QQ教辅
QQJIAOFU

点击专项

根据新课标编写 适合各种版本教材 新课标

点击专项

DIANJIZHUANXIANG

主编：李永哲

高中数学

三角函数

延边大学出版社

QQ教辅

QQJIAOFU

根据新课标编写　适合各种版本教材　新课标

点击专项

DIANJIZHUANXIANG

高中数学

本册主编：刘德广　张克敏

编　　委：王雪晶　徐　蝶　张　欣
兰俊义　杨秀杰　赵传娟
张　友　刘金国　石成合
王春花　郑明琴　高　琨
张　伟　刘晓菲　李业英
杜雪瑛　周广文　于黎春
曹艳菊

三角函数

延边大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

点击专项·高中数学·三角函数/李永哲主编. —延吉:延边大学出版社,2009. 8

ISBN 978 - 7 - 5634 - 2826 - 7

Ⅰ. 点… Ⅱ. 李… Ⅲ. 数学课 - 高中 - 教学参考资料 Ⅳ. G634

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2009)第 130275 号

点击专项·高中数学·三角函数

主编:李永哲

责任编辑:秀　豪

出版发行:延边大学出版社

社址:吉林省延吉市公园路 977 号　　**邮编**:133002

网址:http://www.ydcbs.com

E - mail:ydcbs@ydcbs.com

电话:0433 - 2732435　　**传真**:0433 - 2732434

发行部电话:0433 - 2133001　　**传真**:0433 - 2733266

印刷: 大厂回族自治县兴源印刷厂

开本:880 × 1230　1/32

印张:10.875　　**字数**:210 千字

印数:1—12000

版次:2010 年 3 月第 1 版

印次:2010 年 3 月第 1 次印刷

ISBN 978 - 7 - 5634 - 2826 - 7

定价:18.00 元

前 言 Foreword

在数学这门学科中，知识的各个部分是有关联的，但各知识都有自己的特点。因此，在学习过程中，数学各专题知识独特的规律就需要学生们细心把握。

正因为如此，我们聘请多年在一线教学工作岗位的特高级教师，根据教育部颁布的新课标和新大纲的要求，编写了本书《点击专项——高中数学 三角函数》，目的是让同学们在学习本数学专题时对这部分知识内容有深刻的理解和掌握。

为使广大读者更方便地使用本书，本书按从易到难的梯度编写，这样，对本专题知识没有吃透的学生就可以迅速掌握本专题的知识；中等水平的学生在精读本书提高篇后会使自己更上一层楼；优秀的学生可以通过拓展篇的训练使自己处在更高的水平。

本书精选的大量不同难度的习题能让不同层次的学生有的放矢，并体验到学习的乐趣。

本书由如下版块构成：

三维目标

本版块将每一节的知识内容在知识与技能，过程与方法，情感、态度与价值观这三维上提出学习要求和手段，使同学们对所应掌握的知识内容和所要达到的目标一目了然。

知识归纳

本版块将三角函数的知识和规律进行总结和归纳，将其主要规律呈示出来，使学生们在学习中能在最短的时间内掌握该小节的内容。

典型例题及训练题

本版块分为例题和训练部分。基础篇较简单。学生通过基础篇的训练能尽快地掌握该小节的基本内容，对基本内容和概念加深理解并熟练掌握。

提高篇具有相当的难度。学生通过提高篇的训练，不仅能更熟练地掌握该小节的基本内容，而且能对与该小节相关联的内容有一定的理解和掌握。

拓展篇的题难度很大，但这些题都是在该小节的基础知识之上进行变型和延伸的，因此，这些题是该小节内容的总结与拓展。学生通过拓展篇的训练，能够对该小节的内容有个明晰的认识。

总结提升把每小节的知识结构和规律方法做了梳理和总结，并对重要内容做了重点讲解和例析，再通过综合性的自我检测训练，使同学们系统地掌握该小节知识。

参考答案

全书给出了标准答案，有一定难度的题还给出了解题思路和具体步骤。

充分阅读本书，通过这种阶梯式的训练，任何学生都能迅速有效地掌握该小节的内容，从而达到点击专项的目的。

目 录 Contents

第一章　三角函数

知识结构

- 三角函数
  - 角
    - 任意角
      - 正角
      - 负角
      - 零角
    - 象限角
    - 象限界角
    - 终边相同的角
  - 角的度量
    - 角度制
    - 弧度制
  - 任意角的三角函数
    - 正弦：$\sin\alpha$
    - 余弦：$\cos\alpha$
    - 正切：$\tan\alpha$
  - 同角三角函数间的关系式
    - $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$
    - $\tan\alpha=\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$
  - 三角函数的诱导公式
    - 公式一：$\sin(\alpha+2k\pi)=\sin\alpha$；$\cos(\alpha+2k\pi)=\cos\alpha$；$\tan(\alpha+2k\pi)=\tan\alpha\ (k\in\mathbf{Z})$
    - 公式二：$\sin(\pi+\alpha)=\sin\alpha$；$\cos(\pi+\alpha)=-\cos\alpha$；$\tan(\pi+\alpha)=\tan\alpha$
    - 公式三：$\sin(-\alpha)=-\sin\alpha$；$\cos(-\alpha)=\cos\alpha$；$\tan(2\pi-\alpha)=-\tan\alpha$
    - 公式四：$\sin(\pi-\alpha)=\sin\alpha$；$\cos(\pi-\alpha)=-\cos\alpha$；$\tan(\pi-\alpha)=-\tan\alpha$
    - 公式五：$\sin(2\pi-\alpha)=-\sin\alpha$；$\cos(2\pi-\alpha)=\cos\alpha$；$\tan(2\pi-\alpha)=-\tan\alpha$
    - 公式六：$\sin(\frac{\pi}{2}-\alpha)=\cos\alpha$；$\cos(\frac{\pi}{2}-\alpha)=\sin\alpha$
    - 公式七：$\alpha\sin(\frac{\pi}{2}+\alpha)=\cos\alpha$；$\cos(\frac{\pi}{2}+\alpha)=-\sin\alpha$
  - 三角函数的图象与性质
    - 图象：五点法
    - 性质
      - 定义域、值域
      - 单调性
      - 周期性
      - 奇偶性
      - 最值
  - 函数 $y=A\sin(\omega x+\varphi)$ 的图象及三角函数模型的简单应用
    - 三角函数图象的变换
    - 三角函数模型的实际应用

高考要求

1. 理解任意角的概念、弧度的意义,能正确进行弧度与角度的换算.

2. 掌握任意角的正弦、余弦、正切的定义,了解余切、正割、余割的定义,掌握同角三角函数的基本关系式,掌握正弦、余弦的诱导公式.

3. 能正确运用三角公式进行简单三角函数式的化简、求值和恒等式证明.

4. 借助图象理解正弦函数、余弦余数在$[0,2\pi]$,正切函数在$(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$上的性质(如单调性、最大值、最小值、图象与$x$轴交点等).

5. 了解正弦函数、余弦函数、正切函数的图象与性质,会用“五点法”画正弦函数、余弦函数和函数$y=A\sin(\omega+\varphi)$的简图,理解A、ω、φ的物理意义.

6. 会用三角函数解决一些简单实际问题,体会三角函数是描述周期变化现象的重要函数模型.

1.1 任意角和弧度制

一、三维目标

1. 知识与技能

了解任意角的概念和弧度制,能进行弧度与角度的互化.

2. 过程与方法

(1)由实际问题,抽象出任意角的概念;

(2)由数形结合得出正角、负角、零角以及象限角的概念;

(3)遵循由特殊到一般的方法,归纳总结出终边相同的角的表示方法;

(4)由圆周角找出弧度制与角度制的联系;

(5)用对应的观点可以发现:在弧度制下,角的集合与实数集 **R** 之间建立起一一对应的关系.

3. 情感、态度与价值观

利用运动的观点(角的旋转)和数形结合的思想去研究角,用转化的思想去认识角度制与弧度制的统一性,用集合与对应的思想去理解弧度制,养成用数学思想方法去处理问题的习惯.

二、知识归纳

知识点1　任意角

1. 任意角的概念

一条射线的端点是 O,它从初始位置 OA 旋转到终点位置 OB,形成一个角 α,点 O 是角 α 的顶点,射线 OA、OB 分别是角 α 的始边和终边.

2. 正角、负角、零角

我们规定,按逆时针方向旋转形成的角叫正角;按顺时针方向旋转形成的角叫负角;若射线没有做任何旋转,形成的角叫零角. 显然,角的大小与旋转的周数有关,角的正负与旋转的方向有关.

【推广引申】

(1)可以考虑应用手表,车轮的旋转等来看角是如何旋转形成的,加深对角的概念的理解.(2)现在角的大小已经没有限制,可以顺时针或逆时针旋转任意的角度,突破了初中时只能旋转一圈的限制.(3)正、负角的规定同正、负数的规定一样,都是出于习惯,我们习惯上用逆时针方向表示一个正角.(4)要更深入地理解正角、负角的概念,我们可以引入旋转量的概念. 旋转量表示角的大小加上旋转的方向(类似于向量). 显然正角、负角具有相反的旋转量. 零角是没做任何旋转的角,它不分正负,就像实数0不分正负一样. α 与 $-\alpha$ 是大小相同但旋转方向相反的两个角.(5)画图表示角时,常用带箭头的弧来表示旋转的方向,旋转的周数即角的绝对值的大小.

知识点2　象限角

1. 象限角

若把角的顶点与原点重合,角的始边与 x 轴的非负半轴重合,那么,角的终边(除顶点外)在第几象限,我们就说这个角是第几象限角.

2. 象限界角

特别地,如果角的终边在坐标轴上,就认为这个角不属于任何一个象限,例如:$0°$、$90°$、$-180°$,因为它们的终边落在坐标轴上,所以这些角处于一种边界状态,不属于任何一个象限,我们称之为象限界角.

【温馨提示】

(1)象限角得出的前提是角与坐标系的联系:角的顶点与原点重合,角的始边与 x 轴的非负半轴重合. 如果角不是这种放法,那么得到的结论是错误的.(2)在直角坐标系内讨论角,可以使角的讨论得到简化,能有效地表示出角的终边位置"周而复始"的现象.(3)若 $0°<\alpha<90°$,则 α 是第一象限角,而第一象限角不一定是这个范围,如 $0°+360°<\alpha<90°+360°$. 显然,角的终边每转 $360°$(即一圈),就会出现一部分.(4)每个角在坐标系内有唯一的一条终边,而一条终边却对应很多个角,在其中一个角的基础上,终边每旋转一圈,就会出现一个该终边对应的角.

知识点3　与角 α 终边相同的角

1. 与角 α 终边相同的角的定义

一般地，所有与角 α 终边相同的角，连同角 α 在内，可构成一个集合 $S=\{\beta|\beta=\alpha+k\cdot360^\circ,k\in\mathbf{Z}\}$，即任一个角 α 终边相同的角，都可表示成角 α 与 360° 的整数倍的和的形式.

【类比发散】

(1) 对于这个概念的理解要把握以下三个点：①$k\in\mathbf{Z}$；②α 是任意角；③终边相同的角不一定相等，终边相同的角有无数个，它们相差 360° 的整数倍. (2) 利用与角 α 终边相同的角的集合，可把任一角 β 转化成 $\beta=\alpha+k\cdot360^\circ,k\in\mathbf{Z},\alpha\in[0^\circ,360^\circ]$ 的形式，从而利用角 α 的终边所在的象限判断出角 β 所在的象限. (3) 用草式除法化简角，更简便易行. ① $-60^\circ=300^\circ-360^\circ$；②$585^\circ=225^\circ+360^\circ$；③ $-950^\circ12'=129^\circ48'-3\times360^\circ$. 计算过程为：

$$\begin{array}{r|l} & -1 \\ \hline 360^\circ & -60^\circ \\ & -360^\circ \\ \hline & 300^\circ \end{array}\qquad \begin{array}{r|l} & 1 \\ \hline 360^\circ & 585^\circ \\ & 360^\circ \\ \hline & 225^\circ \end{array}\qquad \begin{array}{r|l} & -3 \\ \hline 360^\circ & -950^\circ\ 12' \\ & -1080^\circ \\ \hline & 129^\circ\ 48' \end{array}$$

除数是 360°，当被除数是正的角度时，商是正值；当被除数是负的角度时，商是负值且它的绝对值应比被除数为其相反数时相应的商大1，这样可使得余数为正值. 对于 $(-360^\circ,0^\circ)$ 范围内的角所在的象限也可直接作出判断. (4) k 的取值具有几何意义，k 的绝对值表示终边绕着原点旋转处的圈数，当 k 为正值时，做逆时针转动，当 k 为负值时，做顺时针转动；$k=0$ 时终边没有转动.

2. 常见的终边相同的角的集合

在 0° 到 360° 范围内，终边落在 x 轴上的角有两个，即 0° 和 180° 角. 与 0°，360° 角终边相同的角的集合分别为 $S_1=\{\beta|\beta=k\cdot360^\circ,k\in\mathbf{Z}\}$. 与 180° 终边相同的角的集合为 $S_2=\{\beta|\beta=180^\circ+k\cdot360^\circ,k\in\mathbf{Z}\}$. 终边落在 x 轴上的角的集合为 $S=S_1\cup S_2=\{\beta|\beta=2k\cdot180^\circ,k\in\mathbf{Z}\}\cup\{\beta|\beta=(2k+1)\cdot180^\circ,k\in\mathbf{Z}\}=\{\beta|\beta=n\cdot180^\circ,n\in\mathbf{Z}\}$.

所以，终边落在 x 轴上的集合是 $\{\beta|\beta=n\cdot180^\circ,n\in\mathbf{Z}\}$. 同理，终边落在 y 轴上的集合是 $\{\beta|\beta=90^\circ+n\cdot180^\circ,n\in\mathbf{Z}\}$. 终边落在坐标轴上的角的集合为 $S=\{\beta|\beta=k\cdot90^\circ,k\in\mathbf{Z}\}$

【归纳总结】

(1) 象限角集合：第一象限角的集合 $\{\alpha|k\cdot360^\circ<\alpha<k\cdot360^\circ+90^\circ,k\in\mathbf{Z}\}$.

第二象限角的集合 $\{\alpha|k\cdot360^\circ+90^\circ<\alpha<k\cdot360^\circ+180^\circ,k\in\mathbf{Z}\}$.

第三象限角的集合 $\{\alpha|k\cdot360^\circ+180^\circ<\alpha<k\cdot360^\circ+270^\circ,k\in\mathbf{Z}\}$.

第四象限角的集合 $\{\alpha|k\cdot360^\circ+270^\circ<\alpha<k\cdot360^\circ+360^\circ,k\in\mathbf{Z}\}$.

(2) 奇数集与偶数集的并集为整数集.

知识点4　弧度制

1. 弧度定义

把长度等于半径长的圆弧所对的圆心角叫做1弧度的角，用符号 rad 表示，读作：弧度.

在单位圆中,1 个单位长度的弧所对的圆心角称为 1 弧度的角,显然,此时圆心角 α 的弧度数等于圆心角 α 所对的弧长.

【推广引申】

(1)弧度制与角度制都是角的度量方法,但是使用了不同标准,弧度制是以"弧度"为单位度量角的制度,角度制是以"度"为单位度量角的制度. 角度制是利用了圆周角的$\frac{1}{360}$为 1 度,而弧度制是利用了长度等于半径长的圆弧所对的圆心度为 1 弧度.

(2)不管是以"弧度"还是以"度"为单位的角,其大小都是一个与半径无关的定值.

(3)随着角的推广,弧的概念随之推广. 弧也有正弧、负弧和零弧之分,弧的正负体现了角的不同方向.

(4)圆的弧长与其半径的比值为定值的证明:如图 1 - 1 - 1,设 α 为 $n^\circ(n>0)$的角,圆弧$\overset{\frown}{MN}$和$\overset{\frown}{M_1N_1}$的长分别为 l 和 l_1,点 M 和 M_1 到点 O 的距离分别为 $r(r>0)$和 $r_1(r_1>0)$,由初中学过的弧长公式可得 $l=\frac{n\pi r}{180}$,$l_1=\frac{n\pi r_1}{180}$,于是$\frac{l}{r}=\frac{l_1}{r_1}=\frac{n\pi}{180}$. 即当圆心角一定时,它所对的弧长与其半径的比值是一定的. 圆心角的弧度数是一个与半径无关的量,可以作为角的度量单位.

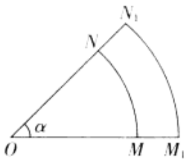


图 1 - 1 - 1

2. **弧度制**

一般地,任一正角的弧度数都是一个正数;任一负角的弧度数都是一个负数;零角的弧度数是 0. 这种以弧度作为单位来度量角的制度叫做弧度制.

因为圆周角在角度制下是 360°,在弧度制下是 2πrad,所以 $360^\circ=2\pi\text{rad}$;$180^\circ=\pi\text{rad}$;$1^\circ=\frac{\pi}{180}\text{rad}\approx0.01745\text{rad}$;$1\text{rad}=\left(\frac{180^\circ}{\pi}\right)\approx57.30^\circ=57^\circ18'$.

【类比发散】

弧度制与角度制相比,在用角度制表示角时,我们总是十进制与六十进制并用的. 例如,用 $\alpha=30^\circ23'8''$,其中 30°、23′8″各单位内都是十进位的,而度、分、秒之间则是六十进位的. 于是要找出角 $\alpha=30^\circ23'8''$相对应的实数(即 $30^\circ23'8''=30^\circ+\left(\frac{23}{60}\right)^\circ+\left(\frac{8}{3600}\right)\approx30.386^\circ$),要经过一番计算. 但用弧度制表示角时,则可直接找出与之相对应的实数.

3. **特殊角的弧度数与角度的对应**

角度	0°	30°	45°	60°	90°	120°	180°	225°	270°	315°	360°
弧度	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	π	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{7\pi}{4}$	2π

【警示区】

(1)用弧度制表示角的大小时,"弧度"两字可以省略不写,这时弧度数在形式上虽是一个不名数,但我们应把它理解为名数.如 sin2 是指 sin(2 弧度),$\pi=180°$是指 π 弧度 $=180°$;但如果以度(°)表示角时,度(°)不能略去.

(2)注意角度制与弧度制之间不能混用,例如这样的式子 $2k\pi+45°$是错误的.

(3)以弧度为单位表示角时,常常把弧度数写成多少 π 的形式,如无特殊要求,不必把 π 写成小数,如 $45°=\frac{\pi}{4}$弧度,不必再写成 $45°\approx0.875$ 弧度.

知识点5　弧度制下的弧长公式及扇形面积公式

1. 角的弧度数的绝对值公式

设 r 是圆的半径,l 是圆心角 α 所对的弧长,由弧度的定义可知,角 α 的弧度数的绝对值为 $|\alpha|=\frac{l}{r}$.

2. 弧长公式

弧长等于弧所对的圆心角弧度数的绝对值与半径的积,即 $l=|\alpha|r$.

【方法规律】

要灵活运用公式 $|\alpha|=\frac{l}{r}$ 或 $l=|\alpha|\cdot r$,及其变形形式 $r=\frac{1}{|\alpha|}$,显然 $l,|\alpha|,r$ 之间存在三个公式,可以看到 $l,|\alpha|,r$ 三个量知二求一,并且弧度制的运算比以前的角度制的运算要简单.

3. 扇形面积公式

半径为 r,弧长为 l 的扇形的面积 $S_{扇}=\frac{1}{2}lr=\frac{1}{2}|\alpha|r^2$.

知识点6　弧度数与实数对应

角的概念推广后,在弧度制下,角的集合与实数集 **R** 之间建立起了一一对应的关系:每一个角都有唯一的实数(即这个角的弧度数)与它对应;反过来每个实数也都有唯一的一个角(即弧度数等于这个实数的角)与它对应.

【推广引申】

圆心角和弧的概念也随之得到推广:从形式上看,圆心角有正角、零、负角之分,弧也就有正弧、零弧、负弧之分;从"数"上看,圆心角与弧的度数有正数、零、负数之分.所以,如果一个圆心角是正数,那么它的弧度数必是一个正数;如果圆心角是负数,那么它的弧度数也必是一个负数;零角的弧度数是零.所以,无论角度制还是弧度制都能在角的集合与实数集 **R** 之间建立起一种一一对应的关系.

三、典型例题及训练题

(一)基础篇

典例分析

题型一:角的概念及分类

例1　(1)时针走过2.5h,则分针转过的角度是________;

(2)若将钟表拨慢了10min,则时针转了________度,分针转了________度.

分析:注意时针按顺时针方向转动,转过的角度是负角.

解:(1)时针走了1h分针恰好转一圈,即转过$-360°$. $\therefore -360°\times 2.5=-900°$. $\therefore$ 应填$-900°$.

(2)将钟表拨慢10min,时针按逆时针方向转了$10\times\frac{360°}{12\times 60}=5°$,分针转了$10\times\frac{360°}{60}=60°$. $\therefore$ 应填5,60.

点评

解答本题的关键是旋转方向与正负角的关系,以及时针、分针旋转的角度关系.

例2　锐角是第几象限角?第一象限的角是否都是锐角?小于90°的角是锐角吗?0°~90°的角是锐角吗?

分析:锐角是以角的大小来分类,而象限是以终边的位置来分类,两者不属于同一概念.

解:(1)锐角是第一象限角,可以表示为$\{\theta|0°<\theta<90°\}$;

(2)第一象限角不一定是锐角,如390°角;

(3)小于90°的角还可能是零角或负角,可以表示为$\{\theta|\theta<90°\}$;

(4)0°~90°的角可能是零角,可以表示为$\{\theta|0°\leqslant\theta<90°\}$,故它也不一定是锐角.

点评

解答此类题关键是弄清角的概念及含义,同时也要注意角的范围及特例.

例3　射线OA绕端点O顺时针旋转80°到OB位置,接着逆时针旋转250°到OC位置,然后再顺时针旋转270°到OD位置,求$\angle AOD$的大小.

解:由题意$\angle AOB=-80°$, $\angle BOC=250°$, $\angle COD=-270°$,所以$\angle AOD=\angle AOB+\angle BOC+\angle COD=-80°+250°-270°=-100°$

点评

1. 通过角的推广后，我们将角的加减转化成了代数式的运算.

2. 既然角是一条射线绕着它的端点，从一个位置旋转到另一个位置所形成的图形，因此便有了方向. 我们规定，按逆时针方向旋转形成的角叫做正角，按逆时针方向旋转形成的角叫做负角. 如果一条射线没有任何旋转，我们称它形成了一个零角. 零角的始边与终边重合. 如果 α 是零角，那么 $\alpha=0°$.

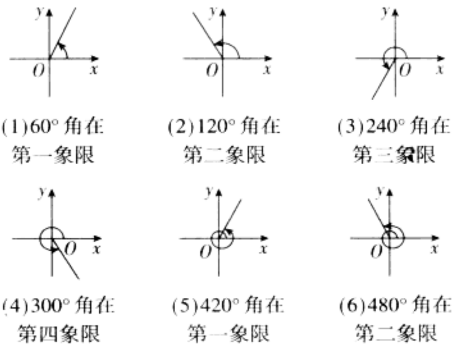
注意：(1) 为了简单起见，在不引起混淆的前提下，“角 α”或“$\angle\alpha$”可以简记为“α”.

(2) 这样，我们就把角的概念推广到了任意角，包括正角、负角和零角.

(3) 要正确理解正角、负角、零角的概念，由定义可知，关键是抓住终边的旋转方向是逆时针、顺时针还是没有转动.

例 4 在直角坐标系中，作出下列各角，并指出它们是第几象限角.

(1) $60°$；(2) $120°$；(3) $240°$；(4) $300°$；(5) $420°$；(6) $480°$.



(1) $60°$ 角在第一象限 (2) $120°$ 角在第二象限 (3) $240°$ 角在第三象限

(4) $300°$ 角在第四象限 (5) $420°$ 角在第一象限 (6) $480°$ 角在第二象限

图 1－1－2

点评

1. 通过作图能够更直观地观察出以上各角与锐角 $60°$ 之间的关系，也可以形象地看出终边相同的角是不唯一的.

2. 将角放在直角坐标系中，角的顶点在原点，角的始边始终与 x 轴正半轴重合，一方面随着终边的旋转，角的大小也在变化着，另一方面，由于终边的位置特征，终边在第几象限，便称此角为第几象限角.

如果角的顶点不与坐标原点重合，或者角的始边不与 x 轴正半轴重合，则不能判断角在哪一个象限，也就是它不能称作象限角.

题型二:终边相同的角

例5　(1)把 $-1480°$ 写成 $\alpha+2k\pi(k\in\mathbf{Z})$ 的形式,其中 $0\leqslant\alpha\leqslant2\pi$;

(2)若 $\beta\in[-4\pi,0]$ 且 β 与(1)中 α 终边相同,求 β.

分析:利用互化公式将 $-1480°$ 化为弧度制即可.由 $\beta=\alpha+2k\pi,k\in\mathbf{Z}$ 即可求出 β.

解:(1)$\because -1480°=-\dfrac{1480\pi}{180}=-\dfrac{74\pi}{9}=-10\pi+\dfrac{16\pi}{9}$,又 $0\leqslant\dfrac{16\pi}{9}\leqslant2\pi$,

$\therefore -1480°=\dfrac{16\pi}{9}-2\times5\pi=\dfrac{16\pi}{9}+2\times(-5)\pi$.

(2)由(1)可知 $\alpha=\dfrac{16\pi}{9}$.

$\because\beta$ 与 α 终边相同,$\therefore\beta=2k\pi+\dfrac{16\pi}{9},k\in\mathbf{Z}$,又$\because\beta\in[-4\pi,0]$,

令 $k=-1$,则 $\beta=-\dfrac{2\pi}{9}$;令 $k=-2$,则 $\beta=-\dfrac{20\pi}{9}$,

$\therefore\beta$ 的取值是 $-\dfrac{2\pi}{9},-\dfrac{20\pi}{9}$.

点评

本题主要考查角度与弧度的转化、换算,以及终边相同的角的性质,关键是单位的统一.

例6　判断下列各角所在的象限,并指出其在 $0°\sim360°$ 范围内与其终边相同的角.

(1)$549°$;　(2)$-60°$;　(3)$-503°36'$.

解:(1)$549°=189°+360°$,而 $180°<189°<270°$,因此 $549°$ 为第三象限角,且于 $189°$ 角有相同的终边.

(2)$-60°=300°-360°$,而 $270°<300°<360°$,因此 $-60°$ 为第四象限角,且与 $300°$ 角有相同的终边.

(3)因为 $-503°36'=216°24'-2\times360°$,而 $180°<216°24'<270°$,因此 $-503°36'$ 是第三象限的角,且于 $216°24'$ 角有相同的终边.

点评

1. 根据象限角的定义判断.

2. (1)定义:我们把这种由于旋转周数不同,但终边位置相同而产生的角,叫终边相同的角.

(2)表示方法:一般地,我们有:所有与角 α 终边相同的角,连同角 α 在内,可构成一个集合 $S=\{\beta|\beta=\alpha+k\cdot360°,k\in\mathbf{Z}\}$,即任一与角 α 终边相同的角,都可以表示成角 α 与整个周角的和.

注意:(1)α 为任意角.

(2)$k\cdot360^\circ$ 与 α 之间是"+"号,$k\cdot360^\circ-\alpha$ 可理解为 $k\cdot360^\circ+(-\alpha)$.

(3)相等的角,终边一定相同;终边相同的角不一定相等,终边相同的角有无数个,它们相差 360° 的整数倍.

(4)$k\in\mathbf{Z}$ 这一条件不可少.

例 7 求终边为直线 $y=-x$ 的角的集合.

解:在 $0^\circ\sim360^\circ$ 范围内满足条件的角为 135° 和 315°,所以终边为直线 $y=-x$ 的角的集合是 $\{\alpha|\alpha=k\cdot360^\circ+135^\circ,k\in\mathbf{Z}\}\cup\{\alpha|\alpha=k\cdot360^\circ+315^\circ,k\in\mathbf{Z}\}=\{\alpha|\alpha=2k\cdot180^\circ+135^\circ,k\in\mathbf{Z}\}\cup\{\alpha|\alpha=(2k+1)\cdot180^\circ+135^\circ,k\in\mathbf{Z}\}=\{\alpha|\alpha=n\cdot180^\circ+135^\circ,n\in\mathbf{Z}\}$.

点评

1. 利用相同的方法,可以求出终边为 $y=x$ 的角的集合,即 $\{\alpha|\alpha=n\cdot180^\circ+45^\circ,n\in\mathbf{Z}\}$,由本例可得出终边为 $y=\pm x$ 的角的集合,即 $\{\alpha|\alpha=n\cdot90^\circ+45^\circ,n\in\mathbf{Z}\}$.

2. (1)定义:终边落在坐标轴上的角,被称为轴线角.

(2)轴线角的集合:

终边落在 x 轴的非负半轴上,角的集合为:$\{x|x=k\cdot360^\circ,k\in\mathbf{Z}\}$.

终边落在 x 轴的非正半轴上,角的集合为:$\{x|x=k\cdot360^\circ+180^\circ,k\in\mathbf{Z}\}$.

终边落在 x 轴上,角的集合为:$\{x|x=k\cdot180^\circ,k\in\mathbf{Z}\}$.

终边落在 y 轴的非负半轴上,角的集合为:$\{x|x=k\cdot360^\circ+90^\circ,k\in\mathbf{Z}\}$.

终边落在 y 轴的非正半轴上,角的集合为:$\{x|x=k\cdot360^\circ+270^\circ,k\in\mathbf{Z}\}$.或 $\{x|x=k\cdot360^\circ-90^\circ,k\in\mathbf{Z}\}$.

终边落在 y 轴上,角的集合为:$\{x|x=k\cdot180^\circ+90^\circ,k\in\mathbf{Z}\}$.

轴线角的表示形式并不唯一,也可以有其他的表示形式.

例 8 与 $\frac{9}{4}\pi$ 终边相同的角的表达式中,正确的是 ( )

A. $2k\pi+45^\circ,k\in\mathbf{Z}$　　B. $k\cdot360^\circ+\frac{9}{4}\pi,k\in\mathbf{Z}$

C. $k\cdot360^\circ-315^\circ,k\in\mathbf{Z}$　　D. $k\pi+\frac{\pi}{4},k\in\mathbf{Z}$

分析:$\frac{9}{4}\pi$ 化为角度制为 405°,与其终边相同的角为 $k\cdot360^\circ-315^\circ,k\in\mathbf{Z}$,故答案为 C. $\frac{9}{4}\pi$ 的终边与 45° 角的终边相同,若以弧度制表示,可写成 $2k\pi+\frac{\pi}{4},k\in\mathbf{Z}$,用角度制表示可写成 $k\cdot360^\circ+45^\circ$ 或 $k\cdot360^\circ-315^\circ(k\in\mathbf{Z})$. 易错之处选项 A、B 在角度制与弧度制使用上混乱,应该统一.