万向思维™
培养学子 全球视野
我的助理

高中课程标准实验教科书 配套助学用书
GaoZhong KeCheng BiaoZhun ShiYan JiaoKeShu PeiTao ZhuXue YongShu

教材知识详解™

一直在寻找这样的老师

总主编 | 刘增利®

高中数学 必修5

配人教A版

开明出版社

教材知识详解™

高中数学 必修⑤

配人教A版

总主编 刘增利
本册主编 韩廷蕴 李现勇
本册编者 韩廷蕴 李现勇

参与学科审订教师：
[黄冈中学] 王宪生 张 智
[武穴中学] 郑齐爱
[郑州一中] 孙士放
[郑州 101 中学] 薛银周
[南阳一中] 罗 东 杨要理 陈朝印 朱起克 徐香丽 黄光华
[南阳五中] 闫德龙 崔建欣 张海燕 陆大勇 时山玲 袁泽馨
[南阳八中] 李志国 郭太豪 赵 丽 张新冬 刘长柱
[南召现代高中] 张风英
[合肥工大附中] 余树宝
[芜湖一中] 徐月兵 武 湛
[铜陵一中] 胡 俊
[芜湖县一中] 章 立
[阜阳城郊中学] 吴桃李 陈 峰
[阜阳红旗中学] 刘 明
[寿光现代中学] 王金兴 魏振恩 隋守春
[宿松县程集中学] 徐河水
[鄱阳实验中学] 于胜权 张练员

开明出版社

图书在版编目（CIP）数据

教材知识详解：人教版．高中数学．5：必修／刘增利主编．-- 北京：开明出版社，2011

ISBN 978-7-5131-0452-4

Ⅰ．①教… Ⅱ．①刘… Ⅲ．①中学数学课—高中—教学参考资料 Ⅳ．①G634

中国版本图书馆CIP数据核字（2011）第208908号

策划设计	《教材知识详解》数学必修❺编写委员会	**版式设计**	李诚真
总 主 编	刘增利	**出　　版**	开明出版社
本册主编	韩廷蕴　李现勇	**印　　刷**	陕西思维印务有限公司
责任编辑	范　英	**印刷质检**	高　峰
责任审读	张晓丽	**经　　销**	各地书店
研发统筹	河　海	**开　　本**	890×1240　1/16
创意统筹	刘书娟	**印　　张**	10.5
制作统筹	刘英锋	**字　　数**	273 千字
校订统筹	陈宏民	**版　　次**	2011 年 10 月第 1 版
责任录排	孙海波	**印　　次**	2011 年 10 月第 1 次印刷
封面设计	柏拉图工作室	**定　　价**	22.80 元

主编邮箱：zbwxsw@126.com　投稿邮箱：tgwxsw@126.com

图书质量监督电话：010-88817647　　售后服务电话：010-82553636

图书内容咨询电话：010-82378880 转 111

通信地址：北京市海淀区王庄路 1 号清华同方科技广场 B 座 16 层（邮编 100083）

教师 QQ 交流群：8426522（欢迎一线老师加入，交流教学经验，共享教学资源）

目录

CONTENTS

金牌全解

目录 CONTENTS

第一章 解三角形

1.1 正弦定理和余弦定理

1.1.1 正弦定理

目标导航

1. 掌握正弦定理及其证明,会初步运用正弦定理解斜三角形.
2. 认清正弦定理的结构特征及变形形式,并能在解题过程中灵活运用.
3. 能够应用正弦定理解决两类解三角形的基本问题,并会判断三角形的形状.

旧知回顾

1. 在初中的平面几何中,我们知道三角形中有大边对大角、大角对大边的边角关系.
2. 在 Rt$\triangle ABC$ 中,$\angle C$ 是直角,$\angle A$ 所对的边为 a,$\angle B$ 所对的边为 b,$\angle C$ 所对的边为 c,则 $\sin A=\frac{a}{c}$,$\sin B=\frac{b}{c}$.

Ⅰ 教材知识详解

教材全析

1. 正弦定理

(1)在一个三角形中,各边和它所对角的正弦的比相等,即 $\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}$

(2)正弦定理的证明:

证法一(定义法):①当$\triangle ABC$是直角三角形时,如图 1-1.1-1,在 Rt$\triangle ABC$ 中,设 $BC=a$,$AC=b$,$AB=c$,根据直角三角形中正弦函数的定义,有$\frac{a}{c}=\sin A$,$\frac{b}{c}=\sin B$,且 $\sin C=\sin 90°=1$,

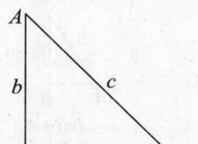


图 1-1.1-1

则$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}=c$.

从而在 Rt$\triangle ABC$ 中,$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}$.

②当$\triangle ABC$是锐角三角形时,如图 1-1.1-2,设 $BC=a$,$AC=b$,$AB=c$,设边 AB 上的高是 CD,根据任意角三角函数的定义,有 $CD=a\sin B=b\sin A$,

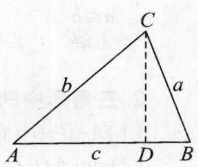


图 1-1.1-2

则$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}$.

同理可得$\frac{c}{\sin C}=\frac{b}{\sin B}$(作 BC 边上的高 h_a),

从而$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}$.

③当$\triangle ABC$是钝角三角形时,如图 1-1.1-3,角 C 是钝角.

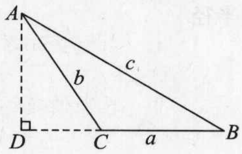


图 1-1.1-3

设角 A,B,C 的对边分别记为 a,b,c,设边 BC 上的高是 AD,

则 $AD=c\sin B$,$AD=b\sin\angle ACD=b\sin C$,

所以 $c\sin B=b\sin C$,即$\frac{c}{\sin C}=\frac{b}{\sin B}$,

同理可得$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}$(作 AB 边上的高 h_c),

从而$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}$.

证法二(向量法):如图 1-1.1-4,当$\triangle ABC$为锐角三角形时,过 A 点作单位向量 $\boldsymbol{j}$ 垂直于$\overrightarrow{AB}$,则 $\boldsymbol{j}$ 与$\overrightarrow{AB}$的夹角为 90°,$\boldsymbol{j}$ 与$\overrightarrow{BC}$的夹角为$\frac{\pi}{2}-B$,$\boldsymbol{j}$ 与$\overrightarrow{CA}$的夹角为$\frac{\pi}{2}+A$,设 $AB=c$,$BC=a$,$AC=b$.

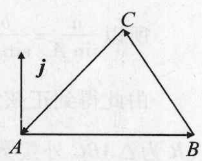


图 1-1.1-4

$\because \overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CA}=\mathbf{0}$,

$\therefore \boldsymbol{j}\cdot\overrightarrow{AB}+\boldsymbol{j}\cdot\overrightarrow{BC}+\boldsymbol{j}\cdot\overrightarrow{CA}=\boldsymbol{j}\cdot\mathbf{0}=0$.

即$|\boldsymbol{j}||\overrightarrow{AB}|\cdot\cos\frac{\pi}{2}+|\boldsymbol{j}||\overrightarrow{BC}|\cos\left(\frac{\pi}{2}-B\right)+|\boldsymbol{j}||\overrightarrow{CA}|\cdot\cos\left(\frac{\pi}{2}+A\right)=0$,$\therefore a\sin B+b(-\sin A)=0$,

$\therefore a\sin B=b\sin A$,即$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}$.

同理可得$\dfrac{b}{\sin B}=\dfrac{c}{\sin C}$,

$\therefore \dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{b}{\sin B}=\dfrac{c}{\sin C}$.

当$\triangle ABC$为钝角三角形(如图 1-1.1-5)或直角三角形时,也可得出类似结论.

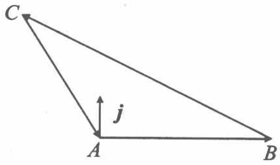


图 1-1.1-5

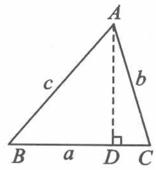


图 1-1.1-6

证法三(面积法):如图 1-1.1-6,在$\triangle ABC$中,过点A作$AD\perp BC$于点D.

所以$S_{\triangle ABC}=\dfrac{1}{2}BC\cdot AD=\dfrac{1}{2}ac\sin B$.

同理$S_{\triangle ABC}=\dfrac{1}{2}ab\sin C$,$S_{\triangle ABC}=\dfrac{1}{2}bc\sin A$,

所以$\dfrac{1}{2}ac\sin B=\dfrac{1}{2}ab\sin C=\dfrac{1}{2}bc\sin A$,

因为a,b,c为$\triangle ABC$的三边长,所以$\dfrac{1}{2}abc\neq 0$.

两边同时除以$\dfrac{1}{2}abc$,并取倒数得

$\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{b}{\sin B}=\dfrac{c}{\sin C}$.

证法四(外接圆法):如图 1-1.1-7,R为$\triangle ABC$外接圆的半径.

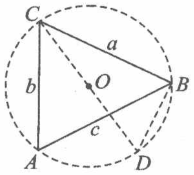


图 1-1.1-7

因为$\angle A=\angle D$,

所以$\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{a}{\sin D}=CD=2R$.

同理$\dfrac{b}{\sin B}=2R$,$\dfrac{c}{\sin C}=2R$,

所以$\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{b}{\sin B}=\dfrac{c}{\sin C}=2R$.

由此得到正弦定理的推广形式:$\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{b}{\sin B}=\dfrac{c}{\sin C}=2R$($R$为$\triangle ABC$外接圆的半径).

(3)正弦定理有如下变式:

$a\sin B=b\sin A$,$a\sin C=c\sin A$,$b\sin C=c\sin B$;

$\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{b}{\sin B}=\dfrac{c}{\sin C}=\dfrac{a+b+c}{\sin A+\sin B+\sin C}$;

$\dfrac{a}{b}=\dfrac{\sin A}{\sin B}$,$\dfrac{b}{c}=\dfrac{\sin B}{\sin C}$,$\dfrac{c}{a}=\dfrac{\sin C}{\sin A}$;

$a=2R\sin A$,$b=2R\sin B$,$c=2R\sin C$;

$\sin A=\dfrac{a}{2R}$,$\sin B=\dfrac{b}{2R}$,$\sin C=\dfrac{c}{2R}$;

$\sin A:\sin B:\sin C=a:b:c$.

剖析说明

(1)正弦定理$\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{b}{\sin B}=\dfrac{c}{\sin C}$反映了三角形中三条边和对应角的正弦的关系,它的主要功能是实现三角形中边角关系的转化.

(2)在$\triangle ABC$中,若角A,B,C所对的边分别为a,b,c,由正弦定理也可得三角形的面积公式为$S_{\triangle ABC}=\dfrac{1}{2}ab\sin C=\dfrac{1}{2}bc\sin A=\dfrac{1}{2}ca\sin B$.

2. 解三角形

(1)一般地,把三角形的三个角A,B,C和它们的对边a,b,c叫做三角形的元素.已知三角形的几个元素求其他元素的过程叫做解三角形.

(2)正弦定理主要用来解决以下两类解三角形问题:

①已知两角和任一边,求其他的两边和一角.步骤为:

a.由三角形内角和定理求出第三个角;

b.由正弦定理公式的变形,求另外的两边.

②已知两边和其中一边的对角,求另一边的对角,进而求其他的边和角.步骤为:

a.由正弦定理求出另一边所对角的正弦值;

b.根据"$y=\sin x$"的值域判断是否有解;

c.若有解,则结合"大边对大角"和"内角和定理"求出这个角和另外一个角;

d.由正弦定理求出另一边.

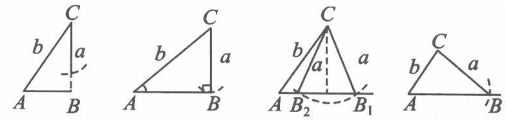
知识拓展

1. 利用正弦定理解题时,对解的个数的讨论

当已知三角形的两边和其中一边的对角时,不能唯一确定三角形的形状,可能出现一解、两解或无解的情况,这时应结合"三角形中,大边对大角"的定理及几何图形进行取舍.

例如:在$\triangle ABC$中,已知a,b和$\angle A$时,解三角形的各种情况如下:

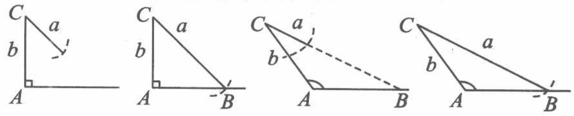
①当$\angle A$为锐角时,如图 1-1.1-8:



$a<b\sin A$	$a=b\sin A$	$b\sin A<a<b$	$a\geq b$
无解	一解	两解	一解

图 1-1.1-8

②当$\angle A$为直角或钝角时,如图 1-1.1-9:



$a\leq b$	$a>b$	$a\leq b$	$a>b$
无解	一解	无解	一解

图 1-1.1-9

2. 三角形中的常用结论

(1)$A+B+C=\pi$;

(2)$\sin(A+B)=\sin C$,$\cos(A+B)=-\cos C$,$\tan(A+B)=-\tan C$;

(3)$\sin\dfrac{A+B}{2}=\cos\dfrac{C}{2}$,$\cos\dfrac{A+B}{2}=\sin\dfrac{C}{2}$;

(4)$A>B\Leftrightarrow a>b\Leftrightarrow \sin A>\sin B$.

3. 在三角形中,求三角函数的取值范围或最值的方法步骤

(1)利用正弦定理理清三角形中基本量间的关系或求出某些量;

(2)将要求取值范围的量或最值表示成某一变量的函数(三角函数),从而转化为求函数的值域或最值的问题.

Ⅱ 典型例题解读

基础题型

题型1 对正弦定理的理解(链接A卷第1、4题)

例1 以下关于正弦定理的叙述或变形错误的是( ).

A. 在$\triangle ABC$中,$a:b:c=\sin A:\sin B:\sin C$

B. 在$\triangle ABC$中,$a=c\Leftrightarrow \sin 2A=\sin 2B$

C. 在$\triangle ABC$中,$\frac{a}{\sin A}=\frac{b+c}{\sin B+\sin C}$

D. 在$\triangle ABC$中,正弦值较大的角所对的边也较大

分析:在$\triangle ABC$中,$a=c\Rightarrow \sin A=\sin C \nRightarrow \sin 2A=\sin 2B$,故选B.

答案:B

题型2 利用正弦定理求角、边或正弦值(链接A卷第3、6、9、10、11、12题,链接B卷第1、2题)

例2 在$\triangle ABC$中,$a=20,A=30°,C=45°$,求B,b,c.

分析:由三角形内角和求B,再由正弦定理求b,c.

解:$\because A=30°,C=45°,\therefore B=180°-(A+C)=105°$.

由正弦定理,知$b=\frac{a\sin B}{\sin A}=\frac{20\sin 105°}{\sin 30°}=40\sin(45°+60°)=10(\sqrt{6}+\sqrt{2})$;

$c=\frac{a\sin C}{\sin A}=\frac{20\sin 45°}{\sin 30°}=20\sqrt{2}$,

$\therefore B=105°,b=10(\sqrt{6}+\sqrt{2}),c=20\sqrt{2}$.

点拨:已知三角形的两个角与一边解三角形时要注意以下几点:(1)$A+B+C=180°$;(2)由$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}$,得$b=\frac{a\sin B}{\sin A}$等;(3)转化为特殊角,如$\sin 105°=\sin(60°+45°)$等.

例3 在$\triangle ABC$中,三个内角A,B,C所对的边分别为a,b,c,已知$2B=A+C,a+\sqrt{2}b=2c$,求$\sin C$的值.

分析:关键是运用正弦定理把三角形三边的关系转化为角的关系.

解:$\because 2B=A+C,A+B+C=180°,\therefore B=60°,A+C=120°$.

$\therefore 0°<A<120°,0°<C<120°$.

$\because a+\sqrt{2}b=2c$,由正弦定理,知$a=2R\sin A,b=2R\sin B,c=2R\sin C$,

$\therefore \sin A+\sqrt{2}\sin B=2\sin C$,

$\therefore \sin(120°-C)+\sqrt{2}\sin 60°=2\sin C$,

$\therefore \sqrt{3}\sin C-\cos C=\sqrt{2}$,

$\therefore \sin(C-30°)=\frac{\sqrt{2}}{2}$.

$\because 0°<C<120°,\sin(C-30°)>0$,

$\therefore 0°<C-30°<90°$.

$\therefore C-30°=45°,\therefore C=75°$.

$\therefore \sin C=\sin 75°=\sin(30°+45°)=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$.

点拨:注意隐含条件"三角形内角和为180°"的运用,再由已知条件可得到角或角之间的关系.

例4 在$\triangle ABC$中,边a,b,c分别为角A,B,C所对的边,S为$\triangle ABC$的面积,且$4\sin B\sin^2\left(\frac{\pi}{4}+\frac{B}{2}\right)+\cos 2B=1+\sqrt{3}$.

(1)求B的大小;

(2)若$a=4,S=5\sqrt{3}$,求c的值.

分析:(1)利用三角公式把条件化简;(2)应用三角形的面积公式来解决.

解:(1)$\because 4\sin B\sin^2\left(\frac{\pi}{4}+\frac{B}{2}\right)+\cos 2B=1+\sqrt{3}$,

$\therefore 4\sin B\cdot\frac{1-\cos\left(\frac{\pi}{2}+B\right)}{2}+\cos 2B=1+\sqrt{3}$.

$\therefore 2\sin B(1+\sin B)+1-2\sin^2 B=1+\sqrt{3}$.

$\therefore \sin B=\frac{\sqrt{3}}{2}$.

$\because 0<B<\pi,\therefore B=\frac{\pi}{3}$或$B=\frac{2\pi}{3}$.

(2)$\because a=4,S=5\sqrt{3},S=\frac{1}{2}ac\sin B$,

$\therefore c=\frac{2S}{a\sin B}=\frac{2\times 5\sqrt{3}}{4\times\frac{\sqrt{3}}{2}}=5$.

点拨:已知三角形的面积,可得到角与边之间的关系.

综合题型

题型1 对解的个数的判断(链接A卷第4题)

例5 已知下列各三角形中的两边及其一边的对角,判断三角形是否有解,有解的作出解答.

(1)$a=7,b=8,A=105°$;(2)$a=10,b=20,A=80°$;

(3)$b=10,c=5\sqrt{6},C=60°$;(4)$a=2\sqrt{3},b=6,A=30°$.

分析:利用正弦定理解题,注意大边对大角以及对解的个数的讨论,防止多解或漏解.

解:(1)$a=7,b=8,a<b,A=105°>90°$,$\therefore$本题无解.

(2)$a=10,b=20,a<b,A=80°<90°$,

$\because b\sin A=20\sin 80°>20\sin 60°=10\sqrt{3}$,

$\therefore a<b\sin A$,$\therefore$本题无解.

(3)$b=10,c=5\sqrt{6},b<c,C=60°<90°$,$\therefore$本题有一解.

$\because \sin B=\frac{b\sin C}{c}=\frac{10\sin 60°}{5\sqrt{6}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$,

$\therefore B=45°,A=180°-(B+C)=75°$,

$\therefore a=\frac{b\sin A}{\sin B}=\frac{10\sin 75°}{\sin 45°}=\frac{10\times\left(\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}\right)}{\frac{\sqrt{2}}{2}}=5(\sqrt{3}+1)$.

(4)$a=2\sqrt{3},b=6,a<b,A=30°<90°$.

又$\because b\sin A=6\sin 30°=3,a>b\sin A$,$\therefore$本题有两解.

由正弦定理,得$\sin B=\frac{b\sin A}{a}=\frac{6\sin 30°}{2\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{2}$,

$\therefore B=60°$或$B=120°$.

当$B=60°$时,$C=90°$,$\therefore c=\frac{a\sin C}{\sin A}=\frac{2\sqrt{3}\sin 90°}{\sin 30°}=4\sqrt{3}$.

当$B=120°$时,$C=30°$,$\therefore c=a=2\sqrt{3}$.

$\therefore B=60°,C=90°,c=4\sqrt{3}$或$B=120°,C=30°,c=2\sqrt{3}$.

点拨:利用正弦定理解题时,注意对解的个数的讨论.

题型2 利用正弦定理判断三角形的形状(链接A卷第2、7题)

例6 在$\triangle ABC$中,已知$(a^2+b^2)\sin(A-B)=(a^2-b^2)\sin(A+B)$,试判断该三角形的形状.

分析:判断三角形的形状,应围绕三角形的边角关系进行思考:化边为角或化角为边.

解:由已知,得$a^2[\sin(A-B)-\sin(A+B)]=b^2[-\sin(A+B)-\sin(A-B)]$,

$\therefore 2a^2\cos A\sin B=2b^2\cos B\sin A$,

由正弦定理,得

$\sin^2A\cos A\sin B=\sin^2B\cos B\sin A$,

$\therefore \sin A\sin B(\sin A\cos A-\sin B\cos B)=0$,

$\therefore \sin A\cos A=\sin B\cos B$,

$\therefore \sin 2A=\sin 2B$.

由$0<2A<\pi$,$0<2B<\pi$,

得$2A=2B$或$2A=\pi-2B$,

即$A=B$或$A=\frac{\pi}{2}-B$,

即$\triangle ABC$是等腰三角形或直角三角形.

点拨:利用正弦定理判断三角形形状的方法:①化边为角.将题目中的条件化边为角,再根据三角函数的有关知识得到三个内角的关系,进而确定三角形的形状.②化角为边.将题目中的条件化角为边,再根据代数恒等变换得到边的关系(如$a=b$,$a^2+b^2=c^2$等),进而确定三角形的形状.

题型3 利用正弦定理求取值范围或最值(链接A卷第5、8题,链接B卷第5题)

例7 如图1-1.1-10,在等腰$\triangle ABC$中,底边$BC=1$,底角B的平分线BD交AC于D,求BD的取值范围.

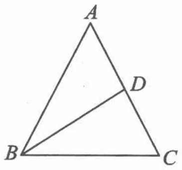


图1-1.1-10

分析:由正弦定理知可用$\sin\angle ABC$表示BD,进而由$\cos\frac{\angle ABC}{2}$的范围确定BD的取值范围.

解:$\because \angle ABC=C$,$\therefore \angle BDC=A+\angle ABD=180°-2\angle ABC+\frac{\angle ABC}{2}=180°-\frac{3}{2}\angle ABC$.

在$\triangle BCD$中,由正弦定理得,

$\frac{BD}{\sin C}=\frac{BC}{\sin\angle BDC}$,即$\frac{BD}{\sin\angle ABC}=\frac{1}{\sin\left(180°-\frac{3}{2}\angle ABC\right)}$,

$$\therefore BD=\frac{\sin\angle ABC}{\sin\frac{3}{2}\angle ABC}$$

$$=\frac{2\sin\frac{\angle ABC}{2}\cos\frac{\angle ABC}{2}}{\sin\angle ABC\cos\frac{\angle ABC}{2}+\cos\angle ABC\sin\frac{\angle ABC}{2}}$$

$$=\frac{2\cos\frac{\angle ABC}{2}}{2\cos^2\frac{\angle ABC}{2}+\cos\angle ABC}=\frac{2\cos\frac{\angle ABC}{2}}{4\cos^2\frac{\angle ABC}{2}-1}$$

$$=\frac{2}{4\cos\frac{\angle ABC}{2}-\frac{1}{\cos\frac{\angle ABC}{2}}}.$$

$\because 0°<\frac{\angle ABC}{2}<45°$,

$\therefore \frac{\sqrt{2}}{2}<\cos\frac{\angle ABC}{2}<1$.而在此范围内,当$\cos\frac{\angle ABC}{2}$逐渐增大时,$BD$逐渐减小,且当$\cos\frac{\angle ABC}{2}=\frac{\sqrt{2}}{2}$时,$BD=\sqrt{2}$;当$\cos\frac{\angle ABC}{2}=1$时,$BD=\frac{2}{3}$.故$BD$的取值范围是$\left(\frac{2}{3},\sqrt{2}\right)$.

题型4 正弦定理的综合应用(链接A卷第10题,链接B卷第3、4题)

例8 在$\triangle ABC$中,A,B,C所对的边分别是a,b,c,又$\tan A=\frac{1}{2}$,$\sin B=\frac{\sqrt{10}}{10}$.

(1)求$\tan C$的值;

(2)若$\triangle ABC$的最短边的长为$\frac{\sqrt{5}}{5}$,求$\triangle ABC$的面积.

分析:注意对B的讨论,是锐角还是钝角.由大角对大边,准确判断哪条边为最短边.

解:(1)$\because$在$\triangle ABC$中,$\sin B=\frac{\sqrt{10}}{10}$,$\therefore B$为锐角或钝角.

当角B为钝角时,$\cos B=-\frac{3\sqrt{10}}{10}$,$\tan B=-\frac{1}{3}$.

又$\tan A=\frac{1}{2}$,

$$\therefore \tan(A+B)=\frac{\tan A+\tan B}{1-\tan A\tan B}=\frac{\frac{1}{2}-\frac{1}{3}}{1+\frac{1}{6}}=\frac{1}{7},$$

$\therefore \tan C=-\frac{1}{7}$,$\therefore C$也是钝角,不符合实际,故应舍去.

当B为锐角时,$\cos B=\frac{3\sqrt{10}}{10}$,$\tan B=\frac{1}{3}$.

又$\tan A=\frac{1}{2}$,

$$\therefore \tan(A+B)=\frac{\tan A+\tan B}{1-\tan A\cdot\tan B}=\frac{\frac{1}{2}+\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}}=1,$$

$\therefore \tan C=-1$.

(2)由(1)知$\tan C=-1$,又$0°<C<180°$,

$\therefore C=135°$.

又$\tan A>\tan B>0$,

$\therefore b$为最短边,$\therefore b=\frac{\sqrt{5}}{5}$.

$\because \frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}$,

$$\therefore c=\frac{b\sin C}{\sin B}=\frac{\frac{\sqrt{5}}{5}\times\frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{\sqrt{10}}{10}}=1.$$

又$\because \tan A=\frac{1}{2}$,$\therefore \sin A=\frac{\sqrt{5}}{5}$,

$\therefore \triangle ABC$的面积$S=\frac{1}{2}bc\sin A=\frac{1}{2}\times\frac{\sqrt{5}}{5}\times1\times\frac{\sqrt{5}}{5}=\frac{1}{10}$.

点拨:由已知条件无法直接判断B是锐角还是钝角,故应分类讨论.

例9 在$\triangle ABC$中,求证:$\frac{a^2-b^2}{\cos A+\cos B}+\frac{b^2-c^2}{\cos B+\cos C}+\frac{c^2-a^2}{\cos C+\cos A}=0$.

分析:观察等式的特点,有边有角,要把边角统一,为此利用正弦定理将a^2,b^2,c^2转化为$\sin^2A$,$\sin^2B$,$\sin^2C$.

证明：由正弦定理有$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}=2R$（$R$为$\triangle ABC$的外接圆半径），

$\therefore \frac{a^2-b^2}{\cos A+\cos B}$

$=\frac{4R^2\sin^2 A-4R^2\sin^2 B}{\cos A+\cos B}$

$=\frac{4R^2[(1-\cos^2 A)-(1-\cos^2 B)]}{\cos A+\cos B}$

$=\frac{4R^2(\cos^2 B-\cos^2 A)}{\cos A+\cos B}$

$=4R^2(\cos B-\cos A)$.

同理，$\frac{b^2-c^2}{\cos B+\cos C}=4R^2(\cos C-\cos B)$，

$\frac{c^2-a^2}{\cos C+\cos A}=4R^2(\cos A-\cos C)$.

$\therefore$ 等式左边$=4R^2(\cos B-\cos A+\cos C-\cos B+\cos A-\cos C)=0=$右边.

$\therefore$ 等式成立.

点拨：在三角形中，解决有关含有边角关系的问题时，常运用正弦定理化边为角，然后利用三角函数的知识来解决.

Ⅲ 思维误区点击

本节常见的思维误区：(1)得到不合题意的解.利用正弦定理求一个角时，得出对应的两个解，此时可能有一个解是不符合题意的，所以做这种题时，首先应判断有几个解，避免出现不符合题意的解.(2)忽略题中隐含条件.如给出两边及其中一边所对的角，求另一边所对的角时，解题过程中易忽略角隐含的取值范围或忽略三角形中只能有一个钝角等，造成漏解.

例10 在$\triangle ABC$中，已知$b=3$，$c=3\sqrt{3}$，$B=30°$，判断$\triangle ABC$的形状.

错解：由正弦定理，得$\sin C=\frac{c\sin B}{b}=\frac{\sqrt{3}}{2}$.

$\therefore C=60°$，$\therefore A=180°-(B+C)=90°$，$\triangle ABC$为直角三角形.

误区分析：此解错在由$\sin C=\frac{\sqrt{3}}{2}$得$C=60°$处，这是因为$0°<C<180°$，而$\sin(180°-C)=\sin C$，并且$c>b$，则$C>B=30°$，所以$C=60°$或$C=120°$都符合题意.

正解：由$c\sin B=3\sqrt{3}\times\frac{1}{2}=\frac{3\sqrt{3}}{2}$，即$c\sin B<b<c$，故此题有两解.

由正弦定理，得

$\sin C=\frac{c\sin B}{b}=\frac{\sqrt{3}}{2}$.

$\therefore C=60°$或$C=120°$.

当$C=60°$时，$A=180°-(B+C)=90°$，

$\triangle ABC$为直角三角形；

当$C=120°$时，$A=180°-(B+C)=30°=B$，

$\triangle ABC$为等腰三角形.

例11 在$\triangle ABC$中，已知$AC=2$，$BC=3$，$\cos A=-\frac{4}{5}$.

求：(1)$\sin B$；(2)$\sin\left(2B+\frac{\pi}{6}\right)$.

错解：(1)在$\triangle ABC$中，$\because \cos A=-\frac{4}{5}$，$\therefore \sin A=\sqrt{1-\cos^2 A}=\frac{3}{5}$.由正弦定理得$\frac{BC}{\sin A}=\frac{AC}{\sin B}$，$\therefore \sin B=\frac{AC\sin A}{BC}=\frac{2}{3}\times\frac{3}{5}=\frac{2}{5}$.

(2)$\because \sin B=\frac{2}{5}$，

$\therefore \cos B=\pm\sqrt{1-\sin^2 B}=\pm\sqrt{1-\left(\frac{2}{5}\right)^2}=\pm\frac{\sqrt{21}}{5}$，

$\therefore \sin 2B=2\sin B\cos B=2\times\frac{2}{5}\times\left(\pm\frac{\sqrt{21}}{5}\right)=\pm\frac{4\sqrt{21}}{25}$，

$\cos 2B=2\cos^2 B-1=2\times\left(\pm\frac{\sqrt{21}}{5}\right)^2-1=\frac{17}{25}$.

$\therefore \sin\left(2B+\frac{\pi}{6}\right)=\sin 2B\cos\frac{\pi}{6}+\cos 2B\sin\frac{\pi}{6}=\pm\frac{4\sqrt{21}}{25}\times\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{17}{25}\times\frac{1}{2}=\frac{17\pm 12\sqrt{7}}{50}$.

误区分析：由于在$\triangle ABC$中，A,B,C应满足$A+B+C=\pi$，且$\cos A=-\frac{4}{5}$，即$A>\frac{\pi}{2}$，所以$B<\frac{\pi}{2}$，即必有$\cos B>0$.以上解法出错的原因在于没有注意"一个三角形当中只能有一个钝角"这一隐含条件.

正解：(1)在$\triangle ABC$中，$\because \cos A=-\frac{4}{5}$，$\therefore A>\frac{\pi}{2}$，

$\therefore \sin A=\sqrt{1-\cos^2 A}=\sqrt{1-\left(\frac{4}{5}\right)^2}=\frac{3}{5}$.

由正弦定理知$\frac{BC}{\sin A}=\frac{AC}{\sin B}$，$\therefore \sin B=\frac{AC}{BC}\times\sin A=\frac{2}{3}\times\frac{3}{5}=\frac{2}{5}$.

(2)由(1)知，A为钝角，从而B为锐角，

$\therefore \cos B=\sqrt{1-\sin^2 B}=\sqrt{1-\left(\frac{2}{5}\right)^2}=\frac{\sqrt{21}}{5}$，

$\therefore \cos 2B=2\cos^2 B-1=2\times\frac{21}{25}-1=\frac{17}{25}$，

$\sin 2B=2\sin B\cos B=2\times\frac{2}{5}\times\frac{\sqrt{21}}{5}=\frac{4\sqrt{21}}{25}$.

$\therefore \sin\left(2B+\frac{\pi}{6}\right)=\sin 2B\cos\frac{\pi}{6}+\cos 2B\sin\frac{\pi}{6}=\frac{4\sqrt{21}}{25}\times\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{17}{25}\times\frac{1}{2}=\frac{12\sqrt{7}+17}{50}$.

Ⅳ 高考能力提升

高考中考查正弦定理时，常与三角函数联系在一起，以正弦定理为工具，通过三角恒等变换来解决问题，以低、中档题为主，常考题型有判断三角形的形状，在三角形中证明三角恒等式等.

例 12 (2011 北京高考理 9 题 5 分)在$\triangle ABC$中,若$b=5$,$\angle B=\frac{\pi}{4}$,$\tan A=2$,则$\sin A=$________,$a=$________.

分析:因为$\triangle ABC$中,$\tan A=2$,所以A是锐角,且$\frac{\sin A}{\cos A}=2$,$\sin^2A+\cos^2A=1$,联立解得$\sin A=\frac{2\sqrt{5}}{5}$,再由正弦定理可得$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}$,代入数据得$a=2\sqrt{10}$.

答案:$\frac{2\sqrt{5}}{5}$　$2\sqrt{10}$.

点拨:本题主要考查同角三角函数的基本关系,考查应用正弦定理求三角形的边,由同角三角函数的基本关系可知,已知一个角的任意一个三角函数,可以求这个角的其他三角函数值.

例 13 (2011 江西高考文 17 题 12 分)在$\triangle ABC$中,A,B,C的对边分别是a,b,c,已知$3a\cos A=c\cos B+b\cos C$.

(1)求$\cos A$的值;

(2)若$a=1$,$\cos B+\cos C=\frac{2\sqrt{3}}{3}$,求边$c$的值.

解:(1)由$3a\cos A=c\cos B+b\cos C$和正弦定理得:$3\sin A\cos A=\sin C\cos B+\sin B\cos C=\sin(B+C)$,即$3\sin A\cos A=\sin A$,所以$\cos A=\frac{1}{3}$.

(2)由$\cos A=\frac{1}{3}$,得$\sin A=\frac{2\sqrt{2}}{3}$,由$\cos B+\cos C=\frac{2\sqrt{3}}{3}$和$A+B+C=\pi$,得$\cos(\pi-A-C)+\cos C=\frac{2\sqrt{3}}{3}$,展开易得$\cos C+\sqrt{2}\sin C=\sqrt{3}$,从而得$\sin(C+\varphi)=1$,其中$\sin\varphi=\frac{\sqrt{3}}{3}$,$\cos\varphi=\frac{\sqrt{6}}{3}$,$0<\varphi<\frac{\pi}{2}$,则$C+\varphi=\frac{\pi}{2}$,于是$\sin C=\frac{\sqrt{6}}{3}$,再由正弦定理得$\frac{a}{\sin A}=\frac{c}{\sin C}$知$c=\frac{\sqrt{3}}{2}$.

点拨:本题考查三角函数及解三角形问题,题目偏难.第一问主要涉及到正弦定理、诱导公式及三角形内角和为180°,属于一般难度;第二问同样是对正弦定理和诱导公式的考查但形式更为复杂.

V 知识巩固训练

A卷 基础水平训练 (答案见 116 页)

一、选择题

1. 在$\triangle ABC$中,下列关系中一定成立的是(　　).

A. $a>b\sin A$　　B. $a=b\sin A$

C. $a<b\sin A$　　D. $a\geqslant b\sin A$

2. 在$\triangle ABC$中,若$\frac{a}{\cos A}=\frac{b}{\cos B}=\frac{c}{\cos C}$,则$\triangle ABC$是(　　).

A. 直角三角形　　B. 等边三角形

C. 钝角三角形　　D. 等腰直角三角形

3. 在$\triangle ABC$中,$a=5$,$b=3$,$C=120°$,则$\sin A:\sin B$的值是(　　).

A. $\frac{5}{3}$　　B. $\frac{3}{5}$　　C. $\frac{3}{7}$　　D. $\frac{5}{7}$

4. 不解三角形,确定下列判断中正确的是(　　).

A. $a=7,b=14,A=30°$有两解

B. $a=28,b=24,A=150°$有一解

C. $a=6,b=9,A=45°$有两解

D. $b=9,c=10,B=60°$无解

5. 在$\triangle ABC$中,$a=x$,$b=2$,$B=45°$,若三角形有两解,则x的取值范围是(　　).

A. $x>2$　　B. $x<2$

C. $2<x<2\sqrt{2}$　　D. $2<x<2\sqrt{3}$

二、填空题

6. 在$\triangle ABC$中,三个内角A,B,C所对的边分别为a,b,c,若$\sin A:\sin B:\sin C=5:7:8$,则$a:b:c=$__________.

7. 在$\triangle ABC$中,若$\frac{\sin A}{a}=\frac{\cos B}{b}=\frac{\cos C}{c}$,则$\triangle ABC$的形状为__________.

8. 在$\triangle ABC$中,已知$a=5$,$B=105°$,$C=15°$,则此三角形的最大边长为__________.

9. 在$\triangle ABC$中,若$b=2a$,$B=A+60°$,则$A=$__________.

三、解答题

10. 如图 1-1.1-11,D是$Rt\triangle ABC$斜边BC上一点,$AB=AD$,记$\angle CAD=\alpha$,$\angle ABC=\beta$.

(1)证明:$\sin\alpha+\cos 2\beta=0$;

(2)若$AC=\sqrt{3}DC$,求β的值.

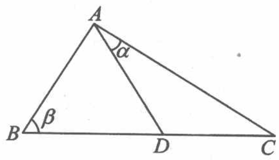


图 1-1.1-11

11. 在$\triangle ABC$中,角A,B,C所对的边分别为a,b,c,若$b-c=2a\cos(60°+C)$,求角A.

12. 已知三角形三个内角A、B、C满足$A+C=2B$,$\tan A\tan C=2+\sqrt{3}$,又边c上的高为$4\sqrt{3}$,求三角形三边a、b、c的长.

B卷 高考水平训练 (答案见 116 页)

1. (2011 全国高考 17 题 10 分)$\triangle ABC$的内角A,B,C的对边分别为a,b,c.已知$A-C=90°$,$a+c=\sqrt{2}b$,求C.

2. (2011 安徽高考文 16 题 13 分)在$\triangle ABC$中,a,b,c分别为内角A,B,C所对的边长,$a=\sqrt{3}$,$b=\sqrt{2}$,$1+2\cos(B+C)=0$,求边BC上的高.

3. (综合题)在$\triangle ABC$中,已知$\tan B=\sqrt{3}$,$\cos C=\frac{1}{3}$,$AC=3\sqrt{6}$,求$\triangle ABC$的面积.

4. (应用题)一架飞机从A地飞往B地,两地相距 800 km,飞行员为了避开某一区域的雷雨云层,从机场起飞后就沿与原来的飞行方向成30°角的方向飞行,飞到中途,再沿与原来的方向成45°角的方向继续飞行到终点,假设飞机飞行高度始终不变,飞机的飞行路程比原来的路程 800 km 远了多少?

5. (创新题)在$\triangle ABC$中,已知角$A=\frac{\pi}{3}$,边$BC=2\sqrt{3}$,设角$B=x$,周长为y.

(1)求函数$y=f(x)$的解析式和定义域;

(2)求y的最大值.

1.1.2 余弦定理

目标导航

1. 了解余弦定理与勾股定理的联系和区别.
2. 掌握余弦定理的内容及证明余弦定理的方法,会用余弦定理解决两类基本的解三角形问题.
3. 能够应用余弦定理及其推论解决一些简单的三角形度量问题.

旧知回顾

1. 勾股定理内容:

如图 1-1.2-1,在 $Rt\triangle ABC$ 中,$\angle C=90°$,则 $c^2=a^2+b^2$.

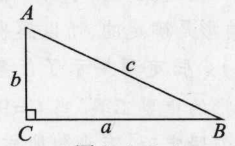


图 1-1.2-1

2. 三角函数、向量的数量积及相关的三角恒等变换公式等知识间的联系.

Ⅰ 教材知识详解

教材全析

1. 余弦定理及其推论

(1)三角形中任何一边的平方等于其他两边的平方的和减去这两边与它们的夹角的余弦的积的两倍. 即

$a^2=b^2+c^2-2bc\cos A, b^2=c^2+a^2-2ca\cos B, c^2=a^2+b^2-2ab\cos C.$

(2)余弦定理的证明:

证法一(向量法):如图 1-1.2-2,

设 $\overrightarrow{CB}=\boldsymbol{a}, \overrightarrow{CA}=\boldsymbol{b}, \overrightarrow{AB}=\boldsymbol{c}$,

那么 $\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$,

$|\boldsymbol{c}|^2=\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{c}=(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})\cdot(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{b}-2\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=a^2+b^2-2ab\cos C$,

即 $c^2=a^2+b^2-2ab\cos C$.

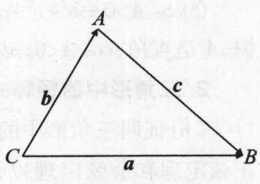


图 1-1.2-2

同理可得 $a^2=b^2+c^2-2bc\cos B$,

$b^2=a^2+c^2-2ac\cos B$.

证法二(解析法):如图 1-1.2-3,以 A 为原点,AC 所在直线为 x 轴建立直角坐标系,则可得点 A,C 的坐标分别为 $A(0,0)$,$C(b,0)$.

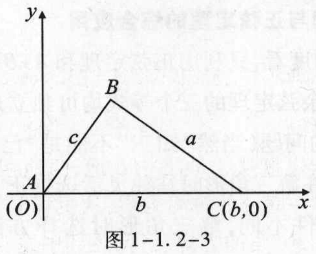


图 1-1.2-3

设点 B 的坐标为$(c\cos A, c\sin A)$.

根据两点间的距离公式,得

$a=|BC|=\sqrt{(c\cos A-b)^2+(c\sin A-0)^2}$.

也就是 $a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$.

同理可得 $b^2=c^2+a^2-2ca\cos B, c^2=a^2+b^2-2ab\cos C$.

证法三(正弦定理法):在 $\triangle ABC$ 中,由正弦定理 $\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}$得,$b\sin C=c\sin B$.

$\because \sin A=\sin[\pi-(B+C)]=\sin(B+C)=\sin B\cos C+\cos B\sin C$,

$\therefore 2R\sin A=2R\sin B\cos C+\cos B\cdot 2R\sin C$.

$\therefore a=b\cos C+c\cos B$.

$\therefore a^2=b^2\cos^2 C+2bc\cos B\cos C+c^2\cos^2 B$

$=b^2(1-\sin^2 C)+2bc\cos B\cos C+c^2(1-\sin^2 B)$

$=b^2+c^2-(b\sin C)^2-(c\sin B)^2+2bc\cos B\cos C$

$=b^2+c^2-2bc\left(\frac{b}{c}\sin C^2-\cos B\cos C\right)$

$=b^2+c^2-2bc(\sin B\sin C-\cos B\cos C)$

$=b^2+c^2+2bc\cos(B+C)$

$=b^2+c^2-2bc\cos A$.

同理可得 $b^2=a^2+c^2-2ac\cos B, c^2=a^2+b^2-2ab\cos C$.

证法四(几何法):当 $\triangle ABC$ 为锐角三角形时,如图 1-1.2-4,过 C 作 $CD\perp AB$ 于点 D,则 $CD=b\sin A$,

$BD=AB-AD=c-b\cos A$.

在 $Rt\triangle BDC$ 中,

由勾股定理得 $BC^2=CD^2+BD^2$,

即 $a^2=b^2\sin^2 A+c^2-2bc\cos A+b^2\cos^2 A$.

$\therefore a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$.

同理可证:$b^2=a^2+c^2-2ac\cos B$,

$c^2=a^2+b^2-2ab\cos C$.

图 1-1.2-4

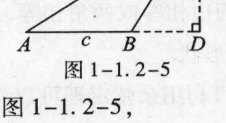


图 1-1.2-5

当 $\triangle ABC$ 为钝角三角形时,如图 1-1.2-5,

$CD=b\sin A, BD=b\cos A-c$,

在 $Rt\triangle BDC$ 中,$BC^2=CD^2+BD^2$,

即 $a^2=b^2\sin^2 A+(b\cos A-c)^2$,

$\therefore a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$.

同理可得 $b^2=a^2+c^2-2ac\cos B, c^2=a^2+b^2-2ab\cos C$.

(3)余弦定理的推论：

$\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$，$\cos B=\frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}$，$\cos C=\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$.

剖析说明

(1)在余弦定理中，每一个等式均含有四个量，利用方程的观点，可以知三求一. 在运用余弦定理时，已知三边求角或已知两边及夹角求另一边，由三角形全等的判定定理知，三角形是确定的，所以解也是唯一的.

(2)余弦定理揭示了任意三角形边角之间的关系，是解三角形的重要工具. 当 $C=90°$ 时，则定理变为 $c^2=a^2+b^2$，这就是勾股定理，因此勾股定理可以看做是余弦定理的特例，余弦定理可以看做是勾股定理的推广.

2. 利用余弦定理解三角形

(1)利用余弦定理可以解决以下两类三角形的问题：

①已知三边，求三角；

②已知两边和它们的夹角，求第三边，进而求出其他角.

(2)在解三角形时，有时用正弦定理，有时用余弦定理. 当已知两边及夹角时，可考虑使用余弦定理，先求第三边，再用正弦定理或余弦定理及三角形的内角和定理求解三角形中其他元素；当已知三边求三角时，可用余弦定理的推论，求得三角形的三个角，并且当三角形存在时，它的解是唯一的，原因是求出一个角的余弦值后，角在 $(0,\pi)$ 上，角与其余弦值一一对应.

剖析说明

(1)由于任意三角形的两边之和都要大于第三边，所以解三角形时，应注意所给三个长度必须能作为三角形的三条边，否则就失去了解三角形的意义.

(2)在三角形中有“大边对大角，小边对小角”，“等角对等边，等边对等角”.

(3)根据题目条件的不同及正、余弦定理的应用前提，解题时要灵活选择正、余弦定理.

3. 判断三角形的形状

(1)根据所给的条件判断三角形的形状，主要有以下两条途径：化边为角或化角为边.

常用的转化的手段有以下四种：①通过正弦定理实施边角转化；②通过余弦定理实施边角转化；③通过三角变换及三角形内角和定理 $(A+B+C=\pi)$ 和内角在 $(0,\pi)$ 内找出角之间的关系；④通过三角函数值符号的判断以及正、余弦函数的有界性来确定三角形的形状. 转化后看是否满足勾股定理或有一角为直角，两边相等或两角相等，三边相等或三角相等，从而确定三角形的形状.

(2)利用余弦定理可以判定三角形的内角是锐角、直角还是钝角. 因为当 A 为锐角时，$\cos A>0$. 由 $a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$，得 $2bc\cos A=b^2+c^2-a^2>0$，所以 $a^2<b^2+c^2$；反之，若 $a^2<b^2+c^2$，可推得 $b^2+c^2-a^2=2bc\cos A>0$，所以 $\angle A$ 为锐角.

同理可推出在 $\triangle ABC$ 中，有 A 为直角 $\Leftrightarrow a^2=b^2+c^2$；$A$ 为钝角 $\Leftrightarrow a^2>b^2+c^2$.

用这一结论可以判断 $\triangle ABC$ 中的角是锐角、钝角还是直角，进而可以判定一个三角形是锐角三角形、钝角三角形还是直角三角形.

剖析说明

(1)如果把条件中的边角关系转化为角，那么再运用三角函数公式的恒等变形进行转化；如果把边角关系转化为边，那么再运用代数运算进行转化.

(2)若条件中是边角关系，则三角形常与等腰、直角、等边有关. 若条件中是边角不等式，则三角形常与锐角、钝角有关.

知识拓展

1. 三角形中常见的结论

(1)设 a,b,c 是 $\triangle ABC$ 的角 A,B,C 的对边：

①若 $a^2+b^2=c^2$，则 $C=90°$；

②若 $a^2+b^2>c^2$，则 $C<90°$；

③若 $a^2+b^2<c^2$，则 $C>90°$；

④若 $\sin 2A=\sin 2B$，则 $A=B$ 或 $A+B=\frac{\pi}{2}$.

(2)①若 $\cos A=\cos B$，则 $A=B$.

②若 $\cos(A-B)=1$，则 $A=B$.

③$\cos A>0\Leftrightarrow b^2+c^2-a^2>0\Leftrightarrow A$ 是锐角；$\cos A=0\Leftrightarrow b^2+c^2-a^2=0\Leftrightarrow A$ 是直角；$\cos A<0\Leftrightarrow b^2+c^2-a^2<0\Leftrightarrow A$ 是钝角.

2. 三角形中的恒等式(或不等式)的证明

(1)证明三角形中的恒等式(或不等式)的关键在于：利用正弦定理和余弦定理以及其他公式，对边角关系进行相互转化，再利用有关知识求解.

(2)利用正、余弦定理证明与三角形有关的三角恒等式，要紧紧把握正、余弦定理中所反映的三角形中的边角关系来处理. 正弦定理常用来把边转化为角，余弦定理常用来把角转化为边. 另外还要运用三角形及三角函数的其他性质进行转化.

3. 余弦定理与正弦定理的综合应用

从方程的角度看，只利用正弦定理和 $A+B+C=\pi$ 这两个方程，或者只利用余弦定理的三个等式均可独立地解决三角形中的“知三求三”的问题(当然“知三”不能是“已知三个角”)，但比较复杂，所以在解三角形时往往灵活选择正、余弦定理，并综合运用. 已知条件不同，解三角形时选择方法不同，可归纳如下：

已知	方法	解的情况
三边	余弦定理	有唯一解
两边及夹角	余弦定理	有唯一解
两边及对角	正、余弦定理	可能解不唯一
一边及两角	正弦定理	有唯一解

Ⅱ 典型例题解读

基础题型

题型1 对余弦定理的理解(链接A卷第1题)

例1 在$\triangle ABC$中,若$a=8,b=7,\cos C=\frac{13}{14}$,则最大角的余弦是(　　).

A. $-\frac{1}{5}$　　B. $-\frac{1}{6}$　　C. $-\frac{1}{7}$　　D. $-\frac{1}{8}$

分析:$c^2=a^2+b^2-2ab\cos C=9$,所以$c=3$. 又$a>b>c$,故a的对角A为最大角,$\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=-\frac{1}{7}$.

答案:C.

题型2 已知边求角(链接A卷第2、3题)

例2 在$\triangle ABC$中,已知$a=7,b=10,c=6$,求A,B,C(精确到1°).

分析:直接运用余弦定理的推论求解.

解:$\because \cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=0.725$,$\therefore A\approx 44°$.

$\because \cos C=\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}\approx 0.8071$,$\therefore C\approx 36°$.

$\therefore B=180°-(A+C)\approx 100°$.

点拨:若已求出三角形的两个内角,便可通过$A+B+C=180°$求出第三个内角.

题型3 利用正、余弦定理判断三角形的形状(链接A卷第4题,链接B卷第3题)

例3 在$\triangle ABC$中,若$(a-c\cdot\cos B)\cdot\sin B=(b-c\cdot\cos A)\cdot\sin A$,试判断$\triangle ABC$的形状.

分析:可用正弦定理化边为角,或用余弦定理的推论化角为边再求解.

解:方法一:由正弦定理及余弦定理知,原等式可化为

$\left(a-c\cdot\frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}\right)\cdot b=\left(b-c\cdot\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}\right)\cdot a$,

整理得$(a^2+b^2-c^2)b^2=(a^2+b^2-c^2)a^2$,

即$(a^2+b^2-c^2)(b^2-a^2)=0$.

$\therefore a^2+b^2-c^2=0$或$a^2=b^2$,

故三角形为等腰三角形或直角三角形.

方法二:由正弦定理,原等式可化为

$(\sin A-\sin C\cos B)\sin B=(\sin B-\sin C\cos A)\cdot\sin A$,

$\therefore \sin B\cos B=\sin A\cos A$,

$\therefore \sin 2B=\sin 2A$.

$\therefore 2B=2A$或$2B+2A=\pi$,

$\therefore A=B$或$A+B=\frac{\pi}{2}$,

故三角形为等腰三角形或直角三角形.

点拨:判断三角形的形状,可将已知条件转化为角或边之间的关系再进行判断.

题型4 正、余弦定理的简单应用(链接A卷第7、10、11题,链接B卷第1、2、3、5题)

例4 在$\triangle ABC$中,已知$A>B>C$,且$A=2C$,$b=4$,$a+c=8$,求a,c的长.

分析:使用正、余弦定理找到关于a,c的方程组即可.

解:由正弦定理,得$\frac{a}{\sin A}=\frac{c}{\sin C}$.

$\because A=2C$,$\therefore \frac{a}{\sin 2C}=\frac{c}{\sin C}$,$\therefore a=2c\cos C$.

又$a+c=8$,$\therefore \cos C=\frac{8-c}{2c}$. ①

又由余弦定理及$a+c=8$,$b=4$,得

$\cos C=\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}=\frac{a^2+4^2-c^2}{8a}$

$=\frac{(8-c)^2+4^2-c^2}{8(8-c)}=\frac{10-2c}{8-c}$. ②

又①②知,$\frac{8-c}{2c}=\frac{10-2c}{8-c}$,整理,得$5c^2-36c+64=0$.

$\therefore c=\frac{16}{5}$或$c=4$(舍),$\therefore a=8-c=\frac{24}{5}$.

故$a=\frac{24}{5}$,$c=\frac{16}{5}$.

点拨:在已知条件下不能直接解三角形时,可利用方程思想,设出三角形中的有关元素,并把它作为已知条件,利用正、余弦定理,列出方程(组)求解.

例5 如图1-1.2-6,在$\triangle ABC$中,已知$BC=15$,$AB:AC=7:8$,$\sin B=\frac{4\sqrt{3}}{7}$,求$BC$边上的高$AD$的长.

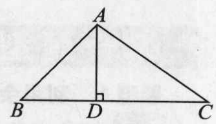


图1-1.2-6

分析:由已知设$AB=7x$,$AC=8x$,又已知$\sin B$,因此要求AD的长只需求出x,在$\triangle ABC$中已知三边只需再有一个角,根据余弦定理便可求出x,而用正弦定理恰好可求出C.

解:在$\triangle ABC$中,设$AB=7x$,$AC=8x$,由正弦定理,得$\frac{7x}{\sin C}=\frac{8x}{\sin B}$,

$\therefore \sin C=\frac{7}{8}\times\frac{4\sqrt{3}}{7}=\frac{\sqrt{3}}{2}$,

$\therefore C=60°$($C=120°$舍去,否则由$8x>7x$,知B也为钝角,不合要求).

由余弦定理,得$(7x)^2=(8x)^2+15^2-2\times 8x\times 15\cos 60°$,

$\therefore x^2-8x+15=0$,

$\therefore x=3$或$x=5$,

$\therefore AB=21$或$AB=35$.

在$\triangle ABD$中,$AD=AB\sin B=\frac{4\sqrt{3}}{7}AB$,

$\therefore AD=12\sqrt{3}$或$AD=20\sqrt{3}$.

点拨:比例式的设法是一种常用的解题技巧,如$a:b:c=1:2:3$,则可设$a=x,b=2x,c=3x$,这种设法可使运算更加简便.

例6 在$\triangle ABC$中,a、b、c分别是角A、B、C的对边,设$f(x)=a^2x^2-(a^2-b^2)x-4c^2$,其中$x\in\mathbf{R}$.

(1)若$f(1)=0$,且$B=C+\frac{\pi}{3}$,试求角A、B、C;

(2)若$f(2)=0$,求角C的取值范围.

分析:(1)由$f(1)=0$,得出三边的关系,再利用正弦定理和两角和的正弦公式,求出$\tan C$;(2)由$f(2)=0$,得出a、b、c之间的关系,由余弦定理将$\cos C$用a、b、c表示出来,利用三角换元,求出$\cos C$的范围.

解:(1)$\because f(1)=0$,$\therefore a^2-(a^2-b^2)-4c^2=0$,即$b^2=4c^2$.

$\because b>0,c>0$,$\therefore b=2c$,即$\sin B=2\sin C$.

又$\because B=C+\frac{\pi}{3}$,$\therefore \sin B=\sin C\cos\frac{\pi}{3}+\cos C\sin\frac{\pi}{3}$,

$\therefore 2\sin C=\frac{1}{2}\sin C+\frac{\sqrt{3}}{2}\cos C$,

即 $3\sin C=\sqrt{3}\cos C$, $\therefore \tan C=\frac{\sqrt{3}}{3}$,

$\because 0<C<\pi$, $\therefore C=\frac{\pi}{6}$, $B=\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{3}=\frac{\pi}{2}$, $\therefore A=\frac{\pi}{3}$.

$\therefore A$、B、C 的值分别为 $\frac{\pi}{3}$, $\frac{\pi}{2}$, $\frac{\pi}{6}$.

(2) $\because f(2)=0$, $\therefore 4a^2-(a^2-b^2)\times 2-4c^2=0$, 即 $a^2+b^2=2c^2$.

$\therefore \cos C=\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}=\frac{c^2}{2ab}$.

又 $\because \left(\frac{a}{\sqrt{2}c}\right)^2+\left(\frac{b}{\sqrt{2}c}\right)^2=1$, $\therefore$ 令 $\frac{a}{\sqrt{2}c}=\cos\theta$, $\frac{b}{\sqrt{2}c}=\sin\theta$,

$\therefore a=\sqrt{2}c\cos\theta$, $b=\sqrt{2}c\sin\theta$. $\because a>0$, $c>0$, $\therefore 0<\theta<\frac{\pi}{2}$.

$\therefore \cos C=\frac{c^2}{2\sqrt{2}c\cos\theta\cdot\sqrt{2}c\sin\theta}=\frac{1}{2\sin 2\theta}$, $\because 0<2\theta<\pi$,

$\therefore 0<\sin 2\theta\leqslant 1$, $\therefore 0<2\sin 2\theta\leqslant 2$. $\therefore \cos C\geqslant\frac{1}{2}$.

$\because 0<C<\pi$, $\therefore 0<C\leqslant\frac{\pi}{3}$.

综合题型

题型 1　利用余弦定理求取值范围(链接 B 卷第 6 题)

例 7 钝角三角形的三边长分别是 a, $a+1$, $a+2$, 且最大角不超过 $120°$, 求实数 a 的取值范围.

分析:设最大内角为 α, 由 $a>0$ 及余弦定理可表示出 $\cos\alpha$, 再由 $90°<\alpha\leqslant 120°$ 可求出 a 的取值范围.

解:$\because a>0$, $\therefore a+2>a+1>a$.

设钝角三角形的最大内角为 α, 则 $90°<\alpha\leqslant 120°$, 且其所对边长为 $a+2$.

根据余弦定理, $\cos\alpha=\frac{a^2+(a+1)^2-(a+2)^2}{2a(a+1)}=\frac{a-3}{2a}$.

$\because 90°<\alpha\leqslant 120°$, $\therefore -\frac{1}{2}\leqslant\cos\alpha<0$, 即 $-\frac{1}{2}\leqslant\frac{a-3}{2a}<0$.

$\because a$ 为正实数, 解得 $\frac{3}{2}\leqslant a<3$, 即所求 a 的取值范围是 $\left[\frac{3}{2},3\right)$.

题型 2　利用正、余弦定理求最值(链接 A 卷第 9 题)

例 8 已知 $\triangle ABC$ 的外接圆半径为 R, 且 $2R(\sin^2 A-\sin^2 C)=(\sqrt{2}a-b)\sin B$, 求 $\triangle ABC$ 的面积的最大值.

分析:由 $\sin A=\frac{a}{2R}$, $\sin B=\frac{b}{2R}$, $\sin C=\frac{c}{2R}$, 代入已知条件可以得出三边 a、b、c 之间的关系, 从而求出角的值, 再结合三角形面积公式把三角形的面积用 a、b、$\sin C$ 表示出来, 有 $S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}ab\sin C=\frac{1}{2}\cdot 2R\sin A\cdot 2R\sin B\sin C=2R^2\sin A\sin B\sin C=2R^2\sin A\sin(\pi-A-C)\sin C$, 再进行三角变换即可求解.

解:由正弦定理知 $\sin A=\frac{a}{2R}$, $\sin B=\frac{b}{2R}$, $\sin C=\frac{c}{2R}$, 代入已知条件可得 $a^2-c^2=(\sqrt{2}a-b)b$, 即 $a^2+b^2-c^2=\sqrt{2}ab$.

由余弦定理得 $\cos C=\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}=\frac{\sqrt{2}ab}{2ab}=\frac{\sqrt{2}}{2}$, $\therefore C=\frac{\pi}{4}$,

$\therefore S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}ab\sin C=\frac{1}{2}\cdot 2R\sin A\cdot 2R\sin B\sin C$

$=2R^2\sin A\sin\left(\frac{3}{4}\pi-A\right)\sin\frac{\pi}{4}=2R^2\sin A\sin\left(\frac{3}{4}\pi-A\right)\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}$

$=\sqrt{2}R^2\sin A\sin\left(\frac{3}{4}\pi-A\right)$

$=\sqrt{2}R^2\left(\sin A\sin\frac{3}{4}\pi\cos A-\sin A\cos\frac{3}{4}\pi\sin A\right)$

$=\sqrt{2}R^2\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\sin A\cos A+\frac{\sqrt{2}}{2}\sin^2 A\right)=R^2\left(\frac{1}{2}\sin 2A+\frac{1-\cos 2A}{2}\right)$

$=\frac{1}{2}R^2(\sin 2A-\cos 2A+1)=\frac{1}{2}R^2\left[\sqrt{2}\sin\left(2A-\frac{\pi}{4}\right)+1\right]$.

当 $2A-\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{2}$, 即 $A=\frac{3}{8}\pi$, $B=\pi-\frac{\pi}{4}-\frac{3}{8}\pi=\frac{3}{8}\pi$ 时, $\sin\left(2A-\frac{\pi}{4}\right)$ 取最大值 1.

$\therefore \triangle ABC$ 的面积的最大值为 $\frac{\sqrt{2}+1}{2}R^2$.

题型 3　余弦定理的实际应用(链接 B 卷第 4 题)

例 9 如图 1-1. 2-7, 当甲船位于 A 处时获悉, 在其正东方向相距20 n mile 的 B 处有一艘渔船遇险等待营救. 甲船立即前往救援; 同时把消息告知在甲船的南偏西 30°, 与甲船相距10 n mile$C$处的乙船, 试问乙船应朝北偏东多少度的方向沿直线前往 B 处救援(角度精确到 1°).

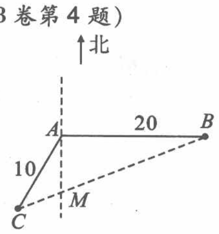


图 1-1. 2-7

分析:正确地把题目中所给的数量转化为图形中的长度和角度是解题的关键, 然后选择余弦定理和正弦定理求解.

解:如图 1-1. 2-7, 连接 BC 交 AM 于点 M.

由余弦定理, 得 $BC^2=AB^2+AC^2-2AB\cdot AC\cos\angle CAB=20^2+10^2-2\times 20\times 10\cos 120°=700$.

于是, $BC=10\sqrt{7}$.

$\because \frac{20}{\sin C}=\frac{10\sqrt{7}}{\sin 120°}$,

$\therefore \sin C=\sqrt{\frac{3}{7}}=\frac{\sqrt{21}}{7}$,

$\because \angle C<90°$,

$\therefore \angle C\approx 41°$,

$\therefore \angle AMB=\angle CAM+\angle C=30°+41°=71°$.

$\therefore$ 乙船应朝北偏东约 71°方向沿直线前往 B 处救援.

点拨:利用正、余弦定理解决实际应用问题时首先要正确画图, 然后灵活选择公式求边或角, 在求角时一定要注意角的范围.

题型 4　余弦定理的综合应用(链接 A 卷第 5、6、8 题, 链接 B 卷第 2 题)

例 10 在 $\triangle ABC$ 中, 求证: $\frac{a^2-b^2}{c^2}=\frac{\sin(A-B)}{\sin C}$.

分析:在本题中, 等式的左边是三角形中的三边关系, 右边是三角关系, 因而我们必须把两边化为统一的形式, 既可化为边的关系, 也可化为角的关系来证明.

证明:右边 $=\frac{\sin A\cos B-\cos A\sin B}{\sin C}=\frac{\sin A}{\sin C}\cdot\cos B-\cos A\cdot\frac{\sin B}{\sin C}$

$=\frac{a}{c}\cdot\frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}-\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}\cdot\frac{b}{c}=\frac{a^2+c^2-b^2}{2c^2}-\frac{b^2+c^2-a^2}{2c^2}=\frac{2a^2-2b^2}{2c^2}=\frac{a^2-b^2}{c^2}=$ 左边, $\therefore \frac{a^2-b^2}{c^2}=\frac{\sin(A-B)}{\sin C}$ 成立.

点拨:合理地选择边角互化的方向是解题技巧之一, 若本题中采用化边为角, 则较难证明, 即左边 $=\frac{\sin^2 A-\sin^2 B}{\sin^2 C}=\frac{\cos 2B-\cos 2A}{2\sin^2 C}$, 再往下化简就较难了. 可见, 化边为角还是化角为

边,并不是对每个题都同时适用,应根据实际问题合理选择,切忌生搬硬套,当一种方法不好用时,要注意换另一种方法来求解.

例 11 如图 1-1.2-8,设 P 是正方形 $ABCD$ 内部的一点,点 P 到顶点 A,B,C 的距离分别是 1,2,3,求正方形的边长.

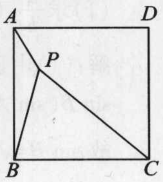


图 1-1.2-8

分析:可将正方形问题转化为三角形问题,利用余弦定理,通过列方程,解出边长.

解:设正方形的边长为 $x(1<x<3)$,

$\angle ABP=\alpha$,

则 $\angle CBP=90°-\alpha$.

在 $\triangle ABP$ 中,$\cos\alpha=\dfrac{x^2+2^2-1^2}{4x}=\dfrac{x^2+3}{4x}$. ①

在 $\triangle CBP$ 中,$\cos\left(\dfrac{\pi}{2}-\alpha\right)=\dfrac{x^2+2^2-3^2}{4x}=\dfrac{x^2-5}{4x}=\sin\alpha$. ②

①^2+②^2,得 $\left(\dfrac{x^2+3}{4x}\right)^2+\left(\dfrac{x^2-5}{4x}\right)^2=1$.

设 $x^2=t$,则 $1<t<9$,得 $(t+3)^2+(t-5)^2=16t$.

解得 $t_1=5+2\sqrt{2}$,$t_2=5-2\sqrt{2}$.

$\because \angle CBP$ 是锐角,

$\therefore t_2=5-2\sqrt{2}<5$,不满足②式大于 0,故舍去.

$\therefore t=5+2\sqrt{2}$,故正方形的边长为 $\sqrt{5+2\sqrt{2}}$.

点拨:将复杂图形分解为若干个三角形,分析未知量所在的三角形中的条件,通过列方程(组)求未知数.

Ⅲ 思维误区点击

本节常见的思维误区:(1)由于余弦定理的公式及其变形较多,且涉及平方和开方等运算,可能会因不细心而导致错误.如求边长时,最后忘掉开方.(2)在 $\triangle ABC$ 中,若 A 为锐角,则有 $a^2<b^2+c^2$;若 A 为钝角,则有 $a^2>b^2+c^2$.这一结论易被忽略,为避免这些易出现的错误,要仔细审题,加强训练,培养思维的严密性.

例 12 已知锐角三角形的边长分别为 5,3,x,则 x 的取值范围是__________.

错解:由三角形中三边关系知,$5-3<x<5+3$,即 $2<x<8$.

误区分析:错误的根源在于审题不清,漏掉"锐角三角形"的限制条件.仅有 $2<x<8$,只能说明可构成三角形,但未必是锐角三角形.x 的取值还需满足构成锐角三角形的条件,最大边所对的最大角为锐角.

正解:由题设知 $\begin{cases}5-3<x<5+3,\\ 9+x^2>25,\\ 25+9>x^2.\end{cases}$ 解得 $4<x<\sqrt{34}$,即 $x\in(4,\sqrt{34})$.

例 13 在 $\triangle ABC$ 中,$AB=5$,$AC=3$,D 是 BC 的中点,且 $AD=4$,问是否存在这样的 $\triangle ABC$,若存在,求出 BC 的长.

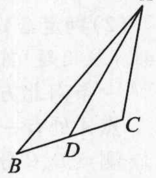


图 1-1.2-9

错解:如图 1-1.2-9,设 $BD=x$,$\angle ADB=\alpha$,则 $CD=BD=x$,$\angle ADC=\pi-\alpha$.

在 $\triangle ABD$ 中,由余弦定理得 $5^2=x^2+4^2-2\times4x\cos\alpha$. ①

在 $\triangle ACD$ 中,由余弦定理得 $3^2=4^2+x^2-2\times4x\cos(\pi-\alpha)$. ②

①+②,得 $34=2x^2+32$,解得 $x=1$,即 $BC=2$.

$\therefore$ 存在这样的 $\triangle ABC$,$BC=2$.

误区分析:错解中对求出的 BC 长未检验是否能构成三角形,而实际上 $BC+AC=2+3=5=AB$,说明点 C 在线段 AB 上,无法构成三角形.

正解:设 $BD=x$,$\angle ADB=\alpha$,则 $CD=x$,$\angle ADC=\pi-\alpha$.

在 $\triangle ABD$ 中,应用余弦定理,得 $5^2=x^2+4^2-2\times4x\cos\alpha$. ①

在 $\triangle ACD$ 中,应用余弦定理,得 $3^2=4^2+x^2-2\times4x\cos(\pi-\alpha)$. ②

①+②,得 $34=2x^2+32$,解得 $x=1$,即 $BC=2$.

经检验,当 $BC=2$ 时,不符合构成三角形的条件,故不存在满足条件的 BC 的长,即不存在这样的 $\triangle ABC$.

Ⅳ 高考能力提升

高考中对于余弦定理的考查,主要是在三角形中,与三角恒等变换、向量等知识相联系,以低、中档题为主,常考题型有解三角形,在三角形中证明含边角关系的恒等式、求值等,有时也与不等式(组)相联系,进行考查.

例 14 (2011 安徽高考理 14 题 5 分)已知 $\triangle ABC$ 的一个内角为 120°,并且三边长构成公差为 4 的等差数列,则 $\triangle ABC$ 的面积为________.

分析:设三角形的三边长分别为 $a-4,a,a+4$,最大角为 θ,由余弦定理得 $(a+4)^2=a^2+(a-4)^2-2a(a-4)\cos120°$,解得 $a=10$,所以三边长为 6,10,14.所以 $\triangle ABC$ 的面积为 $S=\dfrac{1}{2}\times6\times10\times\sin120°=15\sqrt{3}$.

答案:$15\sqrt{3}$.

点拨:本题考查等差数列、余弦定理的应用以及利用公式求三角形的面积.

例 15 (2011 江西高考理 17 题 12 分)在 $\triangle ABC$ 中,角 A,B,C 的对边分别是 a,b,c,已知 $\sin C+\cos C=1-\sin\dfrac{C}{2}$.

(1)求 $\sin C$ 的值;

(2)若 $a^2+b^2=4(a+b)-8$,求边 c 的值.

解:(1)由已知得 $2\sin\dfrac{C}{2}\cos\dfrac{C}{2}+1-2\sin^2\dfrac{C}{2}=1-\sin\dfrac{C}{2}$,即

$\sin\frac{C}{2}\left(2\cos\frac{C}{2}-2\sin\frac{C}{2}+1\right)=0$,由 $\sin\frac{C}{2}\neq0$ 得 $2\cos\frac{C}{2}-2\sin\frac{C}{2}+1=0$,

即 $\sin\frac{C}{2}-\cos\frac{C}{2}=\frac{1}{2}$,两边平方整理得 $\sin C=\frac{3}{4}$.

(2)由 $\sin\frac{C}{2}-\cos\frac{C}{2}=\frac{1}{2}>0$ 知 $\sin\frac{C}{2}>\cos\frac{C}{2}$,则 $\frac{\pi}{4}<\frac{C}{2}<\frac{\pi}{2}$,即 $\frac{\pi}{2}<C<\pi$,则由 $\sin C=\frac{3}{4}$ 得 $\cos C=-\frac{\sqrt{7}}{4}$.

由 $a^2+b^2=4(a+b)-8$,得 $(a-2)^2+(b-2)^2=0$,则 $a=2$,$b=2$.

由余弦定理得 $c^2=a^2+b^2-2ab\cos C=8+2\sqrt{7}$,所以 $c=\sqrt{7}+1$.

点拨:本题主要考查利用正弦定理和余弦定理及三角恒等变换和转化思想.

例16 (2011辽宁高考文17题12分)△ABC的三个内角 A,B,C 所对的边分别为 a,b,c,$a\sin A\sin B+b\cos^2A=\sqrt{2}a$.

(1)求 $\frac{a}{b}$;(2)若 $c^2=b^2+\sqrt{3}a^2$,求 B.

解:(1)由正弦定理得,$\sin^2A\sin B+\sin B\cos^2A=\sqrt{2}\sin A$,即 $\sin B(\sin^2A+\cos^2A)=\sqrt{2}\sin A$.

故 $\sin B=\sqrt{2}\sin A$,所以 $\frac{b}{a}=\sqrt{2}$.

(2)由余弦定理和 $c^2=b^2+\sqrt{3}a^2$,得 $\cos B=\frac{(1+\sqrt{3})a}{2c}$.

由(1)知 $b^2=2a^2$,故 $c^2=(2+\sqrt{3})a^2$.

可得 $\cos^2B=\frac{1}{2}$,又 $\cos B>0$,故 $\cos B=\frac{\sqrt{2}}{2}$,所以 $B=45°$.

点拨:本题主要考查了三角形中的有关公式,利用正弦定理、余弦定理进行边角互化.

V 知识巩固训练

A卷 基础水平训练 (答案见117页)

一、选择题

1. 在△ABC中,角 A,B,C 的对边分别为 a,b,c,已知 $A=\frac{\pi}{3}$,$a=\sqrt{3}$,$b=1$,则 c 等于(　　).

A. 1　　B. 2　　C. $\sqrt{3}-1$　　D. $\sqrt{3}$

2. 在△ABC中,$a^2-c^2+b^2=ab$,则 C 为(　　).

A. 60°　　B. 45°或135°　　C. 120°　　D. 30°

3. 在△ABC中,已知 $a^4+b^4+c^4=2c^2(a^2+b^2)$,则角 C 等于(　　).

A. 30°　　B. 60°　　C. 45°或135°　　D. 120°

4. 在△ABC中,若 $(a+b+c)(b+c-a)=3bc$,且 $\sin A=2\sin B\cos C$,则△ABC是(　　).

A. 直角三角形　　B. 等边三角形

C. 等腰三角形　　D. 等腰直角三角形

5. 在△ABC中,$a=1$,$B=45°$,$S_{\triangle ABC}=2$,则△ABC外接圆的直径为(　　).

A. $4\sqrt{3}$　　B. 60　　C. $5\sqrt{2}$　　D. $6\sqrt{2}$

二、填空题

6. a,b,c 分别为△ABC中角 A,B,C 的对边,$B=120°$,则 $a^2+c^2+ac-b^2=$________.

7. 在△ABC中,$A<B<C$ 且 $b=10$,$a+c=2b$,$C=2A$,则 a 与 c 的值分别为________.

8. 在△ABC中,$\sin A=\frac{\sin B+\sin C}{\cos B+\cos C}$,则△ABC的形状为________.

9. 在△ABC中,$a+b=10$,而 $\cos C$ 是方程 $2x^2-3x-2=0$ 的一个根,则△ABC的周长的最小值为________.

三、解答题(每小题10分,共20分)

10. 在△ABC中,角 A,B,C 的对边分别为 a,b,c,且 $\cos A=\frac{1}{4}$,$a=4$,$b+c=6$,且 $b<c$,求 b、c 的值.

11. 在△ABC中,a,b,c 分别是 A,B,C 的对边,试证明:$a=b\cos C+c\cos B$.

B卷 高考水平训练 (答案见118页)

1. (2011全国高考Ⅱ文18题12分)△ABC的内角 A,B,C 的对边分别为 a,b,c. 已知 $a\sin A+c\sin C-\sqrt{2}a\sin C=b\sin B$,

(1)求 B;(2)若 $A=75°$,$b=2$,求 a,c.

2. (2011山东高考理17题12分)在△ABC中,内角 A,B,C 的对边分别为 a,b,c. 已知 $\frac{\cos A-2\cos C}{\cos B}=\frac{2c-a}{b}$.

(1)求 $\frac{\sin C}{\sin A}$ 的值;

(2)若 $\cos B=\frac{1}{4}$,$b=2$,求△ABC的面积.

3. (综合题)设 a,b,c 分别是△ABC中角 A,B,C 的对边,其外接圆半径为1,且 $(\sin B+\sin C+\sin A)(\sin B+\sin C-\sin A)=3\sin B\sin C$,$b,c$ 分别是方程 $x^2-3x+4\cos A=0$ 的两根($b>c$).

(1)求 A 的度数及 a,b,c 的值;

(2)判定△ABC的形状,并求其内切圆的半径.

4. (应用题)如图1-1.2-10,a 是海面上一条南北方向的海防警戒线,在 a 上点 A 处有一个水声监测点,另两个监测点 B、C 分别在 A 的正东方20 km处和54 km处. 某时刻,监测点 B 收到发自静止目标 P 的一个声波,8 s后监测点 A,20 s后监测点 C 相继收到这一信号,在当时的气象条件下,声波在水中的传播速率是1.5 km/s.

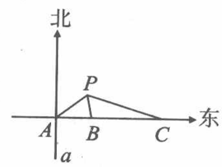


图1-1.2-10

(1)设 A 到 P 的距离为 x km,用 x 表示 B、C 到 P 的距离,并求 x 的值;

(2)求静止目标 P 到海防警戒线 a 的距离(精确到0.01 km).

5. (创新题)已知 k 是整数,钝角△ABC的三内角 A,B,C 所对的边分别为 a,b,c.

(1)若方程组 $\begin{cases}x^2+y=7k,\\2kx+y=3(k^2+1)\end{cases}$ 有实数解,求 k 的值;

(2)对于(1)中的 k 值,若 $\sin C=\frac{k}{\sqrt{2}}$,且有关系式 $(c-b)\sin^2A+b\sin^2B=c\sin^2C$,试求 A,B,C 的度数.

6. (探究题)设 A,B,C 是△ABC的三个内角,且关于 x 的一元二次方程 $(\sin B-\sin A)x^2+(\sin A-\sin C)\cdot x+(\sin C-\sin B)=0$ 有两个相等的实根,试证明:$0<B<\frac{\pi}{3}$.