21世纪大学数学精品教材

概率论与数理统计学习指导

李德宜　刘云冰　主编

科学出版社

21 世纪大学数学精品教材

概率论与数理统计学习指导

李德宜　刘云冰　主编

科学出版社

北京

前　言

概率论与数理统计课程中概念、定理、性质繁多，再现率低，且受教学学时和教材篇幅限制，教材不能详尽展开讲解，解题时往往无从下手，增加了学生学习的困难. 基于此，我们在总结、归纳多年教学及其经验的基础上编写了这本学习指导，相信它将成为读者学习概率论与数理统计课程的良师益友.

本书是与《普通高等教育“十二五”规划教材・21 世纪大学数学精品教材・概率论与数理统计》(李寿贵、余胜春主编，科学出版社 2011 年 6 月出版)配套的学习指导教材，各章与教材保持一致，亦可与其他教材配套使用.

本书共分八章，各章按基本要求、内容提要、释疑解难、例题分析、考题选讲、复习题和自测题及复习题解答与自测题解答等内容编写.

本书具有以下特点：

(一) 基本要求具体地指出了学习每一章应掌握的程度.

(二) 内容提要说明了每一章需要掌握的内容，包括基本概念、重要定理、常用公式以及它们之间的关系.

(三) 释疑解难通过对疑难问题、易错概念和常见错误的剖析，指导读者正确地理解和掌握基本概念，提高分析问题和解决问题的能力.

(四) 例题分析选用了大量的例题，大多都具有典型性，由浅入深，由易到难. 用例题的形式体现每章的基本内容及具体要求，题型丰富，注重基本概念，讲求基本方法，相当部分题目还给出了解题分析或注释，更好地体现了学习指导的作用.

(五) 考题选讲选取了全国研究生入学考试部分试题及相关院校的期末考试试题，对读者拓展知识面，开拓思路和眼界，提高分析问题和解决问题的能力，均有较大的帮助.

(六) 各章配有复习题和自测题. 复习题供读者检测学习各章时对内容的掌握，自测题(I)主要用于测试读者对本章基本知识、基本方法的掌握程度，自测题(II)以达到或接近考研水平的题目为主，供读者复习总结时自我检查与提高.

(七) 书后配有三套模拟测试题及详解，便于读者学习完成时进行考前模拟测试与检查.

本书由李德宜、刘云冰任主编，黄枝姣、陈贵词、祝彦成、曲峰林任副主编，并由李德宜提出编写思路及编写提纲. 各章编写人员：刘云冰(第一章)，曲峰林(第二章)，李德宜(第三章)，陈贵词(第四章、第六章)，黄枝姣(第五章、第七章)，祝彦成(第八章)，全书由李德宜、刘云冰统稿、定稿. 龚正良、肖俊、余厚习、陈建发、徐帆、

刘燕丽、贾世会、余艳、潘丽等同志参与了本书编写的整理与校正工作.

本书适用于高等院校理工类各专业概率论与数理统计课程的同步学习指导,也可作为教师的教学参考书,对报考研究生的读者也具有一定的参考价值.

由于编者水平有限,疏漏和不妥之处在所难免,恳请同仁和读者予以指正.

编　者

2011 年 6 月

目　　录

第一章 随机事件与概率

基本要求

(1) 理解随机事件的概念,了解样本空间的概念,掌握事件之间的关系与运算.

(2) 理解事件频率的概念,了解概率的统计定义.

(3) 理解概率的古典定义,会计算简单的古典概率.

(4) 了解概率的基本性质,掌握概率的加法公式.

(5) 理解条件概率的概念,掌握概率乘法公式、全概率公式和贝叶斯公式.

(6) 理解事件独立性的概念,掌握判定独立性的方法.

内容提要

一、随机试验、样本空间与随机事件

1. 随机试验

具有以下三个特点的试验称为随机试验,记为 E.

(1) 试验可在相同的条件下重复进行;

(2) 每次试验的结果具有多种可能性,但试验之前可确知试验的所有可能结果;

(3) 每次试验前不能确定哪一个结果会出现.

2. 样本空间

随机试验 E 的所有可能结果组成的集合称为 E 的样本空间,记为 S;试验的每一个可能结果,即 S 中的元素,称为样本点,记为 e.

3. 随机事件

在一次试验中可能出现也可能不出现的试验结果称为随机事件,简称事件,常用 A,B,C 等大写字母表示;可表述为样本空间中样本点的某个集合,分为复合事件和简单事件,还有必然事件(记为 S) 和不可能事件(记为 $\varnothing$).

二、事件的关系与运算

1. 包含关系

"事件 A 发生必导致 B 发生",记为 $A \subset B$ 或 $B \supset A$.

2. 相等

"事件 A 包含 B,且事件 B 包含 A",记为 $A = B$.
$A = B \Leftrightarrow A \subset B$ 且 $B \subset A$.

3. 和事件(并)

"事件 A 与 B 至少有一个发生",记为 $A \cup B$.

4. 积事件(交)

"事件 A 与 B 同时发生",记为 $A \cap B$ 或 AB.

5. 差事件

"事件 A 发生而 B 不发生",记为 $A - B$,称为 A 与 B 的差事件.

6. 对立事件(余事件)

$S - B = \overline{B}$ 称为 B 的对立事件,易知,$A - B = A\overline{B}$.

7. 互不相容性

$AB = \varnothing$;A,B 互为对立事件 $\Leftrightarrow A \cup B = S$ 且 $AB = \varnothing$.

8. 事件的运算法则

(1) 交换律:$A \cup B = B \cup A, AB = BA$.
(2) 结合律:$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C, (AB)C = A(BC)$.
(3) 分配律:$(A \cup B)C = AC \cup BC, (AB) \cup C = (A \cup C)(B \cup C)$.
(4) 对偶律:$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}, \overline{AB} = \overline{A} \cup \overline{B}$,可推广为

$$\overline{\bigcup_k A_k} = \bigcap_k \overline{A_k}, \overline{\bigcap_k A_k} = \bigcup_k \overline{A_k}$$

三、频率与概率

1. 频率的定义

事件 A 在 n 次重复试验中出现 n_A 次,则比值 $\frac{n_A}{n}$ 称为事件 A 在 n 次重复试验中

出现的频率，记为 $f_n(A)$，即 $f_n(A)=\dfrac{n_A}{n}$.

2. 统计概率

在大量重复试验中，随机事件 A 的频率具有稳定性，即当试验次数 n 很大时，频率 $f_n(A)$ 常在一个确定的数字 $p(0<p<1)$ 的附近摆动，这个刻画随机事件 A 在试验中发生的可能性大小的数字 p 称为随机事件 A 的概率，记作 $P(A)$.

也就是说，当 $n\to\infty$ 时，频率 $f_n(A)=\dfrac{n_A}{n}\to P(A)$. 当 n 很大时，$P(A)=p\approx f_n(A)$，$P(A)$ 称为事件 A 的统计概率.

3. 古典概率

若试验的基本事件数为有限个，且每个事件发生的可能性相等，则试验对应古典概型（等可能概型），事件 A 发生的概率为

$$P(A)=\frac{A\text{ 中所含样本点数}}{S\text{ 中样本点总数}}=\frac{k}{n}=\frac{k(A)}{n}$$

必然事件的概率等于 1，即 $P(S)=1$. 不可能事件的概率等于 0，即 $P(\varnothing)=0$.

4. 几何概率

除古典型概率之外，历史上出现最早的直接计算事件概率的方法之一，是利用试验结局的均衡性，借助于几何度量确定事件的概率，习惯上称为几何型概率（简称几何概型）. 假设 S 是一线段、平面或空间的有界区域，$L(S)$ 表示其几何度量（如长度、面积、体积等）. 考虑随机试验：向 S 上投掷一质点，假设：① 质点落到 S 中的任何点都是可能的，但不可能落到 S 之外；② 质点的落点在 S 中分布均匀：质点落入 S 中的任何区域 A 的可能性只与其几何度量 $L(A)$ 有关，并与之成正比. 对于 S 中的任何区域 $A\subset S$，考虑事件 $A=\{$质点落入区域 $A\}$，则

$$P(A)=\frac{L(A)}{L(S)}$$

5. 概率的公理化定义

概率作为事件出现可能性大小的度量，应该满足如下三条公理：

(1) 非负性：对于每一个事件 A 的概率都是非负的，即 $P(A)\geqslant 0$.

(2) 规范性：必然事件的概率等于 1，即 $P(S)=1$.

(3) 可加性：对于任意有限个或可数个两两不相容事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n,\cdots$ $(A_iA_j=\varnothing,\ i\neq j)$，它们之和的概率等于各个事件的概率之和，即

$$P(A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n\cup\cdots)=P(A_1)+P(A_2)+\cdots+P(A_n)+\cdots$$

上式称为概率的可列可加性.

四、概率的基本性质

(1) 不可能事件的概率为零:$P(\varnothing)=0$.

(2) 有限可加性:设 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 是 n 个两两互不相容的事件,即 $A_iA_j=\varnothing(i\neq j;i,j=1,2,\cdots,n)$,则有

$$P(A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n)=P(A_1)+P(A_2)+\cdots+P(A_n)$$

(3) 单调不减性:若事件 $B\supset A$,则 $P(B)\geqslant P(A)$,且 $P(B-A)=P(B)-P(A)$.

(4) 互补性:$P(\overline{A})=1-P(A)$,且 $P(A)\leqslant 1$.

(5) 加法公式:对任意两事件 A,B,有

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB)$$

此性质可推广到任意 n 个事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 的情形.

(6) 可分性:对任意两事件 A,B,有 $P(A)=P(AB)+P(A\overline{B})$.

五、条件概率与乘法公式

1. 条件概率

设 A,B 是 S 中的两个事件,则 $P(B\mid A)=\dfrac{P(AB)}{P(A)}$ 称为事件 A 发生的条件下事件 B 发生的条件概率.

2. 乘法公式

设对任意事件 A,B,则

$$P(AB)=P(A)P(B\mid A)=P(B)P(A\mid B)$$

称为事件 A,B 的概率乘法公式.

六、全概率公式与贝叶斯(Bayes)公式

1. 全概率公式

设 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 是 S 的一个划分,且 $P(A_i)>0\ (i=1,2,\cdots,n)$,则对任何事件 B,有

$$P(B)=\sum_{i=1}^{n}P(A_i)P(B\mid A_i)$$

称为全概率公式.

2. 贝叶斯公式

设 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 是 S 的一个划分,且 $P(A_i)>0(i=1,2,\cdots,n)$,则对任何事件 B,有

$$P(A_j \mid B)=\frac{P(A_j)P(B \mid A_j)}{\sum_{i=1}^{n}P(A_i)P(B \mid A_i)} \quad (j=1,2,\cdots,n)$$

称为贝叶斯公式或逆概率公式.

七、事件的独立性

1. 两事件的独立

若对任意事件 A,B,当 $P(A)>0$ 时,有 $P(B)=P(B \mid A)$,则称事件 A 与 B 相互独立;等价于:$P(AB)=P(A)P(B)$.

2. 多个事件的独立

1) 三个事件的两两独立

设 A,B,C 是三事件,如果具有等式

$$\begin{cases}P(AB)=P(A)P(B)\\P(BC)=P(B)P(C)\\P(AC)=P(A)P(C)\end{cases}$$

则称三事件 A,B,C 两两独立.

一般地,当事件 A,B,C 两两独立时,等式 $P(ABC)=P(A)P(B)P(C)$ 不一定成立.

2) 三个事件的相互独立

设 A,B,C 是三事件,如果具有等式

$$\begin{cases}P(AB)=P(A)P(B)\\P(BC)=P(B)P(C)\\P(AC)=P(A)P(C)\\P(ABC)=P(A)P(B)P(C)\end{cases}$$

则称 A,B,C 是相互独立的事件.

3) n 个事件的相互独立

一般地,设 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 是 n 个事件,如果对任意的 $k(1<k\leqslant n)$,任意的 $1\leqslant i_1<i_2<\cdots<i_k\leqslant n$,具有等式

$$P(A_{i_1}A_{i_2}\cdots A_{i_k})=P(A_{i_1})P(A_{i_2})\cdots P(A_{i_k})$$

称 n 个事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 是相互独立的事件.

在 n 个事件的相互独立中包含的等式总数为

$$C_n^2+C_n^3+\cdots+C_n^n=(1+1)^n-C_n^1-C_n^0=2^n-n-1$$

在实际应用中,对于事件的独立性,我们往往不是根据定义来判断,而是根据实际意义来加以判断的.

注 ① 相互独立 $\Rightarrow$ 两两独立,但两两独立 $\not\Rightarrow$ 相互独立.

② A,B 相互独立$\Leftrightarrow P(A|B)=P(A)$

$$\Leftrightarrow \frac{P(AB)}{P(B)}=P(A)\text{，即 } P(AB)=P(A)P(B)$$

$$\Leftrightarrow P(A|B)=P(A|\overline{B}).$$

③ A,B 相互独立$\nRightarrow A$、B 互不相容，且 A,B 互不相容$\nRightarrow A,B$ 相互独立.

④ A 与 B、$\overline{A}$ 与 B、A 与 $\overline{B}$、$\overline{A}$ 与 $\overline{B}$ 中有一组相互独立，则其余三组也相互独立.

⑤ 若$(A_1,A_2,\cdots,A_m)$ 与$(B_1,B_2,\cdots,B_n)$ 相互独立，则 $f(A_1,A_2,\cdots,A_m)$ 与 $g(B_1,B_2,\cdots,B_n)$ 也相互独立. 其中 f,g 表示和、差、积、对立运算.

八、伯努利(Bernoulli)概型

1. 伯努利试验

只有两个可能结果 A 及 $\overline{A}$ 的试验称为伯努利试验，常记为 E，且 $P(A)=p$，$P(\overline{A})=1-p=q(0<p<1)$. E 也称为"成功 — 失败"试验，"成功"的概率常用 $p=P(A)$ 表示，其中 $A=$"成功".

2. n 重伯努利试验

把 E 重复独立地进行 n 次，所得的试验称为 n 重伯努利试验，记为 E^n. E^n 的每一个可能结果可以记作 $\omega=(\omega_1,\omega_2,\cdots,\omega_n)$，其中 $\omega_1=A$ 或 $\overline{A}$，即 E^n 的样本空间为 $S=\{(\omega_1,\omega_2,\cdots,\omega_n):\omega_i=A$ 或 $\overline{A}(i=1,2,\cdots,n)\}$，共含 2^n 个样本点.

将试验独立地进行 n 次，指各次试验是相互独立的，所谓"试验是相互独立的"则理解为试验的结果是相互独立的. 于是 E^n 的样本点中各分量 ω_i 之间相互独立，即

$$P(\omega_1\omega_2\cdots\omega_n)=P(\omega_1)P(\omega_2)\cdots P(\omega_n)$$

3. 可列重伯努利试验

把 E 重复独立地进行可列多次，所得的试验称为可列重伯努利试验，记为 E^∞. 以上三种伯努利试验统称为伯努利概型.

4. 伯努利概型中重要事件的概率

(1) 记 $B_k=\{n$ 重伯努利试验中 A 恰好出现 k 次$\}$，则由试验独立性的意义及概率的有限可加性，得

$$P_n(k)=P(B_k)=C_n^k p^k q^{n-k}\quad(0\leqslant k\leqslant n)$$

其中 $p+q=1$.

(2) 将伯努利试验独立重复地进行下去直到出现首次成功为止. 记 $W_k=$"首

次成功出现在第 k 次试验”，则 $W_k = \overbrace{\bar{A}\bar{A}\cdots\bar{A}}^{k-1个}A$，故

$$P(W_k) = pq^{k-1} \quad (k = 1,2,\cdots)$$

上式的概率是一个几何级数的一般项，称为几何分布.

(3) 将伯努利试验独立重复地进行下去，直到出现 r 次成功为止.

记 C_k =“第 $r(k \geqslant r)$ 次成功出现在第 k 次试验”，则 C_k 发生当且仅当第 k 次试验出现成功事件 A，而前 $k-1$ 次恰好出现 $r-1$ 次，故

$$P(C_k) = C_{k-1}^{r-1}p^{r-1}q^{k-1}p = C_{k-1}^{r-1}p^r q^{k-r} \quad (k \geqslant r)$$

上式的概率称为帕斯卡分布.

释疑解难

问题 1　若 A,B,C 为三个随机事件，则 A 与 $\overline{A \cup B \cup C}$ 必定是互不相容的，对吗？

答　是对的. 因为 $A \cap \overline{A \cup B \cup C} = A \cap \bar{A} \cap \bar{B} \cap \bar{C} = \varnothing$，所以 A 与 $\overline{A \cup B \cup C}$ 必定是互不相容.

问题 2　互逆事件与互斥(即互不相容)事件等价吗？

答　如果两个事件 A 与 B 必有一个事件发生，且至多有一个事件发生，则 A，B 为互逆事件；如果两个事件 A 与 B 不能同时发生，则 A,B 为互斥事件. 因而，互逆必定互斥，互斥未必互逆. 区别两者的关键是：当样本空间只有两个事件时，两事件才可能互逆，而互斥适用于多个事件的情形. 作为互斥事件在一次试验中两者可以都不发生，而互逆事件必发生一个且只发生一个.

问题 3　如何理解两事件独立与两事件互斥(即互不相容)？

答　两事件 A,B 独立，则 A 与 B 中任一个事件的发生与另一个事件的发生无关，这时 $P(AB) = P(A)P(B)$；而两事件互斥，则其中任一个事件的发生必然导致另一个事件不发生，这两事件的发生是有影响的，这时 $AB = \varnothing$，则有 $P(AB) = 0$. 可以用图形作一直观解释. 在图 1.1 左边的正方形中，$P(AB) = \dfrac{1}{4}$，$P(A) = \dfrac{1}{2} = P(B)$，表示样本空间中两事件的独立关系，而在右边的正方形中，$P(AB) = 0$，表示样本空间中两事件的互斥关系.

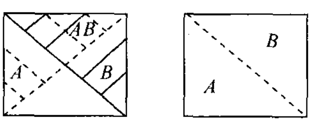

图 1.1

问题 4　若随机事件 A 与 B 满足 $P(A) > 0, P(B) > 0$，则 A 与 B 相互独立和 A 与 B 互不相容能否同时成立？

答　不能. 因为若 A 与 B 互不相容，则 $P(AB) = 0$，又 $P(A) > 0, P(B) > 0$，

可知$P(A)P(B)>0$,则$P(AB)\neq P(A)P(B)$,即A与B不可能相互独立,所以说不能同时成立.

问题 5 对于任意随机事件A与B,是否恒有$P(A)=P(AB)+P(A\overline{B})$?

答 是的. 因为对于任意随机事件A与B,有$A=AB\cup A\overline{B}$,且AB与$A\overline{B}$互不相容,从而$P(A)=P(AB)+P(A\overline{B})$.

问题 6 如何正确理解条件概率$P(A\mid B)$与积事件概率$P(AB)$?

答 $P(AB)$是在样本空间S内事件AB的概率,而$P(A\mid B)$是在试验E增加了新条件B发生后的缩减的样本空间S_B中计算事件A的概率. 虽然A,B都发生,但两者是不同的,一般说来,当A,B同时发生时,常用$P(AB)$,而在有包含关系或明确的主从关系时,用$P(A\mid B)$.

例如,袋中有 9 个白球 1 个红球,作不放回抽样,每次任取一球,取两次,求:(1) 第二次才取到白球的概率;(2) 第一次取到的是白球的条件下,第二次取到白球的概率. 问题(1) 是一个积事件概率的问题,而问题(2) 是一个条件概率的问题.

例题分析

例 1.1 写出下列随机试验的样本空间及下列事件包含的样本点:

(1) 掷一颗骰子,出现奇数点.

(2) 投掷一枚均匀硬币两次:

① 第一次出现正面; ② 两次出现同一面; ③ 至少有一次出现正面.

(3) 在 1,2,3,4 四个数中可重复地抽取两个数,其中一个数是另一个数的两倍.

(4) 将a,b两只球随机地放到 3 个盒子中去,第一个盒子中至少有一个球.

分析 可对照集合的概念来理解样本空间和样本点:样本空间可指全集,样本点是元素,事件则是包含在全集中的子集.

解 (1) 掷一棵骰子,有六种可能结果,如果用"1"表示"出现 1 点"这个样本点,其余类似,则样本空间为$S=\{1,2,3,4,5,6\}$,出现奇数点的事件为$\{1,3,5\}$.

(2) 投掷一枚均匀硬币两次,其结果有四种可能,若用(正,反)表示"第一次出现正面,第二次出现反面"这一样本点,其余类似. 则样本空间为$S=\{$(正,正),(正,反),(反,正),(反,反)$\}$,用A,B,C分别表示上述事件①、②、③,则事件$A=\{$(正,正),(正,反)$\}$;事件$B=\{$(正,正),(反,反)$\}$;事件$C=\{$(正,正),(正,反),(反,正)$\}$.

(3) 在 1,2,3,4 四个数中可重复地抽取两个数,共有$4^2=16$种可能,若用(i,j)表示"第一次取数i,第二次取数j"这一样本点,则样本空间为$S=\{(i,j)\mid(i,$

$j=1,2,3,4)\}$;其中一个数是另一个数的两倍的事件为$\{(1,2),(2,1),(2,4),(4,2)\}$.

(4) 三个盒子分别记为甲、乙、丙,将a,b两只球随机地放到三个盒子中去共有九种结果.若用(甲、乙)表示“a球放入甲盒,b球放入乙盒”这一样本点,其余类似,则样本空间为$\Omega=\{$(甲,甲),(甲,乙),(甲,丙),(乙,乙),(乙,甲),(乙,丙),(丙,甲),(丙,乙),(丙,丙)$\}$;第一个盒子中至少有一个球的事件为:$\{$(甲,甲),(甲,乙),(甲,丙),(乙,甲),(丙,甲)$\}$.

例 1.2 设A、B、C为三个事件,用A,B,C的运算关系表示下列各事件:

(1) 仅A发生;

(2) A与C都发生,而B不发生;

(3) 所有三个事件都不发生;

(4) 至少有一个事件发生;

(5) 至多有两个事件发生;

(6) 至少有两个事件发生;

(7) 恰有两个事件发生;

(8) 恰有一个事件发生.

分析 利用事件的运算关系及性质来描述事件.

解 (1) $A\bar{B}\bar{C}$; (2) $A\bar{B}C$; (3) $\bar{A}\bar{B}\bar{C}$或$\overline{A\cup B\cup C}$;

(4) $A\cup B\cup C$或$A\bar{B}\bar{C}\cup\bar{A}B\bar{C}\cup\bar{A}\bar{B}C\cup AB\bar{C}\cup A\bar{B}C\cup\bar{A}BC\cup ABC$;

(5) $\bar{A}\cup\bar{B}\cup\bar{C}$或$A\bar{B}\bar{C}\cup\bar{A}B\bar{C}\cup\bar{A}\bar{B}C\cup AB\bar{C}\cup A\bar{B}C\cup\bar{A}BC\cup\bar{A}\bar{B}\bar{C}$;

(6) $AB\cup AC\cup BC$或$ABC\cup AB\bar{C}\cup A\bar{B}C\cup\bar{A}BC$;

(7) $AB\bar{C}\cup A\bar{B}C\cup\bar{A}BC$;

(8) $A\bar{B}\bar{C}\cup\bar{A}\bar{B}C\cup\bar{A}B\bar{C}$.

例 1.3 利用事件的关系和运算律证明

(1) $A-B=A\cap\bar{B}$; (2) $(A-A\cap B)\cup B=A\cup B=\overline{(\bar{A}\cap\bar{B})}$.

证 (1) $A-B=\{A$发生且B不发生$\}\Leftrightarrow A\cap\bar{B}$发生,故$A-B=A\cap\bar{B}$.

(2)
$$\begin{aligned}(A-A\cap B)\cup B&=A\cap(\overline{A\cap B})\cup B=A\cap(\bar{A}\cup\bar{B})\cup B\\&=(A\cap\bar{B})\cup B=(A\cup B)\cap(\bar{B}\cup B)=A\cup B,\end{aligned}$$

又$\overline{\bar{A}\cap\bar{B}}=\overline{\overline{A\cup B}}=A\cup B$,故原式成立.

例 1.4 设事件A与B互不相容,且$P(A)=p$,$P(B)=q$,求下列事件的概率:$P(AB)$,$P(A\cup B)$,$P(A\bar{B})$,$P(\overline{AB})$.

分析 按概率的性质进行计算.

解 A与B互不相容,所以$AB=\varnothing$,$P(AB)=P(\varnothing)=0$;

$$P(A+B)=P(A)+P(B)=p+q$$

由于A与B互不相容,这时$A\bar{B}=A$,从而$P(A\bar{B})=P(A)=p$;由于$\bar{A}\bar{B}=\overline{A\cup B}$,从而

$$P(\overline{A}\,\overline{B}) = P(\overline{A \cup B}) = 1 - P(A \cup B) = 1 - (p + q)$$

例 1.5 在盒子中有 10 个相同的球，分别标为号码 1，2，…，9，10，从中任摸一球，求此球的号码为偶数的概率.

解法一 令 $i(i = 1,2,\cdots,9,10)$ 表示所取球的号码为 i，则 $S = \{1,2,\cdots,9,10\}$，故基本事件总数 $n = 10$.

令 A 表示所取球的号码为偶数，因而 A 中含有 5 个基本事件. 所以

$$P(A) = \frac{5}{10} = \frac{1}{2}$$

解法二 令 A 表示所取球的号码为偶数，则 $\overline{A}$ 表示所取球的号码为奇数，因而 $S = \{A,\overline{A}\}$，所以 $P(A) = \frac{1}{2}$.

例 1.6 一套五册的选集，随机地放到书架上，求各册书成 1，2，3，4，5 的顺序的概率.

解 将五本书看成五个球，这就是一个摸球模型，基本事件总数是 5!.

令 A 表示各册自左向右或自右向左恰好构成 1，2，3，4，5 顺序，则 A 包含的基本事件数为 2，则

$$P(A) = \frac{2}{5!} = \frac{1}{60}$$

例 1.7 从 52 张扑克牌中取出 13 张牌来，求有 5 张黑桃、3 张红心、3 张方块、2 张草花的概率是多少？

解 基本事件数为 C_{52}^{13}. 令 A 表示 13 张牌中有 5 张黑桃、3 张红心、3 张方块、2 张草花，则 A 包含的基本事件数为 $C_{13}^{5}C_{13}^{3}C_{13}^{3}C_{13}^{2}$. 于是

$$P(A) = \frac{C_{13}^{5}C_{13}^{3}C_{13}^{3}C_{13}^{2}}{C_{52}^{13}} \approx 0.012\,93$$

例 1.8 在 0，1，2，…，9 这 10 个数字中无重复地任取 4 个数字，试求取得的 4 个数字能组成四位偶数的概率.

解 设 A 表示取得的 4 个数字能组成四位偶数，则从 10 个数中任取 4 个数字进行排列，共有 P_{10}^{4} 种排列方式，所以共有 P_{10}^{4} 个基本事件.

下面考虑 A 包含的基本事件数，分两种情况考虑一种是 0 排在个位上，有 P_9^3 种选法，另一种是 0 不排在个位上，有 $P_4^1P_8^1P_8^2$ 种，所以 A 包含的基本事件数为 $P_9^3 + P_4^1P_8^1P_8^2$，故

$$P(A) = \frac{P_9^3 + P_4^1P_8^1P_8^2}{P_{10}^4} = \frac{41}{90} \approx 0.4556$$

例 1.9 任取一个正整数，求该数的平方数的末位数字是 1 的概率.

分析 不能将正整数的全体取为样本空间，这样的样本空间是无限的，谈不上等可能的.

解 因为一个正整数的平方的末位数只能取决于该正整数的末位数，它们可