1 i_2\cdots i_n)=t_1+t_2+\cdots+t_n=\sum_{i=1}^{n}t_i.$$

例 1 计算排列45321的逆序数.

解 因为4排在首位，故其逆序个数为0；

比5大且排在5前面的数有0个，故其逆序个数为0；

比3大且排在3前面的数有2个，故其逆序个数为2；

比2大且排在2前面的数有3个，故其逆序个数为3；

比1大且排在1前面的数有4个，故其逆序个数为4.

可见所求排列的逆序数为

$$\tau(45321)=0+0+2+3+4=9.$$

定义 5 如果排列$i_1 i_2\cdots i_n$的逆序数为奇数，则称它为**奇排列**；若排列$i_1 i_2\cdots i_n$的逆序数为偶数，则称它为**偶排列**.

例如，排列2431的逆序数为4（偶数），因此是偶排列；排列45321的逆序数为9（奇数），因此是奇排列；标准排列$12\cdots n$的逆序数是0，因此是偶排列.

二、对换

定义 6 在排列$i_1 i_2\cdots i_t\cdots i_s\cdots i_n$中，将任意两个元素$i_t$和$i_s$的位置互换，而其余的元素不动，就得到另一个排列. 这种作出新排列的过程称为一次**对换**. 将

相邻两数对换，称为**相邻对换**.

例如，对换排列 45321 中 5 和 1 的位置后，得到排列 41325. 容易验证后一排列与前一排列的奇偶性不同，一般地，有下面的定理.

定理 1　对一个排列施行一次对换改变排列的奇偶性.

证明略. 也就是说，经过一次对换，奇排列变成偶排列，而偶排列变成奇排列.

推论 1　奇排列变成标准排列的对换次数为奇数；偶排列变成标准排列的对换次数为偶数.

三、n 阶行列式定义

先利用排列及逆序数的概念进一步分析式(1.2) 及式(1.3). 对式(1.2)，即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21},$$

该式含有 2 项，每一项相乘的元素都是不同行不同列的. 每一项中行标的排列都是标准排列，这两项列标的排列为 2 级排列，2 级排列共有 2！＝2 种（与项数 2 相等）. 列标的排列分别为 12 和 21，逆序数分别为 0，1，分别是偶排列，奇排列. 在行标的排列都是标准排列时，列标的排列为偶排列的项取正，列标的排列为奇排列的项取负. 这样式(1.2) 可写为

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} = \sum (-1)^{\tau(j_1j_2)} a_{1j_1}a_{2j_2},$$

这里$\sum$表示对所有 2 级排列 j_1j_2 求和，$\tau(j_1j_2)$为排列 j_1j_2 的逆序数.

类似地，对三阶行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} -$$
$$a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32},$$

该式含有 6 项，每一项相乘的元素都是不同行不同列的. 每一项中行标的排列都是标准排列，这 6 项列标的排列为 3 级排列，3 级排列共有 3！＝6 种（与项数 6 相等）. 列标的排列分别为 123，231，312，321，213，132，这些排列的逆序数分别是 0,2,2,3,1,1. 分别是偶排列、偶排列、偶排列、奇排列、奇排列、奇排列. 在行标的排列都是标准排列时，列标的排列为偶排列的项取正，列标的排列为奇排列的项取负. 这样

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \sum (-1)^{\tau(j_1j_2j_3)} a_{1j_1}a_{2j_2}a_{3j_3},$$

这里$\sum$表示对所有 3 级排列 $j_1j_2j_3$ 求和，$\tau(j_1j_2j_3)$为排列 $j_1j_2j_3$ 的逆序数.

将这些规律推广得到 n 阶行列式的定义.

定义 7 设有 n^2 个数，组成 n 行 n 列的数表

$$\begin{matrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{matrix}$$

找出表中位于不同行不同列的 n 个数的乘积，得到 $n!$ 个形如 $a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}$ 的项，其中 $j_1j_2\cdots j_n$ 为自然数 $1,2,\cdots,n$ 的一个排列，记 τ 为这个排列的逆序数. 所有这 $n!$ 项的代数和 $\sum\limits_{j_1j_2\cdots j_n}(-1)^{\tau}a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}$ 称为 **n 阶行列式**. 记作

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{j_1j_2\cdots j_n}(-1)^{\tau(j_1j_2\cdots j_n)}a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n},$$

其中 $\sum\limits_{j_1j_2\cdots j_n}$ 表示对所有的 n 级排列 $j_1j_2\cdots j_n$ 求和. 行列式有时也简记为 $\det(a_{ij})$，数 a_{ij} 称为行列式的元素，$(-1)^{\tau(j_1j_2\cdots j_n)}a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}$ 称为行列式的一般项.

当 $n=1$ 时，一阶行列式 $|a|=a$，不要与绝对值记号相混淆. 定义 7 通常称为行列式的“排列逆序”定义，注意由于 n 级排列的总数是 $n!$ 个，所以是 $n!$ 项的和，每项必须是取自不同行不同列的 n 个元素的乘积，每项前的符号在行标的排列是标准排列时，取决于这 n 个元素的列标所组成排列的奇偶性.

例 2 在 4 阶行列式中，项 $a_{21}a_{32}a_{14}a_{43}$ 应取正号还是负号?

解 先将这一项的行标写为标准排列，即 $a_{21}a_{32}a_{14}a_{43}=a_{14}a_{21}a_{32}a_{43}$，而列标的排列 4123 的逆序数为

$$\tau(4123)=0+1+1+1=3,$$

是奇排列，所以 $a_{21}a_{32}a_{14}a_{43}$ 应取负号.

四、利用定义求解特殊的行列式

1. 主对角行列式

非主对角线上元素全为 0 的行列式称为**主对角行列式**. 根据定义 7，主对角行列式的值为主对角线上元素的乘积，即有

$$\begin{vmatrix} a_{11} & & & \\ & a_{22} & & \\ & & \ddots & \\ & & & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn},$$

行列式中未写出的元素都是 0.

如$\begin{vmatrix}1 & 0\\0 & -2\end{vmatrix}=1\times(-2)=-2$；$\begin{vmatrix}2 & 0 & 0\\0 & -3 & 0\\0 & 0 & 4\end{vmatrix}=2\times(-3)\times4=-24.$

2. 上（下）三角行列式

主对角线以下的元素全为 0 的行列式称为**上三角行列式**. 有

$$\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n}\\0 & a_{22} & \cdots & a_{2n}\\\vdots & \vdots & & \vdots\\0 & 0 & \cdots & a_{nn}\end{vmatrix}=a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}.$$

事实上根据定义，一般项为$(-1)^{\tau(j_1j_2\cdots j_n)}a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}$，现考虑一般项中不为零的项. a_{nj_n}取自第 n 行，但只有 $a_{nn}\neq0$，故只能取 $j_n=n$；$a_{n-1,j_{n-1}}$取自第 $n-1$ 行，只有 $a_{n-1,n-1}\neq0$，$a_{n-1,n}\neq0$，由于 a_{nn}取自第 n 列，故 $a_{n-1,j_{n-1}}$不能取自第 n 列，所以 $j_{n-1}=n-1$；同理可得，$j_{n-2}=n-2,\cdots,j_2=2,j_1=1$. 所以不为零的项只有

$$(-1)^{\tau(12\cdots n)}a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}=a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}.$$

于是

$$\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n}\\0 & a_{22} & \cdots & a_{2n}\\\vdots & \vdots & & \vdots\\0 & 0 & \cdots & a_{nn}\end{vmatrix}=a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}.$$

类似的，对于下三角行列式（即主对角线以上的元素全为 0 的行列式）有

$$\begin{vmatrix}a_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0\\a_{21} & a_{22} & 0 & \cdots & 0\\a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & 0\\\vdots & \vdots & \vdots & & \vdots\\a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn}\end{vmatrix}=a_{11}a_{22}a_{33}\cdots a_{nn}.$$

如$\begin{vmatrix}1 & a\\0 & -1\end{vmatrix}=1\times(-1)=-1$，$a$ 为任意实数；3 阶上三角行列式 $\begin{vmatrix}1 & -1 & 0\\0 & 2 & 2\\0 & 0 & -3\end{vmatrix}=-6.$

对于二、三阶行列式，有对角线法则去求得行列式的值，但对于四阶及四阶以上的行列式，读者可以根据定义验证对角线法则就不适用了. 另外可以知道在行列式的阶数较高时，利用定义去直接计算行列式是很麻烦的. 在本章的后面两

节，将通过分析行列式的性质来得到一些计算行列式值的方法.

第三节 行列式的性质

在第二节利用行列式的定义知道上（下）三角行列式的值为主对角线上元素的乘积. 在这一节，将讨论行列式的一些性质，从而得到计算行列式值的一种方法，即将行列式化为上（下）三角行列式来计算.

将行列式D的行与列互换后得到的行列式，称为D的**转置行列式**，记为D^{T}. 即

若 $D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$，则 $D^{\mathrm{T}}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$.

性质 1 行列式D与它的转置行列式D^{T}相等.

如 $D=\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 9 \end{vmatrix}=-6$，$D^{\mathrm{T}}=\begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 3 & 9 \end{vmatrix}=-6$. 其一般的证明如下.

证明 记 $D=\det(a_{ij})$，$D^{\mathrm{T}}=\det(b_{ij})$，则 $b_{ij}=a_{ji}$. 由n阶行列式的定义

$$D^{\mathrm{T}}=\sum(-1)^{\tau(p_1p_2\cdots p_n)}b_{1p_1}b_{2p_2}\cdots b_{np_n}=\sum(-1)^{\tau(p_1p_2\cdots p_n)}a_{p_11}a_{p_22}\cdots a_{p_nn}.$$

交换和式中各项$a_{p_11}a_{p_22}\cdots a_{p_nn}$的因子$a_{p_ii}$的位置，使得

$$a_{p_11}a_{p_22}\cdots a_{p_nn}=a_{1q_1}a_{2q_2}\cdots a_{nq_n}.$$

假设这些因子经过m次的位置对换而完成. 于是$p_1p_2\cdots p_n$经m次对换变成标准排列$1\cdot2\cdots n$，同时$1\cdot2\cdots n$也是经m次对换变成$q_1q_2\cdots q_n$.（例如$a_{31}a_{12}a_{23}=a_{12}a_{23}a_{31}$是经两次位置对换而成的，故 $312\xrightarrow{2}123$；同时 $123\xrightarrow{2}231$.）由定理 1 的推论，排列$p_1p_2\cdots p_n$与$q_1q_2\cdots q_n$有相同奇偶性. 故

$$D^{\mathrm{T}}=\sum(-1)^{\tau(p_1p_2\cdots p_n)}a_{p_11}a_{p_22}\cdots a_{p_nn}=\sum(-1)^{\tau(q_1q_2\cdots q_n)}a_{1q_1}a_{2q_2}\cdots a_{nq_n}=D.$$

性质 1 说明行列式中行与列的地位是相同的，所以凡对行成立的性质，对列也同样成立.

性质 2 交换行列式的两行（或两列），行列式改变符号.

如 $D=\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 9 \end{vmatrix}=-6$，交换第一行和第二行得$\begin{vmatrix} 5 & 9 \\ 1 & 3 \end{vmatrix}=6$. 用记号$r_i\leftrightarrow r_j$（$c_i\leftrightarrow c_j$）表示交换行列式的第$i$行（列）和第$j$行（列）.

推论 2 如果一个行列式有两行（或两列）对应元素完全相等，那么这个行列式等于零.

性质 3 一个行列式的某一行（或某一列）的所有元素同乘以某一个数k，等于用数k乘这个行列式.

用数k乘行列式的第i行（列）记作$r_i\times k$（或$c_i\times k$）.

推论 3　一个行列式中某一行（或某一列）的所有元素的公因子可以提到行列式符号外边.

第 i 行（列）提出公因子 k，记作 $r_i \div k$（或 $c_j \div k$）.

推论 4　如果一个行列式中有某一行（或某一列）的元素全部是零，则这个行列式等于零.

推论 5　如果一个行列式中有某两行（或某两列）的对应元素成比例，则这个行列式等于零.

如 $\begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ -6 & -4 & -2 \\ 1 & 2 & -1 \end{vmatrix}$，由于第一行、第二行的对应元素成比例，有 $\begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ -6 & -4 & -2 \\ 1 & 2 & -1 \end{vmatrix}=0$.

性质 4　如果行列式 D 的某一行的每一个元素都可以写成两个数的和，如

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{i1}+c_{i1} & b_{i2}+c_{i2} & \cdots & b_{in}+c_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

则此行列式等于下列两个行列式的和

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{i1} & b_{i2} & \cdots & b_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_{i1} & c_{i2} & \cdots & c_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

如 $\begin{vmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 1 & -5 & 0 \\ 0+1 & 1+1 & -2+1 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 1 & -5 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 1 & -5 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$.

性质 4 对于列来说也是成立的.

性质 5　如果把行列式的某一行（或列）的各元素乘以同一数后加到另一行（或列）对应的元素上去，那么行列式的值不变.

把行列式的第 j 行（或列）的各元素乘以同一数 k 后加到第 i 行（或列）($i\neq j$)对应的元素上去，记作 r_i+kr_j（或 c_i+kc_j）. 如 $\begin{vmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 1 & -5 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \end{vmatrix}=22$，将

第三行乘以 2 加到第二行上（注意，第三行的元素本身并不改变，改变的是第二行的元素），有 $\begin{vmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 3 & -1 & -2 \\ 1 & 2 & -1 \end{vmatrix}=3+0+6-(-1)-0-(-12)=22$. 即

$$\begin{vmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 1 & -5 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \end{vmatrix} \xlongequal{r_2+2r_3} \begin{vmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 3 & -1 & -2 \\ 1 & 2 & -1 \end{vmatrix}=22.$$

性质 2、性质 3、性质 5 分别介绍了行列式的关于行（列）的三种运算，即 $r_i \leftrightarrow r_j$，$r_i \times k$，r_i+kr_j（$c_i \leftrightarrow c_j$，$c_i \times k$，c_i+kc_j）. 利用这些运算可简化行列式的计算，特别是利用运算 r_i+kr_j（或 c_i+kc_j）可以把行列式中许多元素化为 0，进而把行列式化为上（下）三角行列式，最后得到行列式的值. 把行列式化为上三角行列式求值的方法，其步骤如下.

（1）如果第一列的第一个元素不为 0，把第一行分别乘以适当的数加到其他各行，使得第一列除第一个元素外其余元素全为 0. 再用同样的方法处理除去第一行和第一列后余下的低一阶行列式，如此继续下去，直至使它成为上三角行列式，这时主对角线上元素的乘积就是所求行列式的值.

（2）如果第一列的第一个元素为 0，先将第一行（或列）与其他行（或列）交换使得第一列第一个元素不为 0. 而后按步骤（1）进行下去.

例 1 计算 4 阶行列式

$$D=\begin{vmatrix} 2 & -5 & 1 & 2 \\ -3 & 7 & -1 & 4 \\ 5 & -9 & 2 & 7 \\ 4 & -6 & 1 & 2 \end{vmatrix}.$$

解 如果直接用第一列的第一个元素 2 将第一列的其他 3 个元素 -3，5，4 化为 0，要用到分数倍. 注意到第三列第一个元素为 1，先将这个元素 1 利用互换两列调到第一列，于是

$$D \xlongequal{c_1 \leftrightarrow c_3} -\begin{vmatrix} 1 & -5 & 2 & 2 \\ -1 & 7 & -3 & 4 \\ 2 & -9 & 5 & 7 \\ 1 & -6 & 4 & 2 \end{vmatrix} \xlongequal[r_4-r_1]{\substack{r_2+r_1 \\ r_3-2r_1}} -\begin{vmatrix} 1 & -5 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & -1 & 6 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & 2 & 0 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{r_2 \leftrightarrow r_3} \begin{vmatrix} 1 & -5 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & -1 & 6 \\ 0 & -1 & 2 & 0 \end{vmatrix} \xlongequal{\substack{r_3-2r_2 \\ r_4+r_2}} \begin{vmatrix} 1 & -5 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 3 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{r_4+r_3}\begin{vmatrix}1 & -5 & 2 & 2\\0 & 1 & 1 & 3\\0 & 0 & -3 & 0\\0 & 0 & 0 & 3\end{vmatrix}=1\times1\times(-3)\times3=-9.$$

例 2　计算 4 阶行列式

$$D=\begin{vmatrix}0 & -1 & -1 & 2\\1 & -1 & 0 & 2\\-1 & 2 & -1 & 0\\2 & 1 & 1 & 0\end{vmatrix}.$$

解　由于第一列的第一个元素为 0，先互换第一行、第二行有

$$D\xlongequal{r_1\leftrightarrow r_2}-\begin{vmatrix}1 & -1 & 0 & 2\\0 & -1 & -1 & 2\\-1 & 2 & -1 & 2\\2 & 1 & 1 & 0\end{vmatrix}\xlongequal[r_3-2r_1]{r_3+r_1}-\begin{vmatrix}1 & -1 & 0 & 2\\0 & -1 & -1 & 2\\0 & 1 & -1 & 2\\0 & 3 & 1 & -4\end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[r_3+3r_2]{r_3+r_2}-\begin{vmatrix}1 & -1 & 0 & 2\\0 & -1 & -1 & 2\\0 & 0 & -2 & 4\\0 & 0 & -2 & 2\end{vmatrix}\xlongequal{r_4-r_3}-\begin{vmatrix}1 & -1 & 0 & 2\\0 & -1 & -1 & 2\\0 & 0 & -2 & 4\\0 & 0 & 0 & -2\end{vmatrix}$$

$$=-1\times(-1)\times(-2)\times(-2)=4.$$

例 3　计算 n 阶行列式

$$D_n=\begin{vmatrix}a & b & b & \cdots & b\\b & a & b & \cdots & b\\b & b & a & \cdots & b\\\vdots & \vdots & \vdots & & \vdots\\b & b & b & \cdots & a\end{vmatrix}.$$

解　注意到此行列式中各行（列）的 n 个数之和相等，故可把第二列至第 n 列都加到第一列上去，然后各行都加上第一行的（-1）倍，就有

$$D_n\xlongequal{c_1+c_2+\cdots+c_n}\begin{vmatrix}a+(n-1)b & b & b & \cdots & b\\a+(n-1)b & a & b & \cdots & b\\a+(n-1)b & b & a & \cdots & b\\\vdots & \vdots & \vdots & & \vdots\\a+(n-1)b & b & b & \cdots & a\end{vmatrix}$$