高等学校教材

高等数学（上）

南京信息工程大学
李 刚 王顺凤 朱凤琴 张天良

高等教育出版社
HIGHER EDUCATION PRESS

高等学校教材

高等数学（上）

Gaodeng Shuxue

南京信息工程大学
李　刚　王顺凤　朱凤琴　张天良

高等教育出版社·北京
HIGHER EDUCATION PRESS　BEIJING

内容提要

本教材作为中国气象局与南京信息工程大学共建教材的系列成果之一，根据局校共建教材项目的基本要求与编者多年的教学实践与教改经验，结合教育部数学与统计学教学指导委员会制定的“本科数学课程教学基本要求”编写而成。

全书分上、下册出版。上册包括函数的极限与连续、一元函数微分学、微分中值定理与导数的应用、不定积分、定积分、定积分的应用、微分方程等七章。书后还有附录：数学归纳法、一些常用的中学数学公式、几种常用的曲线、积分表、MATLAB 简介（上），及习题参考答案等。每节都配有 A、B 两组习题，每章后附有总复习题，便于教师因材施教与学生自主学习。

本书突出重要概念的实际背景和理论知识的应用。全书结构严谨、逻辑清晰、说理浅显、通俗易懂。例题丰富且有一定梯度，便于学生自学。本书可作为高等学校理（非数学专业）、工、农、经管各类专业高等数学的教材，也可作为工程技术人员的参考书。

图书在版编目（CIP）数据

高等数学．上/李刚等编．—北京：高等教育出版社，2010．12

ISBN 978-7-04-030889-1

Ⅰ．①高…　Ⅱ．①李…　Ⅲ．①高等数学-高等学校-教材　Ⅳ．①O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2010）第 210753 号

策划编辑　王　强　**责任编辑**　李华英　**封面设计**　于文燕　**责任绘图**　于　博
版式设计　余　杨　**责任校对**　姜国萍　**责任印制**　韩　刚

出版发行	高等教育出版社	**购书热线**	010-58581118
社　　址	北京市西城区德外大街 4 号	**咨询电话**	400-810-0598
邮政编码	100120	**网　　址**	http://www.hep.edu.cn http://www.hep.com.cn
		网上订购	http://www.landraco.com http://www.landraco.com.cn
经　　销	蓝色畅想图书发行有限公司		
印　　刷	北京市朝阳展望印刷厂	**畅想教育**	http://www.widedu.com
开　　本	787×960　1/16	**版　　次**	2010 年 12 月第 1 版
印　　张	26	**印　　次**	2010 年 12 月第 1 次印刷
字　　数	480 000	**定　　价**	35.10 元

物料号　30889-00

前　言

本教材作为中国气象局与南京信息工程大学共建教材的系列成果之一，是按照局校共建教改项目的要求，参照教育部制定的全国硕士研究生入学考试理、工、经管类数学考试大纲和南京信息工程大学理、工、经管类高等数学教学大纲，以及教育部数学与统计学教学指导委员会制定的“本科数学课程教学基本要求”，并汲取近年来南京信息工程大学高等数学课程教学改革实践的经验，借鉴国内外同类院校数学教学改革的成功经验编写而成。本书力求突出以下特点：

1. 思路清晰、逻辑严谨、概念准确、便于自学。

2. 突出培养通适型人才的宗旨，注重基本概念的理解，强调数学思想的渗透，强化理论知识的应用，力求使学生会用数学知识解决相应的实际问题。

3. 在保证科学性的前提下，充分考虑高等教育大众化的新形势，构建学生易于接受的微积分系统，如对较难理解的极限、连续等概念，先介绍其描述性定义，再介绍它们的精确定义，使学生易于接受；对微分与积分概念，都由实际问题引入，不仅介绍其几何意义还介绍其物理意义，使学生对所学概念有较实际的理解。

4. 为了便于教师因材施教以及适应分层次教学的需要，对有关内容和习题进行了分类处理。每节的后面都配有 A、B 两组习题给不同程度的学生选用，A 组为基础题，主要训练学生掌握基本概念与基本技能；B 组为提高题或综合题，主要训练学生综合运用数学知识分析问题、解决问题的能力。每章的最后还配有总复习题，为学生复习与巩固知识提供必要的训练。

5. 本教材对例题作了精心选择，教材中例题丰富，既具有代表性又有一定的梯度，适合各类读者的要求。

6. 注重与现阶段中学教材的衔接，在本书第一章第一节及附录中分别介绍了反三角函数、数学归纳法以及常用的中学数学公式，供读者查阅。

7. 增加了基本的场论内容，为我校普及气象科学基础知识奠定必要的基础。

8. 增加了 MATLAB 的简单介绍，使学生较早地接触数学软件，为运用数学软件解决实际问题打下良好的基础，同时也弥补了数学实验课的缺乏。

教材中带“*”号的内容不作为教学基本要求，读者可根据需要灵活选用，本书兼顾了理、工、经管各类专业的教学要求，在使用本书时，参照各专业对数学教学的基本要求进行取舍。如经济管理类专业，多元函数的积分部分只需选讲

二重积分,级数部分的傅里叶级数可舍去不讲;理工类专业可以不讲数学在经济方面的应用等。

所有编写人员集体认真讨论了全书的框架与内容,其中第一、二、三章由王顺凤老师编写,第四、五、六章由朱凤琴老师编写,第七、九章由夏大峰、张天良老师合编,第八、十二章由薛巧玲老师编写,第十、十一章由朱杏华老师编写。附录中的 MATLAB 简介部分由陈允杰老师编写。上册由王顺凤、李刚统稿,下册由夏大峰统稿,全书由李刚、王顺凤、夏大峰定稿。

在本教材的编写过程中,南京信息工程大学教务处、数理学院等各级领导都给予大力支持与鼓励;徐晶、陈继波、符美芬、朱建等许多老师都提出了宝贵的修改意见与建议。数学系主任肖建中老师仔细审阅了全部书稿,提出了宝贵的修改意见,全体编写人员向他们表示衷心的感谢。

本教材的编写得到了中国气象局与南京信息工程大学局校共建重点教改项目的资助和高等教育出版社高等理工出版中心数学分社的领导和编辑们的大力支持,在此表示衷心的感谢。

由于编者水平所限,书中难免存在缺点和错误,敬请各位专家、同行和广大读者批评指正。

编者

2010 年 8 月

目　录

第一章　函数的极限与连续

17 世纪法国数学家笛卡儿(Rene Descartes)把变量引入数学,由此对数学产生了巨大的影响,有了变量,运动进入了数学,辩证法进入了数学,并最终促进了微积分的形成与发展.微积分是 17 至 19 世纪人类文明史上的重大成果之一,在现代科学技术中有着广泛而重要的应用.它以极限为主要工具研究函数的基本性质.本章作为微积分的准备,主要介绍函数、极限和连续的基本概念及有关性质,并着重介绍其基本思想与方法,为学习微积分打好基础.

第一节　函　　数

一、变量与常用数集

自然界千变万化的事物及其变换过程是自然科学的研究对象,数学则是最重要的研究工具,数学的思维方法是把变化的事物与变量联系起来,也就是把事物及其变化过程进行量化.人们在观察某个自然现象或变化过程中,会遇到很多数量,这些数量一般可分为两类:一类是在该过程中保持不变的量,称为常量;另一类是在该过程中可以取不同的值或不断变化着的量,称为变量.例如在观察圆的图形变化时,直径与周长都是变量,而圆的周长与直径的比值(圆周率)π 是一个常量;又如在自由落体运动中,物体的下降速度、下降时间及下降距离都是变量,而物体的质量在该过程中可以看作是常量.一般地,常用字母 $a,b,c,\cdots$ 表示常量,字母 $x,y,z,t,\cdots$ 表示变量.一个量是变量还是常量,要在具体问题中作具体分析.例如就小范围的地区来说,重力加速度 g 可以看作是常量,但就广大地区来说,重力加速度 g 则是一个变量.

讨论变量间的数量关系时,必须明确变量的取值范围,单个变量的取值范围常用数集来表示.本书讨论的变量在没有特别说明的情况下都是指在实数范围内变化的量.常用的数集除了有自然数集 $\mathbf{N}$、正整数集 $\mathbf{N}^+$、整数集 $\mathbf{Z}$、有理数集 $\mathbf{Q}$、实数集 $\mathbf{R}$ 外,还常用区间和邻域来表示.

区间是用得较多的一类数集,设 $a,b\in\mathbf{R}$,且 $a<b$,则数集

$$\{x\mid a<x<b,x\in\mathbf{R}\}$$

称为开区间,记作(a,b),即

$$(a,b)=\{x\mid a<x<b,x\in\mathbf{R}\};$$

数集

$$\{x\mid a\leqslant x\leqslant b,x\in\mathbf{R}\}$$

称为闭区间,记作$[a,b]$,即

$$[a,b]=\{x\mid a\leqslant x\leqslant b,x\in\mathbf{R}\};$$

类似地,数集

$$\{x\mid a<x\leqslant b,x\in\mathbf{R}\}\text{与}\{x\mid a\leqslant x<b,x\in\mathbf{R}\}$$

均称为半开半闭区间,分别记作$(a,b]$与$[a,b)$,即

$$(a,b]=\{x\mid a<x\leqslant b,x\in\mathbf{R}\};$$
$$[a,b)=\{x\mid a\leqslant x<b,x\in\mathbf{R}\}.$$

其中 a 与 b 称为这些区间的端点,$b-a$ 称为这些区间的区间长度. 以上四种区间均为有限区间,其区间长度 $b-a$ 是有限的数值. 此外还有下列五种无限区间,引进记号$+\infty$(读作正无穷大)及$-\infty$(读作负无穷大),则有

$$(a,+\infty)=\{x\mid x>a,x\in\mathbf{R}\};\quad [a,+\infty)=\{x\mid x\geqslant a,x\in\mathbf{R}\};$$
$$(-\infty,b)=\{x\mid x<b,x\in\mathbf{R}\};\quad (-\infty,b]=\{x\mid x\leqslant b,x\in\mathbf{R}\};$$
$$(-\infty,+\infty)=\mathbf{R}.$$

这些区间的区间长度都为无穷大.

为了讨论函数在一点邻近的某些性态,下面引入邻域的概念.

定义 1 设 $a,\delta\in\mathbf{R},\delta>0$,数集$\{x\mid |x-a|<\delta,x\in\mathbf{R}\}$称为点 a 的 δ 邻域,记作 $U(a,\delta)$. 其中点 a 与数 δ 分别称为这个邻域的中心与半径.

几何上,邻域 $U(a,\delta)$表示数轴上与点 a 的距离小于 δ 的点集,因此该点集是以点 a 为中心,δ 为半径的一个开区间(图 1-1(a)),即

$$U(a,\delta)=(a-\delta,a+\delta).$$

当不强调邻域的半径时,可用记号 $U(a)$表示以点 a 为中心的任意开区间.

将邻域 $U(a,\delta)$的中心点 a 去掉后得到的数集$\{x\mid 0<|x-a|<\delta\}$称为点 a 的去心 δ 邻域,记作 $\mathring{U}(a,\delta)$(图 1-1(b)),即

$$\mathring{U}(a,\delta)=(a-\delta,a)\cup(a,a+\delta).$$

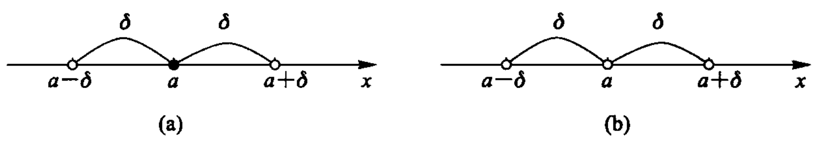


图 1-1

二、函数的基本概念

为了简便起见,先介绍一些常用的数学符号.

符号"$\forall$"表示"任意(确定)的"或者"每一个";符号"$\exists$"表示"存在"或者"有".例如"$\forall x$"表示"任意(确定)的 x",而"$\exists x$"表示"存在 x".

函数研究的是变量之间的对应关系,在同一自然现象或变化过程中,经常会同时遇到两个或更多个变量,它们互相联系、互相依赖并遵循一定的规律变化着.例如,在初速度为0的自由落体运动中,路程 s 与时间 t 是两个变量,当时间变化时,所经过的路程也随之改变,它们之间有如下关系:

$$s=\frac{1}{2}gt^2 \quad (t\geqslant 0). \tag{1}$$

又如在电阻两端加直流电压 U,电阻中有电流 I 通过,电压 U 改变时,电流 I 随之改变,其变化规律为

$$I=\frac{U}{R},$$

若电阻 $R=2$,则

$$I=\frac{U}{2}. \tag{2}$$

(1)、(2)两式均表达了两个变量之间相互依赖的关系或规律,依据这些规律,当其中一个变量在某一范围内取定一个数值时,另一变量的值就随之确定,数学上把这种对应关系称为函数关系.

定义2 设 x,y 为某一变化过程中的两个变量,如果 x 在其变化范围 D 内任意取定一个值,y 按照一个给定的对应法则总有唯一确定的值与之对应,则称 y 是 x 的函数,并称 x 为自变量,y 为因变量,记作

$$y=f(x) \quad (x\in D).$$

其中数集 D 称为函数$f(x)$的定义域.

一般地,在函数 $y=f(x)$ 中,使得式子$f(x)$有意义的 x 的集合是该函数的定义域,这时也称为该函数的自然定义域.但在实际问题中,函数 $y=f(x)$ 的定义域还要根据问题中的实际意义来确定.

由定义2可知,$f(x)$也表示与 x 对应的函数值,因此对应于 x_0 的函数值记为$f(x_0)$或 $y\big|_{x=x_0}$.全体函数值构成的集合称为函数 $y=f(x)$ 的值域,记作 $f(D)$,即

$$f(D)=\{y\,|\,y=f(x),x\in D\}.$$

符号$f(x)$中的f表示 y 与 x 之间的对应关系,故f仅仅是一个函数对应法则的记号,也可用其他符号如 φ,F 等代替,这时,函数 $y=f(x)$就写成 $y=\varphi(x)$或 $y=$

$F(x)$. 但一个函数在同一个问题中只能取定一种记法,当同一问题中涉及多个函数时,则应取不同的符号分别表示它们各自的对应法则,以免混淆.

例 1 求函数 $y=\sqrt{\sin x-1}$ 的定义域.

解 由题意可得不等式:

$$\sin x-1\geqslant 0,$$

即

$$\sin x=1,$$

解得

$$x=\frac{\pi}{2}+2k\pi,k\in\mathbf{Z},$$

则该函数的定义域为 $D=\left\{x\;\middle|\;x=\frac{\pi}{2}+2k\pi,k\in\mathbf{Z}\right\}$.

例 2 设 $f(x)=x^2-x$,求 $f(x+1)$,$f\left(\frac{1}{x}\right)$.

解 将 $f(x)$ 中的变量 x 分别用 $x+1$,$\frac{1}{x}$ 代替,得

$$f(x+1)=(x+1)^2-(x+1)=x^2+x,$$

$$f\left(\frac{1}{x}\right)=\left(\frac{1}{x}\right)^2-\left(\frac{1}{x}\right)=\frac{1-x}{x^2}.$$

由函数的定义可知,若两个函数的定义域相同,对应法则也相同,则这两个函数相同. 因此也称函数的定义域与对应法则为函数的二要素.

例如函数 $y=\lg x^2$ 与 $y=2\lg x$,它们的对应法则相同,但定义域不同,所以它们不是相同的函数. 又如函数 $y=x(x\geqslant 0)$ 与 $y=(\sqrt{x})^2$,它们的对应法则相同,定义域也相同,因此它们是相同的函数.

在函数 $y=f(x)$ 的定义中强调"对于 $\forall x\in D$,都有唯一的 y 与之对应",因此也称 y 为 x 的单值函数. 但对不同的 $x\in D$,有时可能对应于同一个 y,例如三角函数就是如此;如果函数 $y=f(x)$ 中任意不同的 $x\in D$,都对应于不同的 y,我们称这样的函数关系是一一对应的,在一一对应的函数中对每一个 y,也只能对应唯一的 x,例如指数函数就是一一对应的函数.

函数的表示方法有多种形式,常见的主要有:表格法、图示法、公式法.

表格法就是把自变量 x 与因变量 y 的一些对应值用表格列出,实际应用中常用此法. 例如火车时刻表,就是用列表的方法列出出站和进站对应的车次与时间的函数关系. 其优点是从表上可直接看出 y 随 x 的变化而变化的情况,使用上较方便,缺点是只能表达有限个对应数据.

图示法是把变量 x 与 y 对应的有序数组 (x,y) 看作直角坐标平面内点的坐

标,y 与 x 的函数关系就可用坐标面上的曲线来表出.例如气象站中的温度记录器,记录了空气中温度与时间的函数关系.这种关系是借助仪器自动描绘在纸带上的一条连续不断的曲线来表达的.其优点是直观性强,缺点是没有给出函数关系的表达式,不便于做理论上的推导与演算.

公式法(解析法)是把两个变量之间的关系直接用数学式子表示,高等数学中所涉及的函数大多用公式法来表示.

例如 n 次多项式函数

$$y=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_nx^n,$$

这里 $a_i(i=0,1,2,\cdots,n)$ 均为常数,n 为自然数,x 为自变量,$x\in\mathbf{R}$. 有理函数

$$y=\frac{P(x)}{Q(x)},$$

这里 $P(x)$ 与 $Q(x)$ 均为多项式函数,它们都是用公式法表示的函数.

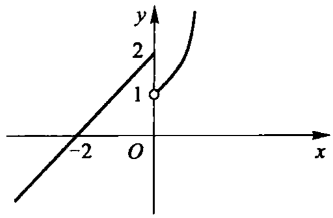
有些函数在不同的定义范围内对应的函数关系并不相同,这时就要用几个不同的式子分段来表示该函数,例如函数(图 1-2(a))

$$y=\begin{cases}x+2, & x\leqslant 0,\\ e^x, & x>0\end{cases}$$

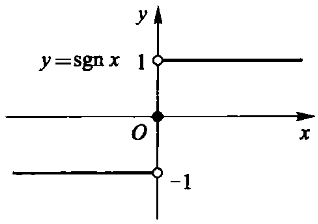
与符号函数(图 1-2(b))

$$\operatorname{sgn} x=\begin{cases}1, & x>0,\\ 0, & x=0,\\ -1, & x<0.\end{cases}$$

像这样在不同的范围内用不同的式子分段表示的函数称为分段函数.在自然科学与工程技术中经常用到分段函数.



(a)



(b)

图 1-2

必须指出,分段函数是用不同的式子表示一个(而不是几个)函数.因此对分段函数求函数值时,不同点的函数值应代入相应范围的公式中去求.

例如常用记号$[x]$表示"小于或等于 x 的最大整数",显然$[x]$是由 x 唯一确定的,如

$$[-1.5]=-2,[0]=0,[1.3]=1,[2.43]=2.$$

称函数 $y=[x]$ 为取整函数，取整函数 $y=[x]$ 的定义域是实数集 $\mathbf{R}$，值域是整数集 $\mathbf{Z}$，它表示 y 是不超过 x 的最大的整数，该函数为分段函数，其图像如图 1-3 所示.

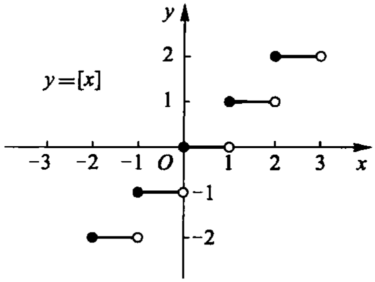


图 1-3

上述用公式所表示的函数，都是直接用一个或几个关于自变量的式子来表示的，这样的函数也称为显函数. 除此以外，在很多实际问题中，变量之间的函数关系也常用方程来表达，例如在直线方程 $x+2y=1$ 中，给定任意一个实数 x，都有唯一确定的 y 值 $\left(y=\dfrac{1-x}{2}\right)$ 与之对应，因此在方程 $x+2y=1$ 中隐含了一个函数关系 $y=\dfrac{1-x}{2}$. 又如圆的方程 $x^2+y^2=a^2$ 确定了两个函数

$$y=\sqrt{a^2-x^2}\ (\text{当 } y\geqslant 0 \text{ 时}) \quad 与 \quad y=-\sqrt{a^2-x^2}\ (\text{当 } y\leqslant 0 \text{ 时}).$$

在 xOy 平面上，函数 $y=\sqrt{a^2-x^2}$ 表示上半圆周，函数 $y=-\sqrt{a^2-x^2}$ 表示下半圆周，这两个函数都是由方程 $x^2+y^2=a^2$ 确定的. 但也有一些方程确定的函数关系不那么容易甚至不可能直接用自变量的解析式子表示出来. 例如开普勒(Kepler)方程

$$y-x-\varepsilon\sin y=0\ (\varepsilon \text{ 为常数}, 0<\varepsilon<1),$$

在这个方程中不可能将 y 用 x 的解析式表示出来，但它仍能确定 y 是 x 的函数.

如果由一个二元方程 $F(x,y)=0$ 确定 y 是 x 的函数（满足函数的定义），则称函数 $y=y(x)$ 是由方程 $F(x,y)=0$ 确定的隐函数. 有时直接通过对方程恒等变形，就可以将这个隐函数的解析式求出，例如由方程 $2x+5y=2$ 可以解得 $y=\dfrac{2-2x}{5}$，将隐函数从对应的方程中求解出来，表示成 $y=y(x)$ 的形式，这个过程称为隐函数的显化. 但不是每个隐函数都可以显化，如方程 $e^{xy}+x-\sin y=1$ 确定的隐函数是无法显化的，因此用方程表达的函数关系即隐函数是表达函数的一种必不可少的形式. 需要注意的是，任意一个方程并不一定就能确定一个隐函数，那么一个方程究竟在什么条件下能够确定一个隐函数呢？这将在第九章中给出相关结论.

有时变量 x,y 之间的函数关系还可以通过参数方程

$$\begin{cases} x=\varphi(t), \\ y=\psi(t), \end{cases} \quad (t\in I)$$

给出，这样的函数称为**由参数方程确定的函数**，简称**参数式函数**，t 称为**参数**.

如物体作斜抛运动时，运动曲线(图 1-4)表示的函数就可写作参数式函数：

$$\begin{cases} x=v_0 t\cos\alpha, \\ y=v_0 t\sin\alpha-\dfrac{1}{2}gt^2, \end{cases}$$

其中 α 为初速度 $\boldsymbol{v}_0$ 与水平方向的夹角，$v_0=|\boldsymbol{v}_0|$.

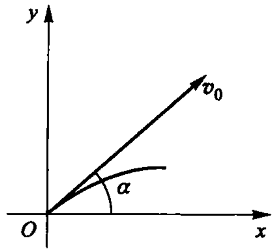


图 1-4

三、函数的几种基本特性

由中学数学可知，函数的有界性、单调性、奇偶性、周期性是函数的四个基本特性，下面分别对它们作简要概括.

1. 函数在指定数集上的有界性

定义 3　设函数 $f(x)$ 的定义域为 D，数集 $I\subset D$. 若存在数 M_1，当 $\forall x\in I$ 时，恒有

$$f(x)\leqslant M_1,$$

则称函数 $f(x)$ 在数集 I 上有上界，M_1 为 $f(x)$ 在 I 上的一个上界；若存在数 M_2，当 $\forall x\in I$ 时，恒有

$$f(x)\geqslant M_2,$$

则称函数 $f(x)$ 在数集 I 上有下界，M_2 为 $f(x)$ 在 I 上的一个下界；若 $f(x)$ 在数集 I 上既有上界，又有下界，则称 $f(x)$ 在 I 上有界. 否则就称函数 $f(x)$ 在 I 上无界.

显然，若 $f(x)$ 在 I 上有界，则必存在数 M_1，M_2，使得对 $\forall x\in I$，恒有

$$M_1\leqslant f(x)\leqslant M_2,$$

取 $M=\max\{|M_1|,|M_2|\}$，则容易证明上式等价于

$$|f(x)|\leqslant M,$$

因此函数 $f(x)$ 在数集 I 上有界的充要条件为存在正数 M，对 $\forall x\in I$，恒有 $|f(x)|\leqslant M$.

在几何上，若函数 $f(x)$ 在数集 I 上有上界 M_1，则表示函数 $y=f(x)$ 在数集 I 上的图形均位于直线 $y=M_1$ 的下方；若函数 $f(x)$ 在数集 I 上有下界 M_2，则表示函数 $y=f(x)$ 在数集 I 上的图形均位于直线 $y=M_2$ 的上方；若函数 $f(x)$ 在数集 I 上有界，则表示必存在一个正数 M，函数 $y=f(x)$ 在数集 I 上的图形位于直线 $y=M$ 与 $y=-M$ 之间.

例如，函数 $y=\sin x$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内有界，大于 1 的数都是它的上界，小于 -1 的数都是它的下界；函数 $y=[x]$ 在任一有限区间 $[a,b]$ 上是有界的，$a-1$ 与 b