



普通高等教育“十一五”国家级规划教材

清华大学公共基础平台课教材

# 大学数学实验

(第2版)

姜启源 谢金星 邢文训 张立平 编著

清华大学出版社



普通高等教育“十一五”国家级规划教材

# 大学数学实验 (第2版)

清华大学公共基础平台课教材

姜启源 谢金星 邢文训 张立平 编著

清华大学出版社  
北京

## 内 容 简 介

数学实验课的宗旨是：在教师指导下以学生在计算机上动手、动脑、动眼为主，通过用数学软件做实验，学习实际问题中常用的数学方法，并在此基础上分析、解决经过简化的实际问题，提高数学与用数学的兴趣、意识和能力。本书通过 14 个实验介绍数值计算、优化方法和数理统计的基本原理、有效算法及软件实现，并提供若干简化的实际问题，让读者利用学到的数学方法及适合的数学软件在计算机上完成数学建模的全过程。本书适用于学过微积分、线性代数和概率论与数理统计的读者进一步提高利用数学工具和计算机技术分析、解决实际问题的能力。

本书可作为高等院校理工、经管类专业数学实验、数学建模课程的教材或参考书，大学生数学建模竞赛的辅导教材，也可供专业人员学习参考。

版权所有，侵权必究。侵权举报电话：010-62782989 13701121933

## 图书在版编目(CIP)数据

大学数学实验/姜启源,谢金星,邢文训,张立平编著. —2 版. --北京:清华大学出版社, 2010. 12  
(清华大学公共基础平台课教材)

ISBN 978-7-302-24077-8

I. ①大… II. ①姜… III. ①高等数学—实验—高等学校—教材 IV. ①O13-33

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2010)第 221945 号

责任编辑：刘 颖

责任校对：刘玉霞

责任印制：何 芊

出版发行：清华大学出版社

地 址：北京清华大学学研大厦 A 座

<http://www.tup.com.cn>

邮 编：100084

社 总 机：010-62770175

邮 购：010-62786544

投稿与读者服务：010-62776969, c-service@tup.tsinghua.edu.cn

质 量 反 馈：010-62772015, zhiliang@tup.tsinghua.edu.cn

印 装 者：北京鑫海金澳胶印有限公司

经 销：全国新华书店

开 本：185×230 印 张：28 字 数：609 千字

版 次：2010 年 12 月第 2 版 印 次：2011 年 4 月第 2 次印刷

印 数：4001~7000

定 价：39.00 元

产品编号：025734-01

## 第 2 版前言

大学数学实验(第 2 版)

数学实验作为一门新兴的数学课程,在进入我国高等院校十年来的时间里得到了迅速的发展,这一方面得益于“高技术本质上是一种数学技术”的观点日益为人们所接受,而数学软件是数学技术的重要载体,以数学软件为主要教学手段之一的数学实验课程自然得到广大教师和学生的认同与钟爱.另一方面,越来越多的教育界人士认识到,大学的数学教学内容不能一成不变,数学教学改革也要与时俱进,将计算机技术和数学软件以各种不同的形式引入教学,以及将数学建模的思想和方法融入数学主干课程中的试验,已经成为一股潮流.

据不完全统计,十年来带有“数学实验”名字正式出版的教材达 60 本以上<sup>①</sup>,开设数学实验的学校有数百所,对这一新兴课程的体系、教学内容和教学方法进行了有益的探索.

本书第 1 版出版 5 年来,清华大学有 7 位教师使用本教材为 3000 多名学生讲授数学实验课.教师和同学普遍反映,该书结构合理,内容适当,在数学方法、数学软件和数学建模的结合上具有鲜明的特色.

在 5 年来教学实践的基础上,本书第 2 版保留了第 1 版的基本结构和主要内容,主要从以下几方面作了修订:

1. 增加实验 1 数学实验简介,论述数学实验的目的、要求、内容、方法,并通过实例说明数学实验的主要形式及学习方式,还简单介绍相关的数学软件及一门新的数学分支——实验数学.

2. 将第 1 版的实验 8 约束优化拆分为线性规划和非线性规划两个实验,并增加用 LINGO 软件求解它们,线性规划还增加敏感性分析和对偶问题等内容.

3. 删除第 1 版的实验 2 差分方程和数值微分及实验 13 人工神经网络,将实验 2 的内容分别并入实验 1,2,4,5 中.

4. 补充、改写部分实例和实验练习.

---

<sup>①</sup> 截至 2008 年底带有“数学实验”名字的教材目录参见李大潜主编《中国大学生数学建模竞赛(第 3 版)》中的附录三.

5. 增加自我检查题部分,供学生作综合练习和检查用.

在本书第2版的修订中,实验1,2,13,14由姜启源完成,实验3,11,12由邢文训完成,实验4,5,6及部分练习参考答案、自我检查题由张立平完成,实验7,8,9,10及附录由谢金星完成.参与编著并使用本书第1版讲课的杨顶辉、使用本书第1版讲课的王振波等为修订工作做出了贡献,在此表示衷心的感谢.

编 者

2010.10

电子计算机的出现和飞速发展是 20 世纪科学家和工程师对人类做出的最伟大的贡献之一。今天,不论你走进大型工厂的控制间、建筑公司的设计室,还是政府机关的办公楼、学校的多媒体教室,计算机都会立刻映入你的眼帘。刷卡购物、刷卡乘车、刷卡入住、刷卡注册……人们的日常生活越来越离不开计算机。今天我们难以想像在不久的未来计算机会给人类生活带来多么巨大的变化。

数学作为一门研究现实世界数量关系和空间形式的科学,在它产生和发展过程中,一直是和人们的实际需要密切相关的,历史上许多科学技术的重大发明都离不开数学,电子计算机的出现也应归功于数学家的奠基性工作。反过来,科学技术和生产活动的进步,又促进了数学的发展。特别是电子计算机技术的飞速进步为古老的数学提供了威力巨大的工具,彻底改变了长期以来仅靠一张纸、一支笔做数学题的传统,使数学的应用在广度和深度上都达到了前所未有的程度,促成了从数学科学到数学技术的转化,并使数学技术成为当今高科技的一个重要组成部分和显著标志。同时也把数学从数学家的书斋里和课本中解放出来,成为各行各业认识自然、改造社会的有力武器。

教育必须跟踪、反映并预见社会发展的需要,大学的数学教育更应如此。我们看到,先是出现了一些计算机语言和编写程序的课程,让学生熟悉和学会使用计算机,继而引入各种形式的数学建模课程,架起数学知识和应用之间的桥梁,弥补了学生学完传统数学课程仍不会用的缺陷,对数学教学改革起了显著的促进作用。但是上面两类课程尚未很好地融合,计算机程序一类课程很少涉及数学的应用,数学建模课程又往往是纸上谈兵,学生少有机会自己动手,用计算机这个强有力的工具去分析、解决哪怕是简化的实际问题。目前正蓬勃开展的全国大学生数学建模竞赛,可以说是二者相结合的一个范例,而那毕竟只是少数学生参加的课外科技活动。

作为探索计算机技术和数学软件引入教学后数学教育改革的一项尝试,1996 年在教育部立项的面向 21 世纪非数学专业数学教学体系和内容改革的总体构想中,把“数学实验”列为数学基础课之一,清华大学数学系参加了这项教改的一个课题组,并于 1998 年进行了数学实验课的试点。在此基础上姜启源等编写了《数学实验》一书(萧树铁教授主编的面向 21 世纪课程教材《大学数学》丛书中的一本,高等教育出版社 1999 年出版)。

近几年国内不少高等院校相继开设了数学实验课,也出版了好几本教材,从中可以看出,大家对于这门课程基本宗旨的认识大体上是一致的,即以学生在计算机上动手、动脑、动脑为主,在教师的指导下,通过用数学软件做实验,学习实际问题中常用的数学方法,分析、解决经过简化的实际问题,提高学数学、用数学的兴趣、意识和能力.当然,在课程的模式和实验的内容上,各校根据各自的具体情况有所不同,这是十分正常的现象,应当鼓励不同形式的课程模式、内容和方法的大胆探索.

在清华大学新制定的非数学类专业数学教学体系中,数学实验是4门主干课程的最后一门(前3门是微积分、代数与几何、随机数学方法),起着承上(上述3门数学课)启下(后续课、研究生课程及数学的应用)的作用.我们将它设计为一门重组课程,集数值计算、优化方法、数理统计、数学建模以及数学软件于一体,以“了解数学基本原理、知道主要数值算法、会用数学软件实现、培养数学建模能力”为基本要求,使之既是上述3门数学课程的巩固和提高,又在基本数学知识和数学的应用之间架起一座桥梁.

目前不少院校正在开展“本硕贯通”的教育改革,本科阶段的数学实验课只介绍相关数学知识的基本原理、方法、软件实现及其应用,为研究生阶段要求掌握更深入的理论和方法的数学课程(如数值分析、数学规划、高等数理统计等)提供了许多实际背景,也留下了一些需要进一步解决的问题,从而刺激了学生再学习的愿望.

按照上述的基本思路,从2000年起清华大学在全校范围内大规模地开设数学实验课,每学期3~4个大班(每班约200人),得到同学们的肯定和好评,我们也在教学中不断明确和修正这门课程的指导思想和目的要求,逐步改进和完善课程的具体内容和教学方法,这本教材就是在4年来教学实践的基础上由主要授课教师集体编写的.

基于上面的认识与实践,这本教材的编写遵循了以下原则:

1. 在上述3门数学主干课程的基础上,介绍一些最常用的解决实际问题的数学方法,包括数值计算、优化方法和数理统计的基本原理及主要算法,一般不讲证明,基本上不做笔头练习.

2. 选择合适的数学软件平台(以MATLAB为主,辅之以LINDO和LINGO),能够方便地满足以上内容的软件实现.

3. 数学建模的思想和方法贯穿全书,从建模初步练习开始,以建模综合练习结束,每个实验尽量从实际问题的建模引入,并落实于模型的求解.

4. 精心安排学生的实验,学生自己动手在计算机上做练习的时间和条件必须保证,建议讲课与实验的学时比例至少为1:2,并且对实验报告的内容和格式提出明确的要求.

按照这些原则本书共包含14个实验:数值计算5个实验、优化方法3个实验、数理统计3个实验、数学建模2个实验,另外还有人工神经网络1个实验.这些实验基本上相互独立,教师可根据具体情况选用.一个实验的内容可在3~4学时内讲完.每个实验都备有充分的、供学生动手做的练习,部分练习题附有提示或参考答案.MATLAB的基本用法编入附录.

针对数学实验课需要知识面广、实例多、计算方法与软件实现相互交叉等特点,课堂讲授宜采用多媒体教学,可以做到实例生动、信息量大、便于接受.我们研制了与本书配套的多媒体课件,交由清华大学出版社出版.

本书实验 1,2,12,14 由姜启源编写,实验 3,10,11,13 由邢文训编写,实验 6,7,8,9 及附录由谢金星编写,实验 4,5 由杨顶辉编写,张立平统编了部分实验练习的参考答案,黄红选、张立平参加了审阅,全书由姜启源统稿.在清华大学讲授过数学实验课的还有李建国、李津等,他们都对这本教材的编写做出了贡献,在此表示衷心的感谢.

编 者

2004.6



# 目 录

大学数学实验(第2版)

<b>实验1 数学实验简介</b> .....	1
1.1 什么是数学实验 .....	1
1.2 数学实验实例 .....	5
1.3 数学软件简介 .....	16
1.4 实验练习 .....	19
参考文献 .....	21
<b>实验2 数学建模初步</b> .....	23
2.1 什么是数学建模 .....	23
2.2 数学建模实例 .....	24
2.3 数学建模的基本方法、步骤以及重要意义 .....	36
2.4 实验练习 .....	39
参考文献 .....	41
<b>实验3 插值与数值积分</b> .....	42
3.1 实例及其数学模型 .....	42
3.2 3种插值方法 .....	44
3.3 数值积分 .....	54
3.4 实验练习 .....	64
参考文献 .....	66
<b>实验4 常微分方程数值解</b> .....	68
4.1 实例及其数学模型 .....	68
4.2 数值微分 .....	70
4.3 欧拉方法和龙格-库塔方法 .....	71
4.4 龙格-库塔方法的 MATLAB 实现 .....	75

4.5	算法的收敛性、稳定性及刚性方程 .....	81
4.6	实验练习 .....	85
	参考文献 .....	88
<b>实验 5</b>	<b>线性代数方程组的数值解法 .....</b>	<b>89</b>
5.1	实例及其数学模型 .....	89
5.2	求解线性代数方程组的直接法 .....	93
5.3	求解线性代数方程组的迭代法 .....	99
5.4	线性方程组数值解法的 MATLAB 实现 .....	102
5.5	实验练习 .....	110
	参考文献 .....	113
<b>实验 6</b>	<b>非线性方程求解 .....</b>	<b>115</b>
6.1	实例及其数学模型 .....	116
6.2	非线性方程和方程组的基本解法 .....	118
6.3	用 MATLAB 解非线性方程和方程组 .....	123
6.4	非线性差分方程与分岔及混沌现象 .....	130
6.5	实验练习 .....	137
	参考文献 .....	139
<b>实验 7</b>	<b>无约束优化 .....</b>	<b>140</b>
7.1	实例及其数学模型 .....	141
7.2	无约束优化的基本方法 .....	146
7.3	最小二乘法 .....	148
7.4	用 MATLAB 解无约束优化 .....	151
7.5	实验练习 .....	168
	参考文献 .....	172
<b>实验 8</b>	<b>线性规划 .....</b>	<b>174</b>
8.1	实例及其数学模型 .....	174
8.2	线性规划的基本原理和解法 .....	177
8.3	用 MATLAB 优化工具箱解线性规划 .....	184
8.4	用 LINGO 软件解线性规划 .....	189
8.5	实验练习 .....	195
	参考文献 .....	199

<b>实验 9 非线性规划</b> .....	200
9.1 实例及其数学模型 .....	200
9.2 带约束非线性规划的基本原理和解法 .....	202
9.3 用 MATLAB 优化工具箱解非线性规划 .....	207
9.4 用 LINGO 解非线性规划 .....	214
9.5 实验练习 .....	219
参考文献 .....	222
<b>实验 10 整数规划</b> .....	223
10.1 实例及其数学模型 .....	223
10.2 整数规划的基本原理和解法 .....	228
10.3 用 LINGO 解整数规划 .....	236
10.4 实验练习 .....	243
参考文献 .....	247
<b>实验 11 数据的统计与分析</b> .....	248
11.1 实例及其分析 .....	249
11.2 数据的整理和描述 .....	250
11.3 随机变量的概率分布及数字特征 .....	255
11.4 用随机模拟计算数值积分 .....	264
11.5 实例的建模和求解 .....	269
11.6 实验练习 .....	272
参考文献 .....	273
<b>实验 12 统计推断</b> .....	274
12.1 实例及其分析 .....	275
12.2 参数估计 .....	277
12.3 假设检验 .....	282
12.4 实例的求解 .....	291
12.5 实验练习 .....	297
参考文献 .....	300
<b>实验 13 回归分析</b> .....	301
13.1 实例及其数学模型 .....	302

13.2	一元线性回归分析	306
13.3	多元线性回归分析	314
13.4	非线性回归分析	330
13.5	实验练习	332
	参考文献	339
<b>实验 14</b>	<b>数学建模与数学实验</b>	<b>340</b>
14.1	投篮的出手速度和角度	340
14.2	降落伞的选择	346
14.3	航空公司的预订票策略	351
14.4	银行服务系统的优化	355
14.5	实验练习	362
	参考文献	366
	部分实验练习的参考答案	367
	自我检查题	378
<b>附录</b>	<b>MATLAB 使用入门</b>	<b>390</b>
1	矩阵及其运算	391
2	语句和函数以及其他数据类型	397
3	命令和窗口环境	405
4	图形功能	408
5	程序设计	415
6	符号工具箱使用简介	426
	参考文献	435

数学实验是 20 世纪 90 年代我国高等学校开设的一门新课,作为教材,在第一个实验中首先介绍数学实验的目的、要求、内容、方法等,然后给出几个实例,以期说明数学实验的主要形式及学习方式,最后简单介绍几个与数学实验相关的数学软件.

## 1.1 什么是数学实验

物理、化学、生物、医学等自然科学以物质世界为直接研究对象,在特定条件下进行大量、重复的实验,可以方便地重现客体在现实世界里人们难以观察到的发生和变化的过程,使得实验成为一些重大的发明、著名的定律以及许多新材料、新手段的主要源泉之一,而实践——认识——再实践,正是辩证唯物主义哲学对认识的发生、发展过程所揭示的一般规律.

数学的对象以其特殊性和抽象性与其他自然科学相区别<sup>①</sup>,几千年来呈现着强调经验和归纳与强调理性和演绎的交互发展历程.最初数学从现实生活中产生,是经验的积累和总结.早期的数学家也曾通过实验来研究数学,如根据现有的记载,巴比伦就是用数字例子来解释代数恒等式的.公理方法和公理系统的出现,使数学一度重视演绎推理的定性分析,忽视(甚至鄙视)来自实际的定量研究.17 世纪科学技术的发展促成了微积分的诞生,以此为核心的数学分析学科在科技和生产中发挥了巨大作用,人们又强调实践和经验对数学的推动,同时形成了纯粹数学和应用数学两大研究领域.此后一般所说的数学多指纯粹数学.19 世纪以来,集合论、实变函数论、复变函数论、抽象代数、微分几何等近代数学分支的产生,既推动了纯粹数学和应用数学的发展,也逐渐形成了用形式的、抽象的表述来发表最终结果的传统,而那些最初引导数学家构想出一般定理的数字例子未能刊出,并最终被遗忘.数学究竟是经验科学还是演绎科学的争论一直在继续<sup>[1]</sup>.

---

<sup>①</sup> 关于(纯)数学的对象我国长期沿用恩格斯的论述,被译为“现实世界的空间形式和数量关系”,但多有质疑该译文不准确.近来有“数学是研究量的科学”的提法,其中“量”随着时代的发展,具有常量、变量、结构等几个层次.

20 世纪电子计算机的出现和发展,是科学家和工程师对人类做出的重大贡献,这一信息技术革命的成果,很快就在大多数科学和工程领域得到应用,飞速发展的计算机技术被融入他们的研究方法,如物理学家利用数字模拟研究超新星爆炸这样在传统的实验室里无法进行的实验,化学家、材料学家利用精密的量子力学计算揭露原子尺度上的各种现象,生物学家利用巨型计算机处理、分析大量的基因组数据,地理和环境学家利用精密的信号处理技术去探测地球的自然资源,航空工程师利用大尺度流体动力学计算设计飞机机翼和发动机,甚至经济学家、心理学家、社会学家也利用计算机对经验数据分析趋势、做出推断.

而在这样的技术革命浪潮中,最大的嘲弄之一也许是,虽然计算机通过如冯·诺依曼(John von Neumann)和图灵(Alan Turing)这样的天才巨人从纯数学领域中孕育、诞生,但是几十年来这项神奇的技术在它产生的领域中只有很小的影响.这种情况直到 20 世纪 80 年代才有所改变<sup>[2]</sup>.

随着计算机在高速度和高精度方向的进展,以及一些通用数学软件如 Mathematica 的出现,数学家们开始利用先进的计算机技术作为他们日常研究工作的新工具,导致一些新的数学成果部分或全部由计算机完成.这种将计算机技术用于数学研究的新手段被称为实验数学(experimental mathematics).

虽然被称为数学实验(mathematical experiments)课程的目的和内容,与所谓的实验数学有所不同,但是它们产生的背景、使用的工具,以及从认识论的角度看待研究问题的方法,均有相同之处.这里先简单介绍实验数学出现的背景及其内涵,再说明数学实验的指导思想、内容设计、基本要求及学习方法.

### 1.1.1 一个新的学科分支——实验数学

1976 年美国数学家阿佩尔(Appel)和哈肯(Haken)在两台计算机上,用 1200 小时作了 100 亿次判断,完成了 100 多年前提出的四色猜想<sup>①</sup>的证明.这是第一个主要由计算机证明的数学定理,但它并不被一些数学家接受,即使后来对其用不同的计算机和程序独立地进行了复检(如 1996 年 Neil Robertson 等人的工作),竟然有人对它做出这样的评论:一个好的数学证明应当像一首诗,而这纯粹是一本电话号码簿!可是从现在的观点看,作为数学定理基于计算机证明的典型例子,这个工作实际上成为数学史上一系列新思维的起点.

20 世纪 80 年代后期美国数学学会(AMS)在它的月刊上正式开辟“计算机与数学”版面,力图让数学界认识到,计算机可以成为研究数学的有力工具.1992 年一本新的刊物《实验数学》(Journal Experimental Mathematics)开始发行,网站是 <http://www.expmath.org>,每年 4 期,发表由实验方法产生的形式上的结果、借助实验联想到的猜想,以及由特定含义的假设支持的论据所撰写的原创论文.它宣称:理论和实验彼此相依,数学界将从更彻

---

① 四色猜想是指:对任何平面地图着色,使得任意有相同边界的邻国都没有相同的颜色,最多只需 4 色.

底暴露的实验进程中受益. 在这一刊物的创办者 David Epstein<sup>①</sup> 和 Silvio Levy 等人周围形成了一群致力于实验数学的数学家.

在加拿大 Simon Fraser 大学 Jonathan Borwein<sup>②</sup> 和 David Bailey<sup>③</sup> 等人 1993 年成立了实验与构造(constructive)数学中心(CECM), 这是一群非常活跃的实验数学倡导者, 近年来出版了多本有关实验数学的专著<sup>[2~6]</sup>. 与 CECM 的研究工作有关, 但哲学思想不同的还有 Doron Zeilberger 等人.

在 20 世纪 80 年代和 90 年代, 数学界的主流观点认为, 以计算机为主要手段的实验, 作为启发和探索是有用的, 但是按照数学的演绎方法和形式主义, 这种探索应限于发现和教学的非正式范畴. 而越来越多涌现的实验数学家们挑战这种观点, 引起一系列的争论, 其中包括对实验一词的各种哲学意义上的讨论<sup>[7]</sup>.

Jonathan Borwein 和 David Bailey 在文献[2]中对实验数学这一数学学科的新分支作了这样的描述: 将先进的计算机技术用于数学研究的新手段称为实验数学, 计算机为数学家提供“实验室”, 让他们进行实验, 以分析例子、检验新想法、探寻新模型, 包括:

1. 获取直观和领悟;
2. 发现新的模型和关系;
3. 利用图形显示来启发研究中的数学定理;
4. 检验特别是证伪猜想;
5. 探索一个可能的结果看它是否值得去作形式的证明;
6. 启发形式证明的途径;
7. 用基于计算机的推导代替冗长的手工推导;
8. 分析地验证得到的结果.

对于 4, 作者强调, 证伪是最有价值的用途之一, 因为一个简单的计算例子就可节约为证明一个错误的观点所要付出的大量劳动. 对于 5, 作者指出, 数学家在研究过程中一般不知道能否成功, 按照传统的数学方法, 为保证这个问题有意义, 需要证明所有的细节, 而实验数学方法允许数学家在最初阶段不必“拿下”全部引理, 只需保持一个合理的研究水平, 之后再决定该结果是否值得证明, 如果前景不像想象的那样, 或者它简单到没有足够的兴趣, 那就不要花费过多的时间.

在 Jonathan Borwein 和 David Bailey 建立的实验数学网站

<http://www.experimentalmath.info>

---

① David Epstein(1937— ) 英国数学家, 皇家学会会员, 研究领域包括双曲几何、三维流形、群论等, 1992 年创办实验数学期刊.

② Jonathan Borwein (1951— ) 加拿大数学家, 1974 年在牛津大学获博士学位, 曾任加拿大数学学会主席, 研究领域涉及分析、优化、数值计算及高精度计算机计算. 近年来与 David Bailey 合作, 有多本实验数学的专著问世.

③ David Bailey (1948— ) 数学家、计算机科学家, 1976 年在斯坦福大学获博士学位, 曾长期在美国国家航空与航天局工作, 后在伯克利国家实验室计算研究部门任技术总管, 研究领域涉及数值分析和并行计算. 近年来与 Jonathan Borwein 合作, 有多本实验数学的专著问世.

上,可以找到有关的书籍、文章、软件、工具及其他信息.

### 1.1.2 学习和应用数学的新途径——数学实验

电子计算机技术及数学软件的飞速发展,不仅为数学家提供了研究数学的新手段,催生了一门新的学科分支——实验数学,而且给以用数学做工具,来分析和解决实际问题为主要目的广大学生和科学技术工作者,开辟了一条学习并掌握数学知识的新途径,即数学实验.

我们看到的最早的一本关于数学实验的教材是 Mount Holyoke College 于 1997 年出版的《数学实验室》(Laboratories in Mathematical Experimentation),从前言中知道,这所学校早在 1989 年就开设了数学实验课程,要求学生通过观察自己总结规律,鼓励他们建立描述的语言,猜想并分析所研究的现象.中译本<sup>[8]</sup>的译者认为该书“体现了用归纳方法和实验手段进行数学教育的思想方法:从若干实例出发(包括学生自己设计的例子)→在计算机上做大量的实验→发现其中(可能存在的)规律→提出猜想→进行证明和论证”.从书的前言和内容看,这本书和这门课的对象主要是数学系学生.

我国在 20 世纪 90 年代中期开始探索将数学实验引入大学数学教学体系,经过教育部立项的课题研究和几所院校的试点,数学实验课程的指导思想、内容设计、基本要求以及在大学数学教育中的定位等逐步明确.

数学实验的指导思想是,学生在教师的指导下,通过利用数学软件在计算机上做实验,学习解决实际问题常用的数学原理和方法,分析并解决经过简化的实际问题,提高学数学、用数学的兴趣、意识和能力.

与传统的数学课程以教师讲授为主不同,数学实验让学生在教师指导下,在计算机上自己动手、动脑,自由地选择软件,比较算法,分析结果,通过数值的、几何的观察、联想、类比,去发现解决问题的线索,探讨规律性的结果.

在设计数学实验的内容时,将它定位为非数学专业的大学数学三门主干课程(微积分、代数与几何、随机数学方法)之后,与数学的应用密切相关的一门基础课,起着承上(上述三门数学课)启下(后续课及研究生课程)的作用.内容选择那些最常用的解决实际问题的数学方法,包括数值计算、优化方法和数理统计的基本原理、主要算法及软件实现,并以数学建模的思想和案例相贯穿.

数值计算包括插值与数值积分、常微分方程数值解、线性代数方程组的数值解法、非线性代数方程 4 个实验.优化方法包括无约束优化、线性规划、非线性规划、整数规划 4 个实验.数理统计包括数据的统计与分析、统计推断、回归分析 3 个实验.数学建模有数学建模初步、数学建模与数学实验 2 个实验.

可以看出,这是一门重组课程,它集数值计算、优化方法、数理统计、数学建模以及数学软件于一体,既是三门数学主干课程的巩固和提高,又在基本数学知识和数学的应用之间架起一座桥梁.

要在有限的一门课的学时内,学习数值计算等课程的诸多内容及数学软件的使用,不可



能按照传统的办法及原来这几门课的教学大纲,让学生掌握那么多的知识,而应该根据本科非数学专业对这些数学内容的实际需求和计算机技术与数学软件的发展状况,合理地制定数学实验的基本要求.

我们拟定的数学实验的基本要求可归纳为:了解数学基本原理、知道主要数值算法、会用数学软件实现、培养数学建模能力.具体地说:

**了解数学基本原理** 每个实验都明确提出要解决的数学问题,给出解决问题的数学原理如定义、定理等,但一般不给证明.

**知道主要数值算法** 每个实验都给出实现数学原理的主要数值算法,如公式、计算步骤等,有些公式不做推导.

**会用数学软件实现** 每个实验都给出实现主要数值算法的软件程序,包括输入输出、参数选择等,特别强调对输出结果的分析.

**培养数学建模能力** 每个实验开始都从实际问题的建模引出数学问题,介绍数学原理、算法和软件后,落实于数学模型的求解,及对实际问题的回答.

数学实验力图实现数学方法、数学软件和数学建模的融合.

数学方法涵盖数值计算、优化方法和数理统计三部分内容,可以说是学完大学数学三门主干课程后,用数学工具分析和解决实际问题所需要的最基本、最常用、最重要的内容.既强调指出,什么样的实际问题及其归结的数学问题需要这些数学方法来解决,又一般地介绍这些数学内容的原理和算法.

从实用角度选择数学软件 MATLAB 和 LINGO,可以方便、有效地完成上述数学方法的软件实现.这里不是全面地、而只是结合上述三部分数学内容的算法学习这两个软件.

数学建模通过实例给出模型分析与假设、模型求解和结果解释的全过程,初步培养数学建模的意识和能力.

需要强调的是,数学实验是以学生做实验(而不是教师讲授)为主.一方面,只有亲自动手编程,在计算机上反复地计算、修改、再计算,对输出结果认真地核对、分析、解释,才能逐渐掌握和熟练使用软件.另一方面,在做实验的过程中,可以通过对不同的数学方法、不同的数值算法的分析、比较,来学习和探讨数学知识本身的“奥妙”,这一点与 1.1.1 节中介绍的新学科——实验数学的研究有相通之处.当然,在计算机上完成一个(哪怕是简化的)实际问题数学建模的全过程,也会让同学们充满成就感的.

最后指出,以上关于数学实验的课程定位、内容设计、基本要求等主要是针对非数学专业学生而言.目前国内有许多风格各异、内容不尽相同的数学实验教材,如参考文献[9~12],这门课程的目的、模式、内容、方法等都还在不断地探索和发展.

## 1.2 数学实验实例

本节介绍几个数学实验的实例.